

Forme algébrique et trigonométrie

Exercice 1 (★ Cal). Soient $z_1 = 1 + i$, $z_2 = \sqrt{3} + i$ et $z_3 = \frac{z_1}{z_2}$.

1. Donner la forme algébrique de z_3 .
2. Calculer le module et un argument de z_1 et de z_2 .
3. En déduire le module et un argument de z_3 puis la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 2 (★ Cal). Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $a \in]-1; 1[$, $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la forme algébrique de :

- | | |
|----------------------------------|--|
| 1. $z_1 = (1 - 2i)e^{-i\theta}$ | 2. $z_2 = \frac{e^{i2\theta}}{1 - i}$ |
| 3. $z_3 = (\sqrt{3} - i)^{2025}$ | 4. $z_4 = \frac{1 + i \tan \theta}{1 - i \tan \theta}$, $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ |
| 5. $z_5 = (1 + e^{i\theta})^n$ | 6. $z_6 = \frac{1}{1 - ae^{i\theta}}$ |

Exercice 3 (★ Cal, Rai ©). Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}$, on pose $f(z) = \frac{1 + iz}{1 - iz}$.

1. Déterminer les z tels que
 1. $f(z) \in \mathbb{R}$
 2. $f(z) \in i\mathbb{R}$
 3. $|f(z)| = 1$
2. Interpréter géométriquement les ensembles ci-dessus.

Exercice 4 (★ Cal). Soient trois nombres complexes : $z_1 = -3 + i\sqrt{3}$, $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$ et $z_3 = \sqrt{8} - i\sqrt{8}$. On pose $Z = \frac{z_1^3 z_3^4}{z_2^6}$.

1. Écrire z_1 , z_2 et z_3 sous forme trigonométrique.
2. En déduire une forme trigonométrique de Z .
3. Calculer la forme algébrique de Z .

Exercice 5 (★ Rai). Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le complexe $\left(\frac{(\sqrt{3} - i)^7}{(1 - i)^5}\right)^n$ est-il un réel positif ?

Exercice 6 (★★ Cal, Rai ©). Trouver les modules et arguments de (préciser les conditions pour $\theta \in \mathbb{R}$)

- | | |
|--|----------------------------|
| 1. $z = e^{i\theta} + e^{i3\theta}$ | 2. $z = (1 + i)^n$ |
| 3. $z = 1 - e^{i\theta}$ | 4. $z = 1 + i \tan \theta$ |
| 5. $z = \frac{1 + \cos \theta + i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta}$ | 6. $z = e^{e^{i\theta}}$ |

Exercice 7 (★★ Rai ©). Montrer que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\arctan(\alpha)$ est un argument de $1 + i\alpha$.

Exercice 8 (★ Cal ©). Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, $|a|^2 + |b|^2 = \frac{1}{2}(|a - b|^2 + |a + b|^2)$.

Exercice 9 (♠★★ Rai, Rec ©). 1. Soit $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, montrer que $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.

2. Montrer que l'inégalité précédente est une égalité si et seulement si $\exists i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}^+)^n \quad \forall j \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad z_j = \lambda_j z_i$
3. Interpréter graphiquement cette condition.

Exercice 10 (★ Rai ©). On dit que $n \in \mathbb{N}$ est somme de deux carrés si :

$$\exists (a, b) \in \mathbb{N}^2 \quad n = a^2 + b^2$$

Soit n_1 et n_2 deux entiers qui sont sommes de deux carrés : $n_1 = a^2 + b^2$ et $n_2 = c^2 + d^2$. Posons $z_1 = a + ib$, $z_2 = c + id$. Comment écrire n_1 et n_2 en fonction de z_1 et z_2 ? Démontrer $n_1 n_2$ est somme de deux carrés.

Exercice 11 (★★ Rai, Rec ©). Trouver toutes les fonctions $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z + z') = f(z) + f(z')$ et $f(zz') = f(z)f(z')$.

Exercice 12 (★ Cal ©). Démontrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $|e^{it} - 1| \leq |t|$.

Trigonométrie

Exercice 13 (★ Cal). Résoudre les équations ou les inéquations suivantes :

- | | |
|---|--------------------------------------|
| 1. $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 2. $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 3. $\begin{cases} \sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$ | 4. $\cos^4(x) + \sin^4(x) = 1$ |

Exercice 14 (★ Cal). Linéariser $\cos^3(\theta)$, $\sin^2(\theta) \cos^2(\theta)$ et $\sin^4(\theta)$, $\cos^4(\theta)$.

