○ Chapitre 6

Espaces vectoriels

Objectifs:

Définir la notion d'espaces vectoriels. À la façon de monsieur Jourdain, vous utilisiez déjà des exemples espaces vectoriels sans le savoir. L'étude de la notion d'espace vectoriel permet d'étudier tous ces exemples en même temps.

Prérequis:

- Ensembles et applications
- Systèmes linéaires
- Matrices
- Polynômes

Table des matières

T	Definition des espaces vectoriels	2
2	Sous-espaces vectoriels	3
3	Combinaison linéaire, espace vectoriel engendré	4
4	Propriétés des familles finies d'un espace vectoriel 4.1 Famille libre	5
5	Construction de la théorie de la dimension finie	7
6	Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie 6.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel	8 8
7	Méthodes	9
8	Carte mentale pour étudier la liberté d'une famille	10

1 Définition des espaces vectoriels

Avant de donner la définition d'un espace vectoriel, regardons quelques exemples :

1. Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on les somme : $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. On multiplie aussi x par $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

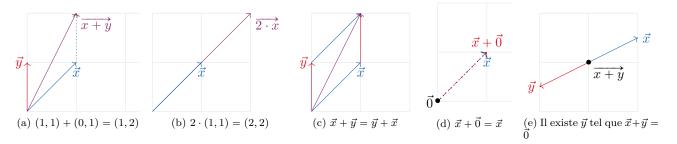


FIGURE 1 – Les vecteurs de \mathbb{R}^2 représentés avec des flèches. Et quelques propriétés sur les vecteurs.

- 2. De même, étant donnés deux polynômes P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on obtient $P + Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda P \in \mathbb{K}[X]$.
- 3. Soient deux fonctions $(f,g) \in (\mathbb{R}^I)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose f+g: $\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) + g(x) \end{cases} \in \mathbb{R}^I \text{ et } \lambda f \colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{cases} \in \mathbb{R}^I$
- 4. Soient $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque 1. Dans la suite, la notion d'espace vectoriel généralise ces exemples. Ainsi, \mathbb{R}^n , $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ etc. seront des espaces vectoriels, les éléments de ces ensembles seront appelés des vecteurs.



Définition d'un espace vectoriel

On appelle K-espace vectoriel un ensemble E muni de deux opérations + et \cdot vérifiant :

- 1. L'addition dite interne, pour tout $(x, y) \in E^2$ $x + y \in E$ vérifiant :
 - (a) $\forall (x,y) \in E^2$ x+y=y+x

(l'addition de vecteurs est commutative)

(b) $\forall (x, y, z) \in E^3$ (x + y) + z = x + (y + z)

(l'addition de vecteurs est associative)

(c) $\exists 0_E \in E \quad \forall x \in E \qquad x + 0_E = x$

(il existe un vecteur nul noté 0_E)

(d) $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x + y = 0_E$

(tout vecteur x admet un vecteur opposé y).

- 2. La multiplication dite externe, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $\lambda \cdot x \in E$, vérifiant :
 - (a) $\forall x \in E$ $1 \cdot x = x$

(multiplier un vecteur par 1 ne change pas le vecteur)

(b) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \qquad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$

(pseudo-associativité)

(c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \qquad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$

(pseudo-distributivité de · par rapport à +)

(d) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in E^2 \qquad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$

(distributivité de · par rapport +)

Les éléments de E sont alors appelés vecteurs de E, 0_E est appelé vecteur nul de E.

Remarque 2. Voilà une définition particulièrement rebutante. L'important est surtout de comprendre ce que ça veut dire. Que faites-vous avec des vecteurs? Les additionner ensemble, et les multiplier par un scalaire. Cette définition n'est que la formalisation de cette idée avec tout un tas d'exigences raisonnables, par exemple :

- Le point 1a exige seulement que lorsqu'on ajoute deux vecteurs l'ordre n'intervient pas.
- Le point 1c exige juste qu'il existe un vecteur nul.

