



## Chapitre 6

# Espaces vectoriels

### Objectifs :

Définir la notion d'espaces vectoriels. À la façon de monsieur Jourdain, vous utilisez déjà des exemples espaces vectoriels sans le savoir. L'étude de la notion d'espace vectoriel permet d'étudier tous ces exemples en même temps.

### Prérequis :

- Ensembles et applications
- Systèmes linéaires
- Matrices
- Polynômes

## Table des matières

<b>1 Définition des espaces vectoriels</b>	<b>2</b>
<b>2 Sous-espaces vectoriels</b>	<b>3</b>
<b>3 Combinaison linéaire, espace vectoriel engendré</b>	<b>4</b>
<b>4 Propriétés des familles finies d'un espace vectoriel</b>	<b>4</b>
4.1 Famille libre . . . . .	4
4.2 Famille génératrice . . . . .	5
4.3 Bases . . . . .	6
<b>5 Construction de la théorie de la dimension finie</b>	<b>6</b>
<b>6 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie</b>	<b>8</b>
6.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel . . . . .	8
6.2 Rang d'une famille de vecteurs . . . . .	8
<b>7 Méthodes</b>	<b>8</b>
<b>8 Carte mentale pour étudier la liberté d'une famille</b>	<b>10</b>

Dans tout ce qui suit,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $n$  un entier non nul.

# 1 Définition des espaces vectoriels

Avant de donner la définition d'un espace vectoriel, regardons quelques exemples :

1. Soient  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  et  $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , on les somme :  $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ . On multiplie aussi  $x$  par  $\lambda \in \mathbb{R}$  :  $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$

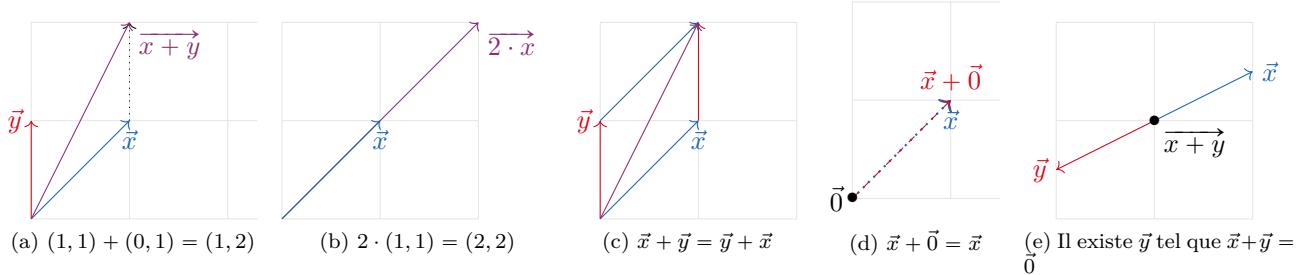


FIGURE 1 – Les vecteurs de  $\mathbb{R}^2$  représentés avec des flèches. Et quelques propriétés sur les vecteurs.

2. De même, étant donnés deux polynômes  $P$  et  $Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , on obtient  $P + Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $\lambda P \in \mathbb{K}[X]$ .  
3. Soient deux fonctions  $(f, g) \in (\mathbb{R}^I)^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on pose  $f + g$ :  $\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) + g(x) \end{cases} \in \mathbb{R}^I$  et  $\lambda f$ :  $\begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{cases} \in \mathbb{R}^I$   
4. Soient  $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ , alors  $A + B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et  $\lambda A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

**Remarque 1.** Dans la suite, la notion d'espace vectoriel généralise ces exemples. Ainsi,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  etc. seront des espaces vectoriels, les éléments de ces ensembles seront appelés des vecteurs.



## Définition d'un espace vectoriel

On appelle **mathbb{K}-espace vectoriel** un ensemble  $E$  muni de deux opérations  $+$  et  $\cdot$  vérifiant :

1. **L'addition** dite **interne**, pour tout  $(x, y) \in E^2$   $x + y \in E$  vérifiant :
  - $\forall (x, y) \in E^2 \quad x + y = y + x$  (l'addition de vecteurs est commutative)
  - $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x + y) + z = x + (y + z)$  (l'addition de vecteurs est associative)
  - $\exists 0_E \in E \quad \forall x \in E \quad x + 0_E = x$  (il existe un vecteur nul noté  $0_E$ )
  - $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x + y = 0_E$  (tout vecteur  $x$  admet un vecteur opposé  $y$ ).
2. **La multiplication** dite **externe**, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $x \in E$ ,  $\lambda \cdot x \in E$ , vérifiant :
  - $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$  (multiplier un vecteur par 1 ne change pas le vecteur)
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$  (pseudo-associativité)
  - $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$  (pseudo-distributivité de  $\cdot$  par rapport à  $+$ )
  - $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$  (distributivité de  $\cdot$  par rapport  $+$ )

Les éléments de  $E$  sont alors appelés **vecteurs** de  $E$ ,  $0_E$  est appelé **vecteur nul** de  $E$ .

