Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5. 1. Si $x \neq 1$, alors $\sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $x \neq 1$). Si $x = 1$, alors $\sum_{k=0}^n x^k = n + 1$.

2. Posons $f: x \mapsto \sum_{k=0}^n x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$. Comme f est polynomiale, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Mais on peut aussi dériver f comme un quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Ainsi, pour $x \neq 1$:

$$\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{(n+1)x^n(x-1) - (x^{n+1} - 1)}{(x-1)^2} = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$$

Attention, le terme de la somme pour $k = 0$ est 1 quand on le dérive, sa dérivée est nulle, c'est pour ça qu'on a fait partir la somme à 1 et non à 0. En multipliant par x , on obtient

$$\sum_{k=1}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$$

On s'aperçoit que le terme pour $k = 0$ est nul, on peut donc le rajouter. Pour tout $x \neq 1$

$$\sum_{k=0}^n kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(x-1)^2}$$

Pour $x = 1$

$$\sum_{k=0}^n kx^k = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

3. Considérons $g: x \mapsto \sum_{k=0}^n e^{kx} = \sum_{k=0}^n (e^x)^k$. Si $x \neq 0$, on reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison $e^x \neq 1$, ainsi, $g(x) = \frac{e^{(n+1)x} - 1}{e^x - 1}$. En dérivant g sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ avec les deux expressions obtenues, on obtient : $\sum_{k=1}^n ke^{kx} = \frac{((n+1)e^{(n+1)x}(e^x - 1) - e^x(e^{(n+1)x} - 1))}{(e^x - 1)^2}$. Encore une fois, le terme pour $k = 0$ est nul, ainsi,

$$\sum_{k=0}^n ke^{kx} = \frac{ne^{(n+2)x} - (n+1)e^{(n+1)x} + e^x}{(e^x - 1)^2}$$

Pour $x = 0$, $\sum_{k=0}^n ke^{kx} = \sum_{k=0}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $f: x \mapsto x^3 + nx - 1$. Remarquons que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car polynomiale). Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + n \geq 0$. Si $n = 0$, alors $f'(x) = 3x^2 = 0$ ssi $x = 0$, ainsi f' s'annule une seule fois. Si $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$. Dans les deux cas, f est strictement croissante. De plus, f est continue sur $\mathbb{R}$ (car dérivable), ainsi f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $f(\mathbb{R}) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty; +\infty[= \mathbb{R}$. Ainsi, 0 admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$. Il existe donc une unique solution.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme f est continue et strictement croissante sur $\left[0; \frac{1}{n}\right]$, f réalise une bijection de $\left[0; \frac{1}{n}\right]$ vers

$$f\left(\left[0; \frac{1}{n}\right]\right) = \left[f(0); f\left(\frac{1}{n}\right)\right] = \left[-1; \frac{1}{n^3}\right]$$

Comme $0 \in \left[-1; n^{-3}\right]$, on peut en déduire que 0 admet un unique antécédent dans $\left[0; \frac{1}{n}\right]$ par f . Et

cet antécédent est x_n , donc $0 \leq x_n \leq \frac{1}{n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n \leq 1/n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{x_n}{1/n} = nx_n = 1 - (x_n)^3$. Or $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc par produit, $x_n^3 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. Ainsi, $\frac{x_n}{1/n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$.

Ceci prouve que $x_n \sim \frac{1}{n}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme $x_n \sim \frac{1}{n}$, par puissance, on a $x_n^3 \sim \frac{1}{n^3}$ donc

$$\frac{1}{n} - x_n = \frac{1 - nx_n}{n} = \frac{(x_n)^3}{n} \sim \frac{1}{n^4} = \frac{1}{n^4}$$

5. D'après les propriétés sur les équivalents, on en déduit que $\frac{1}{n} - x_n = \frac{1}{n^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$, ainsi, $x_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^4} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^4}\right)$.

Correction de l'exercice 10. 1. Comme u est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n| \leq M$. Ainsi, par inégalité triangulaire, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|v_n| = \left| \frac{\sum_{k=1}^n u_k}{n} \right| = \frac{\left| \sum_{k=1}^n u_k \right|}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n |u_k|}{n} \leq \frac{\sum_{k=1}^n M}{n} = \frac{nM}{n} = M$$

Ainsi, la suite v est bornée. La réciproque est fautive. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = n - 1$ et $u_{2n+1} = -n$. Alors,

$$v_{2n} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} u_k = \frac{1}{2n} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} u_k + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} u_k \right) = \frac{1}{2n} \left(\sum_{p=1}^n u_{2p} + \sum_{p=0}^{n-1} u_{2p+1} \right) = \frac{1}{2n} \sum_{p=0}^{n-1} (u_{2p+2} + u_{2p+1}) = 0$$

Tandis que

$$v_{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \left(\sum_{k=1}^{2n+1} u_k \right) = \frac{1}{2n+1} \left(\left(\sum_{k=1}^{2n} u_k \right) + u_{2n+1} \right) = \frac{1}{2n+1} (0 - n) = \frac{-n}{2n+1}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|v_n| \leq 1$, dès lors $(v_n)_n$ est bornée, contrairement à $(u_n)_n$.

2. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/oipXTIZLJ_8

Supposons que $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell \in \mathbb{R}$. Montrons que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$. Soit $\varepsilon > 0$, alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \geq n_0 \implies |u_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq n_0$, alors :

$$|v_n - \ell| = \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k - \ell \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n u_k - n\ell \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n u_k - \sum_{k=1}^n \ell \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{k=1}^n (u_k - \ell) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |u_k - \ell|$$

Seulement attention, tous les $|u_k - \ell|$ ne sont pas tous plus petit que $\frac{\varepsilon}{2}$, seulement pour $k \geq n_0$. C'est pour cela que l'on va séparer la somme :

$$\begin{aligned} |v_n - \ell| &\leq \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k - \ell| + \sum_{k=n_0}^n |u_k - \ell| \right] \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k - \ell| + \frac{1}{n} \sum_{k=n_0}^n \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon(n-n_0)}{2n} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k - \ell| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

Or, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k - \ell| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, donc il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad n \geq n_1 \implies \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n_0-1} |u_k - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Dès lors, pour tout entier $n \geq \max(n_0, n_1)$, on a $0 \leq |v_n - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Ceci prouve que $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$. La réciproque est fautive, posons $u_n = (-1)^n$, alors $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison -1 . Ainsi, $v_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1 - (-1)^n}{1 - (-1)} \right)$, alors $v_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ tandis que $(u_n)_n$ ne converge pas.

3. Supposons u est croissante, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} u_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n(n+1)} \left(nu_{n+1} + \sum_{k=1}^n nu_k - (n+1)u_{k+1} \right) = \frac{1}{n(n+1)} \left(nu_{n+1} - \sum_{k=1}^n u_k \right)$$

Or pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $u_k \leq u_{n+1}$, donc, $\sum_{k=1}^n u_k \leq nu_{n+1}$, ceci prouve que $v_{n+1} - v_n \geq 0$. Par conséquent, $(v_n)_n$ est une suite croissante.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. 1. $\tan(x) = x + o(x)$, $\tan(3x) = 3x + o(3x) = 3x + o(x)$, par addition des développements limités¹, on trouve $\tan(3x) - \tan(x) = 2x + o(x)$, ainsi $\tan(3x) - \tan(x) \sim 2x$.

2. En faisant un développement limité de $\sin$ puis de $u \mapsto (1+u)^\alpha$ avec $\alpha = -4$, on trouve

$$\frac{1}{\sin^4(x)} = \frac{1}{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^4} = \frac{1}{x^4 \left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^4} = \frac{1}{x^4} \frac{1}{\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3)\right)^4} = x^{-4} \left(1 + 4 \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)$$

$$\text{Finalement } \sin(x)^{-4} - x^{-4} \sim \frac{2}{3x^{-2}}.$$

1. On rappelle que l'addition de DL est autorisée, l'addition des équivalents est à bannir absolument de vos copies et de vos têtes.

