

Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9. 1. $\binom{n+m}{\ell}$ désigne le nombre de parties de $\llbracket 1; n+m \rrbracket$ ayant ℓ éléments. Or une telle partie notée E est entièrement déterminé par un unique triplet (i, A, B) où $i \in \llbracket 0; \ell \rrbracket$, A une partie de $\llbracket 1; n \rrbracket$ à i éléments et B une partie de $\llbracket \ell+1; n+m \rrbracket$ ayant $\ell-i$ éléments. En effet, $i = \text{Card}(E \cap \llbracket 1; n \rrbracket)$, $A = E \cap \llbracket 1; n \rrbracket$ et $B = E \cap \llbracket n+1; n+m \rrbracket$. Or, à $i \in \llbracket 0; \ell \rrbracket$ fixé, il y a $\binom{n}{i}$ choix pour A , il y a $\binom{m}{\ell-i}$ choix pour B , par principe multiplicatif, il y a $\binom{n}{i} \times \binom{m}{\ell-i}$ choix pour A et B , en sommant sur tous les $i \in \llbracket 0; \ell \rrbracket$, on obtient que le nombre de parties de $\llbracket 1; n+m \rrbracket$ ayant ℓ éléments vaut $\sum_{i=0}^{\ell} \binom{n}{i} \binom{m}{\ell-i}$. Mais

comme ce nombre vaut aussi $\binom{n+m}{\ell}$, on en déduit que $\binom{n+m}{\ell} = \sum_{i=0}^{\ell} \binom{n}{i} \binom{m}{\ell-i}$.

2. $X(\Omega) = \llbracket 0; n \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \llbracket 0; m \rrbracket$, par somme, $(X+Y)(\Omega) \subset \llbracket 0; n+m \rrbracket$. Soit $k \in \llbracket 0; n+m \rrbracket$, alors $(X+Y=k) = \bigcup_{i=0}^k ((X=i) \cap (Y=k-i))$. Or, les événements $(X=i) \cap (Y=k-i)$, pour $i \in \llbracket 0; k \rrbracket$, sont deux à deux incompatibles, on en déduit que $\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{i=0}^k \mathbb{P}((X=i) \cap (Y=k-i))$. Or, comme X et Y sont indépendantes, on en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X+Y=k) &= \sum_{i=0}^k \mathbb{P}(X=i) \mathbb{P}(Y=k-i) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} (1-p)^{m-(k-i)} \\ &= \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} p^k (1-p)^{n+m-k} = p^k (1-p)^{n+m-k} \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \\ &= p^k (1-p)^{n+m-k} \binom{n+m}{k} \end{aligned}$$

(où on a utilisé le résultat de la question 1 lors de la dernière égalité) Ainsi, $X+Y$ suit une loi binomiale de paramètre $(n+m, p)$.

3. Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$: «Si pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_i \sim \mathcal{B}(m_i, p)$ avec $m_i \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \dots, X_n$ indépendantes, alors $\sum_{k=1}^n X_k \sim \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n m_i, p\right)$ ». Pour $n=1$, on considère $X_1 \sim \mathcal{B}(m_1, p)$, alors $\sum_{k=1}^1 X_k = X_1 \sim \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^1 m_i, p\right)$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie. D'après le résultat de la question 2, $\mathcal{P}(2)$ est vraie. Soit un entier $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_{n+1})$ une famille de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $i \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket$, $X_i \sim \mathcal{B}(m_i, p)$ avec $m_i \in \mathbb{N}^*$. Alors en tant que sous-famille $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une famille de variables aléatoires indépendantes, ainsi en utilisant $\mathcal{P}(n)$, $\sum_{k=1}^n X_k$ suit une loi binomiale de paramètre $(\sum_{k=1}^n m_k, p)$. De plus, $\sum_{k=1}^n X_k$ et X_{n+1} sont indépendantes d'après le lemme des coalitions, ainsi, d'après le résultat de la question 2, $\sum_{k=1}^n X_k + X_{n+1}$ suit une loi binomiale de paramètre $(\sum_{k=1}^n m_k + m_{n+1}, p)$. On a donc montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

4. Comme $X_1, \dots, X_{n+m}$ sont indépendantes, en tant que sous-famille, $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, ainsi X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) , de même, Y suit une loi binomiale de paramètre (m, p) , $X + Y = \sum_{i=1}^{n+m} X_i$ suit une loi binomiale de paramètre $(n + m, p)$, par le lemme des coalitions, X et Y sont indépendantes. On a donc montré que la loi de la somme de deux variables binomiales de paramètres (n, p) et (m, p) est une loi binomiale de paramètre $(n + m, p)$.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12.

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15.