**Remarque 2.** Voilà une définition particulièrement rebutante. L'important est surtout de comprendre ce que ça veut dire. Que faites-vous avec des vecteurs ? Les additionner ensemble, et les multiplier par un scalaire. Cette définition n'est que la formalisation de cette idée avec tout un tas d'exigences raisonnables, par exemple :

- Le point 1a exige seulement que lorsqu'on ajoute deux vecteurs l'ordre n'intervient pas.
- Le point 1c exige juste qu'il existe un vecteur nul.



### Exemples classiques d'espaces vectoriels

Les ensembles suivants sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels :

- I.  $\mathbb{K}^n$  (i.e.  $\mathbb{R}^n$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et  $\mathbb{C}^n$  est un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel)
- II.  $\mathbb{K}[X]$
- III.  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  (l'ensemble des matrices de  $n$  lignes et  $p$  colonnes à coefficients dans  $\mathbb{K}$ )
- IV.  $\mathbb{K}^I = \mathcal{F}(I, \mathbb{K})$  où  $I$  est un ensemble non vide (l'ensemble des applications de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ )

### Remarques 3.

- Les vecteurs peuvent donc être des polynômes, des matrices, des suites, des fonctions etc.

- «*Faut-il appliquer cette définition à chaque fois pour montrer qu'un machin est un espace vectoriel?*» Non, on ne l'utilisera quasiment jamais. Dans la pratique, on montre que des ensembles sont bien des espaces vectoriels en vérifiant quelque chose de bien plus simple que l'on va voir au plus vite.



### Péril imminent : à l'impossible nul n'est tenu

Si on a deux vecteurs d'un espace vectoriel, on peut les additionner mais pas les multiplier entre eux.

À partir de maintenant  $E$  désignera toujours un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.



### Proposition n° 1 : premières propriétés d'un espace vectoriel

1. On a unicité du vecteur  $0_E$  au point 1c.
2.  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E \quad (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E) \iff \lambda \cdot x = 0_E$
3. Pour tout  $x \in E$ , on a unicité du vecteur  $y$  au point 1d, de plus  $y = (-1) \cdot x$ .

## 2 Sous-espaces vectoriels



### Définition d'un sous-espace vectoriel

Soit  $F \subset E$ , on dit que  $F$  est un **sous-espace vectoriel** de  $E$  si :  $0_E \in F$ ,  $\forall (x, y) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x + y \in F$



### Proposition n° 2 : un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $F$  est lui-même un espace vectoriel.

**Exemples 1.** Montrer que  $F$  et  $F'$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$  dans les cas suivants :

1.  $E = \mathbb{R}^3$  et  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
2.  $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$
3.  $E$  quelconque et  $F = \{0_E\}$  et  $F' = E$
4.  $E = \mathbb{K}[X]$  et  $F = \mathbb{K}_n[X]$
5.  $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$  et  $F$  l'ensemble des solutions de  $y'' + y = 0$
6.  $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $F = \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ .

**Exemples 2.** Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  ?

1.  $D$  : la droite passant par les points  $(1, 2)$  et  $(0, 1)$
2.  $F = \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$

**Remarque 4.** Soient  $F$  un SEV de  $E$ ,  $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in F^n$  et  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ , alors  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \in F$ .



### Proposition n° 3 : intersection de sous-espaces vectoriels

Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors  $F \cap G$  est alors un sous-espace vectoriel de  $E$ .

De même, si  $(F_i)_{i \in I}$  est une famille de SEVs de  $E$ , alors  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un SEV de  $E$ .

**Exemple 3.** On note  $F = \{(x, y, y) \text{ tel que } (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$  et  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\}$ . Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^3$ , puis calculer leur intersection.

 **Attention l'union de deux SEV de  $E$  n'est pas, en général, un SEV de  $E$ .**

 Par exemple,  $F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$  et  $G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$ ,  $F \cup G$  est-il un SEV de  $\mathbb{R}^2$  ?

### 3 Combinaison linéaire, espace vectoriel engendré

 **Définition d'une combinaison linéaire et de l'espace vectoriel engendré**

Soit  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une famille finie de vecteurs de  $E$ .

- Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ , on dit que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  est **une combinaison linéaire** de la famille  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .
- On appelle **espace vectoriel engendré** par  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ . On note  $\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$  cet ensemble :

$$\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \left\{ x \in E \mid \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i \text{ où } (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}$$

**Remarques 5.** •  $\text{vect}(e_1, \dots, e_n)$  a été défini par compréhension et par paramétrage.

- $x \in \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$  ssi il existe  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ .

**Exemples 4.** • Dans  $E = \mathbb{R}^3$ , donner plusieurs combinaisons linéaires de  $u = (1, 2, 3)$  et  $v = (2, 2, 2)$ .

- Si  $e_1 \neq 0_E$ ,  $\text{vect}(e_1)$  est une droite vectorielle de  $E$ .
- Si  $e_1$  et  $e_2$  sont non nuls et que  $e_2$  n'est pas colinéaire à  $e_1$ , alors  $\text{vect}(e_1, e_2)$  est un plan vectoriel.
- Pour  $E = \mathbb{R}[X]$ , déterminer  $\text{vect}(1, X)$ .

 **Proposition n° 4 : l'espace engendré est un espace vectoriel**

Soient  $(e_1, e_2, \dots, e_n)$  une famille finie de vecteurs de  $E$  et  $F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

1.  $F$  est un SEV de  $E$ .
2. Pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $e_i \in F$ .
3.  $F$  est le plus petit SEV de  $E$  (au sens de l'inclusion) à contenir tous les  $e_i$  pour  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  :  
Si  $H$  est un sous-espace vectoriel qui contient tous les  $e_i$ , alors  $F \subset H$ .

**Remarques 6.** • Soit  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ , si  $e_i \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$ , alors ce vecteur ne sert à rien dans l'espace vectoriel engendré :  $\text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_p) = \text{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$ .

- Pour montrer que  $F$  est un SEV de  $E$ , il suffit de trouver des  $e_i \in E$  tel que  $F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ .

**Exemples 5.** 1. Montrer que  $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ .

2. Montrer que  $F = \{y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid y \text{ est deux fois dérivable et } y'' + y = 0\}$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ .

### 4 Propriétés des familles finies d'un espace vectoriel

#### 4.1 Famille libre

**Remarque 7.** Soit  $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une famille de  $E$ , si pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $\lambda_i = 0$ , alors  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$ .



### Définition d'une famille libre

Soit  $\mathcal{L} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une famille finie de  $E$ , on dit que la famille  $\mathcal{L}$  est **libre**, si il y a une seule façon d'écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire de vecteurs de  $\mathcal{L}$ . Autrement dit si

$$\forall (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad \left( \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E \implies \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket \quad \lambda_i = 0 \right)$$

Si  $\mathcal{L}$  est libre, on dit aussi que les vecteurs  $e_1, \dots, e_n$  sont **linéairement indépendants**, si  $\mathcal{L}$  n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.

**Exemples 6.** 1. Soit  $u = (1, 2, 3)$  et  $v = (1, 1, 1)$  et  $w = (1, 1, 10)$ , montrer que  $\mathcal{F} = (u, v, w)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^3$ .

2. La famille  $(1, i)$  est-elle libre dans  $\mathbb{C}$  vu comme un  $\mathbb{R}$ -EV ? Et vu comme  $\mathbb{C}$ -EV ?

3. La famille  $\mathcal{F} = ((1, 1, 1), (1, 0, 0), (4, 1, 1))$  n'est pas libre.

**Remarques 8.** 1. La famille  $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est liée si et seulement si il existe  $i_0 \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $e_{i_0} \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{i_0-1}, e_{i_0+1}, \dots, e_n)$ . Ainsi, une famille  $\mathcal{F}$  est liée si et seulement si il existe **un** vecteur de  $\mathcal{F}$  qui est une combinaison linéaire des **autres** vecteurs de  $\mathcal{F}$ .

2. Si  $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  et qu'il existe  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$  tel que  $e_i = 0_E$ , alors la famille  $\mathcal{F}$  est liée.

3. Si  $(u)$  est une famille de un vecteur de  $E$ , alors  $(u)$  est libre si et seulement si  $u \neq 0_E$ .

4. Si  $(u, v)$  est une famille de deux vecteurs de  $E$ , alors,  $(u, v)$  est libre si et seulement si  $u$  et  $v$  ne sont pas colinéaires.



#### Attention cela ne se généralise pas à plus de deux vecteurs



Si pour tout  $i \neq j$ ,  $e_i$  et  $e_j$  sont non colinéaires, cela n'implique pas forcément que  $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est libre. En effet, la famille  $((1, 1, 1), (1, 0, 0), (4, 1, 1))$  est liée.

**Remarque 9.** Une famille  $\mathcal{L} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est libre si et seulement si pour tout  $x \in \text{vect}(\mathcal{L})$ , il existe un unique  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$ .

**Exemple 7.** Cela permet d'identifier : si  $m\vec{a} = \vec{F}$  et  $\vec{a} = a_x \vec{x} + a_y \vec{y}$ ,  $\vec{F} = F_x \vec{x} + F_y \vec{y}$ , alors  $ma_x = F_x$  et  $ma_y = F_y$ .



