

Indication pour l'exercice 1. 1. Multiplier en haut et en bas par le conjugué de z_2 .

2. Pour trouver un argument factoriser z_1 par $|z_1|$ idem pour z_2 .

3. Le module du quotient est le quotient des modules, un argument du quotient est la différence des arguments. Pour la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ utiliser l'unicité de l'écriture algébrique.

Indication pour l'exercice 2. 1.

2. Conjugué du dénominateur

3. Mettre $\sqrt{3} - i$ sous forme exponentielle permet de plus facilement calculer la puissance.

4. Multiplier par $\cos(\theta)$.

5. Angle moitié

6. Conjugué du dénominateur

Indication pour l'exercice 3.

Indication pour l'exercice 4.

Indication pour l'exercice 5. Utiliser la forme exponentielle pour déterminer quand l'argument est nul (modulo 2π).

Indication pour l'exercice 6.

Indication pour l'exercice 7.

Indication pour l'exercice 8.

Indication pour l'exercice 9. 1. Récurrence

2. Par l'absurde si z_i et z_j ne sont pas positivement liés et $z_i \neq 0$, alors $|z_i + z_j| < |z_i| + |z_j|$ Dans ce cas montrer que $\left|\sum_{k=1}^n z_k\right| < \sum_{k=1}^n |z_k|$.

3.

Indication pour l'exercice 10. Penser au module au carrée.

Indication pour l'exercice 11. Analyse-Synthèse

Indication pour l'exercice 12.

Indication pour l'exercice 13.

Indication pour l'exercice 14. Euler

Indication pour l'exercice 15.

Indication pour l'exercice 16. Linéariser grâce à Euler puis Newton.

Indication pour l'exercice 17.

Indication pour l'exercice 18.

Indication pour l'exercice 19.

Indication pour l'exercice 20.

Indication pour l'exercice 21.

Indication pour l'exercice 22. Remplacer z par bi avec $b \in \mathbb{R}$ et séparer la partie réelle de la partie imaginaire dans l'équation.

Indication pour l'exercice 23. Considérer le polynôme $P = (X - z)(X - z')$

Indication pour l'exercice 24.

Indication pour l'exercice 25. Une telle factorisation est possible ssi 2 est racine multiple.

Indication pour l'exercice 26. Penser à la factorisation de $P^n - Q^n$.

Indication pour l'exercice 27. Analyse synthèse : considérer une telle solution et utiliser les degrés.

Indication pour l'exercice 28.

Indication pour l'exercice 29. Raisonner par l'absurde, puis étudier les racines de $XP - 1$.

Indication pour l'exercice 30. Analyse-synthèse puis utiliser les degrés.

Indication pour l'exercice 31.

Indication pour l'exercice 32. Développer le polynôme par le binôme de Newton puis faire de même pour $(1 + X)^n$ et $(1 + X)^m$ avant de faire le produit, conclure par l'unicité des coefficients.

Indication pour l'exercice 33. 1. Justifier que l'équivalent est le terme de plus haut degré.

2. En déduire les limites de P en $+\infty$ et en $-\infty$ (on pourra supposer que le coefficient dominant est strictement positif), en déduire qu'il existe $(A, B) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P(A) \geq 0$ et $P(B) \leq 0$ puis utiliser le TVI.

3. Commencer par $n = 1$.

Indication pour l'exercice 34. À chaque fois partir de la forme factorisée et développer-là.

Indication pour l'exercice 35. Factoriser P .

Indication pour l'exercice 36. Utiliser la somme et le produit des racines et utiliser le résultat de l'exercice ??.

Indication pour l'exercice 37. Démontrer qu'un élément admet un antécédent, c'est justifier qu'une certaine équation admet une solution, penser donc à d'Alembert-Gauss.

Indication pour l'exercice 38. Utiliser la caractérisation des racines multiples à l'aide de la dérivée.

Indication pour l'exercice 39. Que dire si on a une somme de termes positifs qui est nulle.

Indication pour l'exercice 40. En déduire un certain polynôme avec une infinité de racines

Indication pour l'exercice 41. Partir du principe que P est solution et essayer de remplacer X par des valeurs amenant des informations.

Indication pour l'exercice 42. Supposer qu'il y a une racine multiple qui est donc racine de P_n et P_n' .

Indication pour l'exercice 43. 1. Travailler par équivalence partant de l'équation de départ et multiplier par le dénominateur, on obtient un système à résoudre.

2. Utiliser ce qui précède et reconnaître des sommes télescopiques.

3. Chacun des membres se primitivent très bien.

Indication pour l'exercice 44. 1. Rappeler la définition de arccos, son ensemble de définition, son image, où elle est continue, où elle est dérivable avec quelle dérivée, donner la relation $\arccos(x) + \arcsin(x)$, ainsi que quelques valeurs de arccos.

2. Utiliser $\cos(a \pm b)$.

3. Récurrence double pour l'existence. Pour l'unicité considérer deux tels polynômes et considérer la différence des deux.

4. Pour $n = 2$ et $n = 3$, on pourra utiliser la formule d'Euler.

5. Récurrence double.

6.

Indication pour l'exercice 45.

Indication pour l'exercice 46. 1.

2. Développer P_n

3. Utiliser le développement de P_n à la question précédente.

4. Calculer $P_n(-x)$

5. Chercher z tel que $(z + i)^n - (z - i)^n = 0$, on veillera à éviter les divisions par 0.

6. Ne pas oublier le coefficient dominant.

7. Si un polynôme à une infinité de racines, c'est le polynôme nul.

8. Utiliser la question précédente.

9.

10.

11. Que vaut la somme des racines d'un polynôme ?

12.

13.

14.