Les ensembles suivants sont des K-espaces vectoriels :

- I. \mathbb{K}^n (i.e. \mathbb{R}^n est un \mathbb{R} -espace vectoriel et \mathbb{C}^n est un \mathbb{C} -espace vectoriel)
- II. $\mathbb{K}[X]$
- III. $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (l'ensemble des matrices de n lignes et p colonnes à coefficients dans \mathbb{K})
- IV. $\mathbb{K}^I = \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ où I est un ensemble non vide

(l'ensemble des applications de I dans \mathbb{K})

Remarques 3. • Les vecteurs peuvent donc être des polynômes, des matrices, des suites, des fonctions etc.

• «Faut-il appliquer cette définition à chaque fois pour montrer qu'un machin est un espace vectoriel?» Non, on ne l'utilisera quasiment jamais. Dans la pratique, on montre que des ensembles sont bien des espaces vectoriels en vérifiant quelque chose de bien plus simple que l'on va voir au plus vite.



Péril imminent : à l'impossible nul n'est tenu

Si on a deux vecteurs d'un espace vectoriel, on peut les additionner mais pas les multiplier entre eux.

À partir de maintenant E désignera toujours un \mathbb{K} -espace vectoriel.



Proposition n° 1: premières propriétés d'un espace vectoriel

- 1. On a unicité du vecteur 0_E au point 1c.
- 2. $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E) \iff \lambda \cdot x = 0_E$
- 3. Pour tout $x \in E$, on a unicité du vecteur y au point 1d, de plus $y = (-1) \cdot x$.

$\mathbf{2}$ Sous-espaces vectoriels



Définition d'un sous-espace vectoriel

Soit $F \subset E$, on dit que F est un sous-espace vectoriel de E si : $0_E \in F$, $\forall (x,y) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x + y \in F$



Proposition no 2: un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors F est lui-même un espace vectoriel.

Exemples 1. Montrer que F et F' sont des sous-espaces vectoriels de E dans les cas suivants :

- 1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ 2. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$ 3. E quelconque et $F = \{0_E\}$ et F' = E 4. $E = \mathbb{K}[X]$ et $F = \mathbb{K}_n[X]$

- 5. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et F l'ensemble des solutions de y'' + y = 0
- 6. $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

Exemples 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^2 ?

- 1. D: la droite passant par les points (1,2) et (0,1)
- 2. $F = \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Remarque 4. Soient F un SEV de E, $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in F^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in F$.



Proposition no 3: intersection de sous-espaces vectoriels

Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est alors un sous-espace vectoriel de E. De même, si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de SEVs de E, alors $\bigcap F_i$ est un SEV de E.

Exemple 3. On note $F = \{(x, y, y) \text{ tel que } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 , puis calculer leur intersection.



Attention l'union de deux SEV de E n'est pas, en général, un SEV de E.

Par exemple, $F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}, F \cup G$ est-il un SEV de \mathbb{R}^2 ?

3 Combinaison linéaire, espace vectoriel engendré



Définition d'une combinaison linéaire et de l'espace vectoriel engendré

Soit (e_1, e_2, \ldots, e_n) une famille finie de vecteurs de E.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on dit que $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ est une combinaison linéaire de la famille (e_1, e_2, \dots, e_n) .
- On appelle **espace vectoriel engendré** par (e_1, e_2, \ldots, e_n) l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de (e_1, e_2, \ldots, e_n) . On note vect (e_1, e_2, \ldots, e_n) cet ensemble :

$$\operatorname{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \left\{ x \in E \mid \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \ x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \text{ où } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

Remarques 5. • $\text{vect}(e_1, \dots, e_n)$ a été défini par compréhension et par paramétrage.

• $x \in \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$.

Exemples 4. • Dans $E = \mathbb{R}^3$, donner plusieurs combinaisons linéaires de u = (1, 2, 3) et v = (2, 2, 2).