### Théorème n° 1 : famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre

Si  $\mathcal{L}$  est une famille finie de polynômes **non nuls** de  $\mathbb{K}[X]$  de degrés deux à deux distincts, alors  $\mathcal{L}$  est libre.

## 4.2 Famille génératrice



### Définition d'une famille génératrice

Soit  $\mathcal{G} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une famille de vecteurs de  $E$ . On dit  $\mathcal{G}$  est **génératrice** de  $E$  (ou **engendre**  $E$ ) si

$$\forall x \in E \quad \exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad \text{tel que} \quad x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$$

**Exemples 8.** 1. Montrer que  $\mathcal{F}_1 = (1, X^2 + X, X + 1)$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}_2[X]$ . Est-elle libre ?

2. Montrer que  $\mathcal{F}_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}^3$ . Est-elle libre ?

3. Montrer que  $\mathcal{F}_3 = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$  est une famille génératrice de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  (où  $E_{a,b} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  est la matrice contenant que des 0, sauf un 1 à la ligne  $a$  et colonne  $b$ ). Est-elle libre ?

**Remarques 10.** 1. La famille  $\mathcal{G}$  est une famille génératrice de  $E$  si et seulement si  $E = \text{vect}(\mathcal{G})$ .

2. La famille  $\mathcal{G}$  est nécessairement génératrice de  $\text{vect}(\mathcal{G})$ .

### 4.3 Bases

#### 1 Définition d'une base

Soit  $\mathcal{B}$  une famille finie de  $E$ . On dit que  $\mathcal{B}$  est une **base** si  $\mathcal{B}$  est à la fois libre et génératrice de  $E$ .

Ainsi,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  ssi  $\forall x \in E \quad \exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$

On dit que les  $x_k$  sont les **coordonnées** de  $x$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

#### 2 Attention : il faut une famille finie

À Au programme de BCPST, les familles libres, génératrices et les bases sont toujours des familles finies.

#### 3 Exemple de bases importantes (à connaître)

- $(1, X, \dots, X^n)$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ , appelée **base canonique** de  $\mathbb{K}_n[X]$ .
- $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $\mathbb{K}^n$ , appelée **base canonique** de  $\mathbb{K}^n$ , où  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  pour  $1 \leq i \leq n$ .
- $(E_{a,b})_{\substack{1 \leq a \leq n \\ 1 \leq b \leq p}}$  est une base de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ , appelée **base canonique** de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

**Exemples 9.** • Montrer que  $((1, 1, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 0))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$  (ce n'est pas la base canonique de  $\mathbb{R}^3$ ).  
• Donner une base de  $\mathbb{C}$  vu comme un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel. Puis vu comme un  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel.

#### 4 Définition de la matrice d'une famille de vecteurs dans une base

La matrice dont la  $j$ -ième colonne contient les coordonnées de  $u_j$  dans la base  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  est appelée **matrice de la famille**  $\mathcal{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$  dans la base  $\mathcal{B}$  :  $\forall j \in \llbracket 1 ; q \rrbracket \quad \exists! (a_{1,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n \quad u_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, \dots, u_q) = \begin{pmatrix} u_1 & \cdots & u_j & \cdots & u_q \\ a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,q} \end{pmatrix} \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{matrix} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

**Exemples 10.** • Pour  $E = \mathbb{R}_3[X]$ ,  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $E$ , et  $\mathcal{F} = (X^3 + 2, X^2 + 1, 4)$ , que vaut  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ ? Si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}') = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , que vaut  $\mathcal{F}'$ ?  
• Si  $F = \mathbb{R}^2$  et  $\mathcal{C}$  la base canonique de  $F$ ,  $\mathcal{F}_2 = ((1, 1), (2, 3), (1, -2))$  que valent  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}_2)$  et  $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C})$ ?

## 5 Construction de la théorie de la dimension finie

**Remarque 11.** La dimension ne peut pas être définie comme le nombre d'éléments de  $E$ , car  $E$  est un ensemble infini.

#### 1 Définition d'un espace vectoriel de dimension finie

On dit que  $E$  est un espace vectoriel de **dimension finie** si  $E$  possède une famille génératrice (finie).  
Sinon, on dit que  $E$  est un espace vectoriel de **dimension infinie**.



### Exemple d'espaces vectoriels de dimension finie ou de dimension infinie

$\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{C}$  vu comme un  $\mathbb{C}$ -EV ou un  $\mathbb{R}$ -EV,  $\mathbb{K}_n[X]$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sont de dimension finie, contrairement à  $\mathbb{K}[X]$ .



### Théorème n° 2 de la base incomplète

(admis)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -EV de dimension finie. Soit  $\mathcal{L}$  une famille libre de  $E$ , il existe  $\mathcal{B}$  base de  $E$  telle que  $\mathcal{L} \subset \mathcal{B}$ .



### