Chapitre 5
Polynômes

Le but de ce chapitre est de revoir les polynômes vu en BCPST1. Une nouveauté sera d'écrire les polynômes à l'aide de X, un certain polynôme.

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $f\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $g\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors on rappelle que l'on définit l'addition de fonctions, le produit de fonctions, la multiplication d'une fonction par un scalaire et la puissance d'une fonction par :

$$f+g\colon \begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(x)+g(x) \end{cases} \qquad f \times g\colon \begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto f(x) \times g(x) \end{cases} \qquad \lambda \cdot f\colon \begin{cases} \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \longmapsto \lambda \times f(x) \end{cases} \qquad f^n = \underbrace{f \times f \cdots \times f}_{n \text{ fois}}$$

Par convention, pour $n=0$, $f^n\colon x \mapsto 1$. On rappelle aussi que «$f=g$» équivaut à «pour tout $x \in \mathbb{K}$, $f(x)=g(x)$».

1 Définition et écriture d'un polynôme

Définition d'un polynôme

Soit $P\colon \mathbb{K} \to \mathbb{K}$. On dit que P est un **polynôme réel** si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et **polynôme complexe** si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P\colon x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$. Les scalaires a_k sont appelés **coefficients** du polynôme P.

Remarques 1.
- Si tous les coefficients d'un polynôme sont nuls, on dit que c'est le **polynôme nul**, noté 0.
- On décide de noter $X\colon x \mapsto x$, c'est bien un polynôme : il suffit de poser $n=1$, $a_0=0$ et $a_1=1$.
- Le n dépend du polynôme. Si $Q\colon x \mapsto 2+3x$, alors on peut poser $n=1$, $a_1=2$ et $a_2=3$, mais comme $Q\colon x \mapsto 2+3x+0x^2+0x^3$, ce n n'est pas unique, on peut aussi poser $m=3$ et $a_0=2$, $a_1=3$, $a_2=a_4=0$.
  Dans l'écriture du polynôme $P\colon x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$, on peut remplacer n par m avec $m>n$ et poser $a_k=0$ pour $k>n$.

Proposition n° 1 : écriture d'un polynôme quelconque à l'aide du polynôme *X*

Soit $P\colon x \mapsto \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme, on a alors l'égalité suivante : $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Définition des ensembles $\mathbb{K}[X]$

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels et $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes complexes.

Proposition n° 2 : unicité de l'écriture d'un polynôme

Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, (quitte à rajouter des coefficients nuls, on suppose $n=m$).

1. P est le polynôme nul ssi pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x)=0$.
2. Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $a_k=b_k$ ssi $P=Q$.

2 Degré et opérations des polynômes

Définition du degré d'un polynôme, du coefficient dominant, d'un polynôme unitaire

- Soit $P = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul. Notons $d = \max\{k \in [\![0\,;n]\!] \mid a_k \neq 0\}$, de sorte que $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$ et $a_d \neq 0$. L'entier d est appelé **degré** de P et est noté $d^\circ P = d$.
- On pose, par convention, $d^\circ 0 = -\infty$.
- On appelle **coefficient dominant** de P le coefficient a_d. On dit que P est **unitaire** si $a_d=1$.
- On dit que P est un **polynôme constant** si $d^\circ P \leqslant 0$, dans ce cas, $P=a_0$.
- Les polynômes λX^n, avec $\lambda \neq 0$, sont appelés **monômes**.
- On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont le de degré est inférieur ou égale à n.

Exemples 1. $d^\circ 0 =$ $\qquad d^\circ 3 =$ $\qquad d^\circ X + 2 =$ $\qquad d^\circ X^n =$ $\qquad d^\circ(aX^2 + bX + c) =$

Attention à ne pas confondre degré n et somme dont le dernier terme est X^n

L'écriture $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ n'implique pas $d^\circ P = n$ seulement que $d^\circ P \leqslant n$. De plus, $a_n \neq 0$ ssi $d^\circ P = n$.

Exemples 2. Si $P = 2X^2 + 3X$, $Q = X^3 - 2X$ et $R = -2X^2 + 2$, calculer $P + Q$, $P + R$, $P \times Q$ et $P \circ Q$.

Proposition n° 3 : formules pour les opérations sur les polynômes

Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $\tilde{P} = \sum_{k=0}^{p} \tilde{a}_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $P + Q$, λP, $P \times Q$ et $P \circ Q = P(Q)$ sont encore des polynômes donnés par les formules suivantes :

1. $P + \tilde{P} = \sum_{k=0}^{p} (a_k + \tilde{a}_k) X^k$
2. $\lambda P = \sum_{k=0}^{p} (\lambda a_k) X^k$
3. $P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^k$
4. $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^k$

Remarques 2.
- Pour la somme de deux polynômes, on a pris les mêmes bornes (quitte à rajouter des zéros).
- En revanche, ce n'est pas nécessaire pour le produit de deux polynômes.
- Attention : $P(X+1)$, $P(X)$ et $P(X-1)$ désignent souvent des composées (et non des produits) de P respectivement avec $X + 1$, X et $X - 1$, de plus, $P \circ X = P(X) = X$.

Proposition n° 4 : propriétés des opérations sur les polynômes

Soient $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$, alors :

1. $P + Q = Q + P$ (commutativité)
2. $P \times Q = Q \times P$ (commutativité)
3. $(P + Q) + R = P + (Q + R)$ (associativité)
4. $(P \times Q) \times R = P \times (Q \times R)$ (associativité)
5. $0 + P = P$ (0 neutre de l'addition)
6. $1 \times P = P$ (1 neutre de la multiplication)
7. $P + (-1) \times P = 0$ (existence de l'opposé)
8. $P \times (Q + R) = P \times Q + P \times R$ (distributivité)
9. $(P + Q)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^k Q^{n-k}$ (binôme de Newton)
10. $P^n - Q^n = (P - Q) \sum_{k=0}^{n-1} P^k Q^{n-1-k}$

Exemple 3. Grâce à $(1 + X)^{2n}$, démontrer que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exemples 4. Si $P = 2X^2 + 3X$, $Q = X^3 - 2X$ et $R = -2X^2 + 2$, que valent les degrés de $P + Q$, $P + R$, PQ et $P \circ Q$?

Proposition n° 5 : propriétés sur le degré et intégrité

Soient $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$, alors :

1. $d^\circ(P + Q) \leqslant \max(d^\circ P, d^\circ Q)$
2. Si $d^\circ P \neq d^\circ Q$, alors $d^\circ(P + Q) = \max(d^\circ P, d^\circ Q)$
3. $d^\circ(PQ) = d^\circ P + d^\circ Q$
4. Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$ alors $d^\circ(\lambda P) = d^\circ P$
5. Si Q non constant, $d^\circ(P \circ Q) = d^\circ P \times d^\circ Q$
6. Si $PQ = 0$, alors $P = 0$ ou $Q = 0$ (intégrité)

Péril imminent au degré de la somme

En général, le degré de la somme n'est pas égale à la somme des degrés ni au maximum des degrés.

3 Racines et factorisation de polynômes

Définition d'une racine d'un polynôme

Soient P un polynôme et $x \in \mathbb{K}$, on dit que x est une **racine** de P si $P(x) = 0$.

Exemple 5. Est-ce que 0, 1 et 2 sont racines de $P = X^3 + X^2 - X - 1$?

Attention X et x ce n'est pas la même chose !

Chercher les racines de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, c'est résoudre l'équation $P(x) = 0$. Ce n'est pas la même chose que résoudre l'équation $P(X) = 0$: $P(X) = 0$ ssi pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $a_k = 0$ d'après la proposition 2.

Proposition n° 6 : caractérisation des racines par la factorisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_r) \in \mathbb{K}^r$ avec les x_i deux à deux distincts.

1. Le polynôme P admet a comme racine si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)Q$.
2. Le polynôme P admet $x_1, x_2, \ldots, x_r$ comme racines ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \left(\prod_{i=1}^{r} (X - x_i)\right) Q$

Proposition n° 7 : le conjugué d'une racine d'un polynôme à coefficients réels est encore racine

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ une racine de P, alors $\overline{z}$ est aussi racine de P.

Exemples 6.

1. Si $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif, quelles sont ses racines ?
2. Quelles sont les racines de $Q = X^2 - (2 + \mathrm{i})X + 2\mathrm{i}$?

Proposition n° 8 : un polynôme non nul admet un nombre fini de racines majoré par son degré

1. Si $P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$, P a au plus $d^\circ P$ racines.
2. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ a au moins $n+1$ racines, alors $P = 0$.
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ a une infinité de racines, alors $P = 0$.

Définition de la multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul. On dit que la **multiplicité** (ou d'**ordre**) de $a \in \mathbb{K}$ dans P vaut $m \in \mathbb{N}$ s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$.

Remarques 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul.

1. Si $m = 0$, alors a n'est pas racine de P.
2. Si $m = 1$, on dit que a est une racine **simple** de P.
3. Si $m = 2$, on dit que a est une racine **double** de P.
4. Si $P = (X - a)^m Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, la multiplicité de a est supérieure ou égale à m.

Exemple 7. Donner le degré, le coefficient dominant, les racines et leur multiplicités de $P = 3(X - 1)^4(X - 2)^2$.

Théorème n° 1 de d'Alembert-Gauss (théorème fondamental de l'algèbre) *(admis)*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, alors P admet au moins une racine complexe.

Exemple 8. Quelles sont les racines complexes/réelles de $X^2 + 1$?

Théorème n° 2 : factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est non constant, alors il se factorise $P = \lambda \prod_{i=1}^{r} (X - z_i)^{m_i}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^\star$, m_i des entiers naturels non nuls et les z_i des complexes deux à deux distincts. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près : λ est le coefficient dominant, les z_i sont exactement les racines de P et m_i est la multiplicité de z_i.

Racines n-ièmes et factorisation du polynôme $X^n - 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P = X^n - 1$

1. Démontrer que $w_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}$, pour $k \in \mathbb{Z}$, est une racine de P.
2. Démontrer que les nombres complexes w_k, pour $k \in [\![0\,; n-1]\!]$, sont deux à deux distincts.
3. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Remarque 4. Un polynôme à coefficients complexes de degré n a donc toujours exactement n racines complexes comptées avec multiplicité contrairement au nombre de racines réelles d'un polynôme à coefficients réels. Ainsi, les réels sont plus complexes que les complexes...

Exemple 9. Combien $P = (X^2 + 1)(X^2 - 6X + 9)$ admet-il de racines réelles ? complexes ?

4 Dérivée d'un polynôme (pas vraiment au programme)

Remarque 5. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Par somme de fonctions dérivables, $P\colon x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $P'\colon x \mapsto 0 + \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} x^j$, ainsi P' est un polynôme et $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. Or, vous savez dériver des fonctions dont la variable est réelle mais pas complexe. La définition suivante va généraliser par métonymie :

Définition de la dérivée formelle d'un polynôme

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on définit le polynôme dérivé de P par $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} X^j \in \mathbb{C}[X]$.

Proposition n° 9 : propriétés de la dérivation de polynômes

Soient $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors :

1. $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$
2. $(PQ)' = P'Q + PQ'$

Proposition n° 10 : caractérisation d'une racine non simple à l'aide de la dérivée

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{C}$.
La multiplicité de α dans P est supérieure ou égale à 2 si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.
Le nombre α est racine simple de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$.