Exercice 15 (★ Cal). Exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de puissances de $\cos(\theta)$ et de $\sin(\theta)$.

Exercice 16 (★ Cal). Déterminer une primitive de $x \mapsto \sin^5(x)$.

Exercice 17 (★ Cal). 1. Écrire $\sqrt{3}\cos(x) + \sin(x)$ sous la forme $A\cos(x - \varphi)$.

2. Résoudre $\sin(x) + \cos(x) = 0$

3. Résoudre l'inéquation $\cos(x) - \sqrt{3}\sin(x) < 1$

Exercice 18 (♣★ Cal). Soit $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, calculer $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta + \varphi)$

Équations algébriques

Exercice 19 (♣★ Cal ©). 1. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, montrer que 1, j et j^2 sont les trois racines de $X^3 - 1$.

2. Calculer $\bar{j}$, $1 \times j \times j^2$, $1 + j + j^2$ et $j(j + 1)$.

Exercice 20 (★ Cal). Déterminer les racines carrées de $1 + 6i$, $24i - 7$ et de $-5 + 12i$. En déduire la factorisation de $X^2 + 5 - 12i$.

Exercice 21 (★★ Cal, Rec ©). Dans cet exercice, on note $w = e^{i\frac{2\pi}{5}}$.

1. Calculer w^5 , $1 + w + w^2 + w^3 + w^4$, $a = w + w^4$ et $b = w^2 + w^3$ sous forme algébrique.

2. Calculer explicitement $a + b$ et ab . De quelle équation les complexes a et b sont-ils solutions ?

3. Résoudre cette équation.

4. En déduire $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ puis $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Exercice 22 (★★ Rec, Rai, Cal). Déterminer les racines de $X^3 - (4i + 2)X^2 + (6i - 4)X + 4$, Commencer à chercher une racine imaginaire pure.

Exercice 23 (★ Cal, Rai ©). Résoudre, dans $\mathbb{C}$, $\begin{cases} z + z' = 5 + 2i \\ zz' = 5 + 5i \end{cases}$.

Exercice 24 (★★★ Rai, Rec). Posons $\omega = \frac{4 + 3i}{5}$. Montrer que $|\omega| = 1$,

que $\omega^n = \frac{a_n + ib_n}{5^n}$, avec a_n et b_n deux entiers définis par récurrence. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\omega^n \neq 1$.

Polynômes, Degré

Exercice 25 (★ Cal, Rai ©). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $aX^{n+1} + bX^n + 1 = (X - 2)^2Q$.

Exercice 26 (♣★ Cal, Rai, Rec ©). Soit $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

1. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ $X^a - 1 = (X - 1)Q$

2. Montrer que si $a = bq$ avec $q \in \mathbb{N}$, alors, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $X^a - 1 = (X^b - 1) \times Q$.

Exercice 27 (★ Rai ©). Déterminer tous les couples $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tels que $Q^2 = XP^2$.

Exercice 28 (★ Rai). Démontrer qu'il existe un unique $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = 2n^2 - 3n + 8$.

Exercice 29 (★★ Rai). Est-ce qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(n) = 1/n$?

Exercice 30 (★ Rai ©). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P \circ P = P$.

Exercice 31 (★★★ Rai, Rec). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels qu'il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = QP'$

Exercice 32 (★ Rai). Soit $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ et $\ell \in \llbracket 0; n + m \rrbracket$, à l'aide du polynôme $(1 + X)^{n+m}$, démontrer que $\binom{n+m}{\ell} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{m}{\ell-i}$.

Racines et factorisation d'un polynôme

Exercice 33 (♣★ Rai, Com). 1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme non constant, donner un équivalent de $P(x)$ quand $x \rightarrow +\infty$ puis un quand $x \rightarrow -\infty$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré impair, démontrer que P admet au moins une racine réelle.

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donner un exemple de polynôme de degré $2n$ n'ayant pas de racines réelles.

- Exercice 34** (★★ Cal, Rai). 1. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{C}[X]$ avec $a \neq 0$, en utilisant la forme factorisée de P , déterminer une expression du produit et de la somme des deux racines complexes (éventuellement égales) en fonctions de a , b et c .
2. Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in \mathbb{C}[X]$ avec $a \neq 0$, en utilisant la forme factorisée de P , déterminer une expression du produit et de la somme des trois racines complexes en fonctions de a , b et d .
3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n , donner sans preuve, l'expression du produit et de la somme des n racines complexes comptées avec multiplicité.

On pourra librement utiliser le résultat de l'exercice 34 dans la suite.

Exercice 35 (★ Rai). Trouver le ou les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré 3 tel que 1 est racine simple, -2 racine double et $P(3) = 8$.

Exercice 36 (★ Cal, cou). Soit $P = 2X^3 - 16X^2 + 46X - 56$. On note x_1 , x_2 et x_3 les racines complexes de P . Déterminer les trois racines de P sachant que la somme de deux des racines est égale à la troisième.

Exercice 37 (★ Rai ©). Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $d^\circ P \geq 1$. Démontrer que $P: \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto P(x) \end{cases}$ est surjective.

Exercice 38 (★ Rai). Déterminer les $a \in \mathbb{C}$ tels que $P = X^3 - X^2 + a$ ait une racine double.

Exercice 39 (★ Rai ©). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}_4[X]$ tels que $P(0)^2 + P(-3)^2 + P(5)^4 + P(-\pi)^6 + P(42)^{42} = 0$.

Exercice 40 (★★ Rec ©). Soit $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$.

- Si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = Q(n)$, montrer que $P = Q$.
- Si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\sin(x)) = Q(\sin(x))$, montrer que $P = Q$.
- Si $x \mapsto P(x)$ est périodique, montrer que P est constant.

Exercice 41 (★★ Rai, Rec ©). Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$.

Exercice 42 (★ Rai ©). Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que les racines complexes de P_n sont simples.

- Exercice 43** (★ Cal ©). 1. Démontrer qu'il existe un unique triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$, $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$.
2. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ converge et calculer sa somme.
3. En déduire également une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Problèmes

Exercice 44 (§★★ Rai, Rec). Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [-1; 1]$ on pose $f_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

- Rappeler tout ce que vous savez sur la fonction arccos.
- Pour $x \in [-1; 1]$, exprimer $f_{n+1}(x) + f_{n-1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.
- Montrer qu'il existe un unique polynôme T_n telle que pour tout $x \in [-1; 1]$, $T_n(x) = f_n(x)$.
- Calculer f_0 , f_1 , f_2 et f_3 . Que valent T_0 , T_1 , T_2 et T_3 ?
- Déterminer la valeur de T_n , le degré de T_n , son coefficient dominant et les racines de T_n .

Exercice 45 (★★ Rai, Rec ©). Soit $a \in \mathbb{N}$ et $P_a = X^3 - X(a^2 + 2a) + 2$. On cherche a tel que P_a possède trois racines dans $\mathbb{Z}$. On suppose que a existe. Soient r_1 , r_2 et r_3 les 3 racines de P_a avec $r_1 \leq r_2 \leq r_3$.

- Que valent $r_1 + r_2 + r_3$ et $r_1 r_2 r_3$?
- Montrer que $r_1 < 0$.
- En déduire que $r_1 < 0 < r_2 \leq r_3$ puis les valeurs de r_1 , r_2 , et r_3 .
- Donner la valeur de $P_a'(r_2)$. En déduire la valeur de a .
- Réciproquement, montrer que la valeur de a trouvée convient.

Exercice 46 (★ ★ ★ Rai, Rec ©). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = \frac{1}{2i} [(X+i)^n - (X-i)^n]$.

1. Calculer P_1 , P_2 et P_3
2. Montrer que $P_n \in \mathbb{R}[X]$.
3. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n .
4. La fonction P_n est-elle paire ? impaire ?
5. Trouver les racines de P_n (on utilisera la fonction $\cotan = \frac{\cos}{\sin}$) (on pourra librement utiliser le résultat de l'exercice du cours sur les racines de $X^n - 1$).
6. En déduire la factorisation de P_n en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.
7. Soit $S \in \mathbb{R}[X]$, montrer que la fonction S est paire si et seulement si on peut décomposer S comme $S = \sum_{k=0}^N a_k X^{2k}$ avec $N \in \mathbb{N}$ et a_k des réels.
8. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, il existe $R_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_{2n+1} = R_n(X^2)$.
9. Déterminer $d = d^\circ R_n$ et les coefficients de R_n devant X^d et devant X^{d-1} ?
10. Déterminer les racines de R_n . Factoriser R_n dans $\mathbb{R}_n[X]$.
11. En déduire que $\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$
12. Montrer, grâce à une étude de fonctions, que pour tout $\theta \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$,
 $0 < \sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta)$

On pose pour $k \in \mathbb{N}$, $\theta_k = \frac{k\pi}{2n+1}$ et

13. En déduire que pour tout $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$\cotan^2(\theta_p) \leq \frac{1}{\theta_p^2} \leq 1 + \cotan^2(\theta_p)$$

14. Encadrer $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$, en déduire la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.