- Si $e_1 \neq 0_E$, vect (e_1) est une droite vectorielle de E.
- Si e_1 et e_2 sont non nuls et que e_2 n'est pas colinéaire à e_1 , alors $\text{vect}(e_1, e_2)$ est un plan vectoriel.
- Pour $E = \mathbb{R}[X]$, déterminer vect(1, X).



Proposition nº 4 : l'espace engendré est un espace vectoriel

Soient (e_1, e_2, \dots, e_n) une famille finie de vecteurs de E et $F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

1. F est un SEV de E.

- 2. Pour tout $i \in [1; n], e_i \in F$.
- 3. F est le plus petit SEV de E (au sens de l'inclusion) à contenir tous les e_i pour $i \in [[1; n]]$: Si H est un sous-espace vectoriel qui contient tous les e_i , alors $F \subset H$.

Remarques 6. • Soit $i \in [1; p]$, si $e_i \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$, alors ce vecteur ne sert à rien dans l'espace vectoriel engendré : vect $(e_1, e_2, \dots, e_p) = \text{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$.

• Pour montrer que F est un SEV de E, il suffit de trouver des $e_i \in E$ tel que $F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Exemples 5. 1. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$.

2. Montrer que $F = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid y \text{ est deux fois dérivable et } y'' + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

4 Propriétés des familles finies d'un espace vectoriel

4.1 Famille libre

Remarque 7. Soit $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de E, si pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$.



Définition d'une famille libre

Soit $\mathcal{L} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille finie de E, on dit que la famille \mathcal{L} est **libre**, si il y a une seule façon d'écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire de vecteurs de \mathscr{L} . Autrement dit si

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [1; n] \quad \lambda_i = 0 \right)$$

Si \mathcal{L} est libre, on dit aussi que les vecteurs e_1, \ldots, e_n sont linéairement indépendants.

1. Soit u=(1,2,3) et v=(1,1,1) et w=(1,1,10), montrer que $\mathscr{F}=(u,v,w)$, est une famille libre de Exemples 6. \mathbb{R}^3 .

- 2. La famille (1,i) est-elle libre dans C vu comme un R-EV? Et vu comme C-EV?
- 3. La famille $\mathscr{F} = ((1,1,1),(1,0,0),(4,1,1))$ n'est pas libre.

1. On dit que \mathscr{F} est liée si elle n'est pas libre, c'est-à-dire ssi il existe $(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$ et $i_0 \in [[1;n]]$ tel que $\lambda_{i_0} \neq 0$ vérifiant $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$. En isolant e_{i_0} , on obtient

$$e_{i_0} = \sum_{\substack{i=1\\i\neq i_0}}^{n} \frac{-\lambda_i}{\lambda_{i_0}} e_i \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{i_0-1}, e_{i_0+1}, \dots, e_n)$$

Ainsi, \mathscr{F} est liée ssi il existe un vecteur de \mathscr{F} qui est une combinaison linéaire des autres vecteurs de \mathscr{F} .

- 2. Si $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et qu'il existe $i \in [1; n]$ tel que $e_i = 0_E$, alors la famille \mathscr{F} est liée.
- 3. Si (u) est une famille de un vecteur de E, alors (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
- 4. Si (u,v) est une famille de deux vecteurs de E, alors, (u,v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.



Attention cela ne se généralise pas à plus de deux vecteurs

Si pour tout $i \neq j$, e_i et e_j sont non colinéaires, cela n'implique pas forcément que $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre. En effet, la famille ((1,1,1),(1,0,0),(4,1,1)) est liée.

Remarque 9. Soit $\mathcal{L} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille. Alors, \mathcal{L} est libre si et seulement si pour tout $x \in \text{vect}(\mathcal{L})$, il existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$.

Exemple 7. Cela permet d'identifier : si $m\vec{a} = \vec{F}$ et $\vec{a} = a_x\vec{x} + a_y\vec{y}$, $\vec{F} = F_x\vec{x} + F_y\vec{y}$, alors $ma_x = F_x$ et $ma_y = F_y$.