Correction de l'exercice 13. 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$, comme $0 < \cos(t) < 1$, on a $\cos^{n+1}(t) < \cos^n(t)$.

En intégrant entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, on obtient $W_{n+1} < W_n$.² La suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour calculer W_{n+2} , intégrons par parties, posons $u = \sin$ et $v = \cos^{n+1}$, u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0; \frac{\pi}{2} \right]$ ³ et $u' = \cos$ et $v' = (n+1) \sin \cos^n$:

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= [\sin(t) \cos^{n+1}(t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(t) \cos^n(t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2(t)) \cos^n(t) dt \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t) dt - (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2}(t) dt \\ &= (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2} \\ W_{n+2} &= \frac{n+1}{n+2} W_n \end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$W_{2n} = \frac{2n-1}{2n} W_{2n-2} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2n(2n-2)} W_{2n-4} = \dots = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots 1}{2n(2n-2)\dots 2} W_0$$

Comme au numérateur on a le produit des nombres impairs entre 1 et $2n-1$, et au dénominateur on a le produit des nombres pairs entre 2 et $2n$, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le produit des nombres pairs entre 2 et $2n$.

$$W_{2n} = \frac{2n(2n-1)(2n-1)(2n-3)\dots 1}{(2n(2n-2)\dots 2)^2} W_0 = \frac{(2n)!}{(2n(2n-2)\dots 2)^2} \frac{\pi}{2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$$

De même pour les termes impairs :

$$W_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1} W_{2n-1} = \frac{2n(2n-2)}{(2n+1)(2n-1)} W_{2n-3} = \dots = \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n-3)\dots 1} W_1$$

On multiplie le numérateur et le dénominateur par le produit des nombres impairs entre 1 et $2n+1$ et on obtient⁴

$$W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$$

4. Raisonnons par récurrence en posant pour tout $n \geq 0$, $\mathcal{P}(n)$: « $W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$ »

- Initialisation : $W_0 W_1 = \frac{\pi}{2}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons la propriété vraie à un rang $n \geq 0$.

$$W_{n+1} W_{n+2} = W_{n+1} \times \frac{n+1}{n+2} W_n = \frac{\pi}{2(n+1)} \times \frac{n+1}{n+2} = \frac{\pi}{2(n+2)}$$

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$.

2. On appelle que si $f \leq g$ alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$ et si $f < g$ sur un intervalle non réduit à un point, alors $\int_a^b f < \int_a^b g$ pour f et g deux fonctions continues sur $[a; b]$ avec $a < b$.

3. Toujours préciser qui sont u et v et qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$

4. Noter que ces résultats n'ont pas été démontrés de façon rigoureuse avec les ... dans les calculs et que la rédaction est un peu longue, il est possible de trouver ce résultat au brouillon puis d'en faire une preuve rigoureuse à l'aide d'une récurrence, on note $\mathcal{P}(n)$: « $W_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \frac{\pi}{2}$, et $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ », l'initialisation se prouve en calculant W_0 et W_1 , l'hérédité grâce à la formule entre W_{n+2} et W_n .

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)}$.

5. On a, en utilisant les questions 1 et 5,

$$1 \geq \frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{W_{n+1}}{W_{n+2}} \times \frac{W_{n+2}}{W_n} \geq 1 \times \frac{n+1}{n+2}$$

D'où $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{W_{n+1}}{W_n} \leq 1$, par le théorème d'encadrement, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{W_{n+1}}{W_n} = 1$, autrement dit, $W_{n+1} \sim W_n$.

6. Comme $W_n W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)}$ et $W_{n+1} \sim W_n$, on obtient $W_n^2 \underset{+\infty}{\sim} \frac{\pi}{2(n+1)}$ d'où

$$W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(n+1)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$$