Théorème n° 1 : famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre

Si \mathscr{L} est une famille finie de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés deux à deux distincts, alors \mathscr{L} est libre.

Famille génératrice



Définition d'une famille génératrice

Soit $\mathscr{G} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit \mathscr{G} est **génératrice** de E (ou **engendre** E) si

$$\forall x \in E$$
 $\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$

Exemples 8. 1. Montrer que $(1, X^2 + X, X + 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Est-elle libre?

- 2. Montrer que ((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)) est une famille génératrice de \mathbb{R}^3 . Est-elle libre?
- 3. Montrer que $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Est-elle libre?

Remarques 10. 1. La famille \mathscr{G} est une famille génératrice de E si et seulement si $E = \text{vect}(\mathscr{G})$.

2. La famille \mathscr{G} est nécessairement génératrice de $\text{vect}(\mathscr{G})$.

4.3 Bases



Définition d'une base

Soit \mathcal{B} une famille finie de E. On dit que \mathcal{B} est une base si \mathcal{B} est à la fois libre et génératrice de E.

Ainsi,
$$\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$$
 est une base de E ssi

$$\forall x \in E$$
 $\exists ! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$

On dit que les x_k sont les coordonnées de x dans la base \mathscr{B} .



Attention: il faut une famille finie

Au programme de BCPST, les familles libres, génératrices et les bases sont toujours des familles finies.



Exemple de bases importantes (à connaître)

- 1. $(1, X, ..., X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.
- 2. On pose, pour tout $i \in [[1;n]]$, $e_i = (0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$, alors (e_1,\ldots,e_n) est une base de \mathbb{K}^n , appelée base canonique de \mathbb{K}^n .
- 3. $(E_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (pas

Exemples 9. • Montrer que ((1,1,1),(1,0,0),(0,1,0)) est une base de \mathbb{R}^3 (mais n'est pas la base canonique de \mathbb{R}^3).

 \bullet Donner une base de $\mathbb C$ vu comme un $\mathbb R$ -espace vectoriel. Puis vu comme un $\mathbb C$ -espace vectoriel.



Définition de la matrice d'une famille de vecteurs dans une base

Soit $\mathscr{F}=(u_1,u_2,\ldots,u_q)\in E^q$. La matrice dont la j-ième colonne contient les coordonnées de u_j dans la base \mathscr{B} est appelée **matrice de la famille** \mathscr{F} dans la base \mathscr{B} : $\forall j\in \llbracket 1\,;q\,\rrbracket \quad \exists !(a_{1,j},\ldots,a_{n,j})\in \mathbb{K}^n \qquad u_j=\sum\limits_{i=1}^n a_{i,j}e_i.$

Exemples 10. • Pour $E = \mathbb{R}_3[X]$, \mathscr{B} la base canonique de E, que vaut $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(X^3 + 2, X^2 + 1, 4)$? Si $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que vaut \mathscr{F} ?

• Si $F = \mathbb{R}^2$ et \mathscr{C} la base canonique de F, que valent $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}\right)$ et $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C})$?

Construction de la théorie de la dimension finie 5

Remarque 11. La dimension ne peut pas être définie comme le nombre d'éléments de E, car E est un ensemble infini.

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie

On dit que E est un espace vectoriel de **dimension finie** si E possède une famille génératrice (finie). Sinon, on dit que E est un espace vectoriel de dimension infinie.

Exemple d'espaces vectoriels de dimension finie ou de dimension infinie

 \mathbb{K}^n , \mathbb{C} vu comme un \mathbb{C} -EV ou un \mathbb{R} -EV, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie, contrairement à $\mathbb{K}[X]$.



Théorème n° 2 de la base incomplète

(admis)

Soit E un \mathbb{K} -EV de dimension finie. Soit \mathscr{L} une famille libre de E, il existe \mathscr{B} base de E telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B}$.



Théorème n° 3 de la base extraite

(admis)

Soit E un K-EV de dimension finie. Soit \mathscr{G} une famille génératrice de E, il existe \mathscr{B} base de E telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$

Remarque 12. Grâce au théorème de la base incomplète ou à celui de la base extraite, un espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base mais il n'y a pas unicité des bases.



Théorème n° 4: toutes les bases ont le même cardinal

(admis)

Si E est un \mathbb{K} -EV de dimension finie, toutes les bases de E ont le même cardinal.



Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Soient E un K-EV de dimension finie et \mathcal{B} une base de E. On définit la **dimension** de E, par $\dim(E) = \operatorname{Card}(\mathcal{B})$.

Remarque 13. La dimension d'un espace vectoriel E s'interprète comme le nombre de degrés de liberté de E. Si $E = \{0_E\}$, on pose dim(E) = 0, si E n'est pas de dimension finie, on dit que la dimension de E est infinie.



Exemples de dimensions importantes à connaître

$$\dim(\mathbb{K}^n) =$$

$$\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) =$$

$$\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) =$$

$$\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) =$$

$$\dim(\mathbb{K}_n[X]) =$$



Attention à la dimension de deux espaces vectoriels

La dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est n^2 (et non n), de même attention à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 11. Soit $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 2x - t = 0 \end{cases} \right\}$. Déterminer une base de F et en déduire $\dim(F)$.



Proposition nº 5 : comparaison entre les cardinaux des familles libres, génératrices et des bases Soit E un K-EV de dimension fine. Si les familles \mathcal{L} , \mathcal{B} , \mathcal{G} sont respectivement libre, base, et génératrice alors

$$\operatorname{Card}(\mathcal{L}) \leqslant \operatorname{Card}(\mathcal{B}) \leqslant \operatorname{Card}(\mathcal{G})$$

Exemple 12. Si E est de dimension n, alors toute famille de n+1 vecteurs (ou plus) est liée.



Proposition nº 6 : caractérisation des bases avec le cardinal

Soient E un \mathbb{K} -EV de dimension finie, et \mathscr{F} une famille finie de vecteurs de E telle que $\operatorname{Card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$. Alors,

 \mathscr{F} est une base de E ssi \mathscr{F} est une famille génératrice de E ssi \mathscr{F} est une famille libre.

1. Montrer que $\mathscr{B} = ((1,1,0),(2,1,0),(5,1,1))$ est une base de \mathbb{R}^3 . Exemples 13.

- 2. Soit $\mathscr{F} = ((1,1,1),(2,1,3),(3,2,4),(-1,0,3))$, extraire de cette famille une base de \mathbb{R}^3 .
- 3. Soit $\mathscr{L} = \begin{pmatrix} I_2, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$, compléter cette famille libre en une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
- 4. Si $\mathscr{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ telle que pour tout $i \in [0, n]$, $d^{\circ}P_i = i$, alors \mathscr{F} est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie 6

6.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel



Proposition no 7: dimension d'un sous-espace vectoriel

(admise)

Soient E un EV de dimension finie et F un SEV de E, alors :

- 1. F est de dimension finie
- 2. $\dim(F) \leq \dim(E)$
- 3. $E = F \iff \dim(E) = \dim(F)$



• Exemples de sous-espaces particuliers

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E:

- Si $\dim(F) = 1$, alors on dit que F est une **droite** (vectorielle) de E.
- Si $\dim(F) = 2$, alors on dit que F est un **plan** (vectoriel) de E.

Exemples 14. Si $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 0\}$, donner dim(F).

6.2 Rang d'une famille de vecteurs



Définition du rang d'une famille finie de vecteurs

Soit \mathscr{F} une famille finie de vecteurs de E, on appelle rang de \mathscr{F} :

 $rg(\mathscr{F}) = dim(vect(\mathscr{F}))$



Attention à ne pas confondre dimension, rang et cardinaux

La dimension c'est pour les EV. Le rang et les cardinaux sont pour les familles finies de vecteurs.

Exemple 15. Soit $E = \mathbb{R}^3$, notons $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (2, 1, 1)$ et $e_3 = (4, 3, 3)$. Former des phrases justes utilisant les mots dimension, rang et cardinaux et (e_1, e_2, e_3) .



Proposition n° 8 : propriétés du rang

Soient E un EV de dimension finie n et $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors :

- 1. $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) \leq \min(p, n)$.
- 2. \mathscr{F} engendre E SSI $rg(\mathscr{F}) = n$. 3. \mathscr{F} est libre SSI $rg(\mathscr{F}) = p$.
- 4. Soit $i \in [1; p]$, si $e_i \in \text{vect}(\mathscr{F} \setminus (e_i))$ alors $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{rg}(\mathscr{F} \setminus (e_i))$.
- 5. $\operatorname{rg}(\mathscr{F}) = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$ où \mathscr{B} est une base de E.
- 6. $rg(\mathscr{F})$ est le nombre maximum de vecteurs de \mathscr{F} linéairement indépendants.

7 Méthodes

Comment montrer que E est un espace vectoriel?

M1 Montrer que E un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel (voir méthode suivante).

M2 Reconnaître un espace vectoriel de référence.

M3 Montrer que E respecte la définition (rare et long).

Comment montrer que F est un sous-espace vectoriel de E?

 $\underline{\mathbf{M1}}$ Montrer que $F \subset E$

 $0_E \in F$

 $\forall (a,b) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad a + \lambda b \in F.$

M2 $F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ où $e_i \in E$.

M3 F s'écrit comme intersection de SEVs de E.

Comment montrer que (e_1, e_2, \ldots, e_n) est libre?

Fixer $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, supposer $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$, montrer que pour tout $i, \lambda_i = 0$ (système à résoudre souvent).

Comment montrer que (e_1, e_2, \dots, e_n) est génératrice?

Soit $x \in E$, trouver $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ (système à résoudre, ou analyse-synthèse).

Comment montrer qu'une famille est une base?

M1 Montrer qu'elle est libre et génératrice.

M2 Montrer que \mathscr{B} est libre et vérifier $Card(\mathscr{B}) = dim(E)$.

M3 Montrer que \mathscr{B} est génératrice et vérifier $\operatorname{Card}(\mathscr{B}) = \dim(E)$.

Comment montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie?

M1 On trouve une famille génératrice.

M2 On montre qu'il est inclus dans un autre espace vectoriel de dimension finie.

Comment, en dimension finie, montrer que F et G deux sous-espaces vectoriels sont égaux?

Montrer $\dim(F) = \dim(G)$ et $F \subset G$.

Comment calculer la dimension d'un espace vectoriel?

Compter le nombre d'éléments dans une de ses bases.

Comment construire une base de E?

M1 Si on a une famille libre, rajouter petit à petit des vecteurs de façon à rester libre. Dès que la famille a $\dim(E)$ d'éléments, on a une base.

M2 Si on a une famille génératrice, retirer petit à petit des vecteurs qui s'écrivent comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Dès que la famille a $\dim(E)$ d'éléments, on a une base.

Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs?

- M1 Pour calculer $\operatorname{rg}(e_1, e_2, \dots, e_n)$, retirer un vecteur de la famille s'il est combinaison linéaire des autres. Puis continuer de retirer des vecteurs que l'on peut exprimer comme combinaison linéaire des autres. S'arrêter, dès qu'on obtient une famille libre, le rang est alors égal au nombre de vecteurs qui restent.
- M2 Se fixer une base \mathscr{B} , alors $\operatorname{rg}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \operatorname{rg}(\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n))$ puis échelonner cette matrice pour déterminer son rang.

8 Carte mentale pour étudier la liberté d'une famille

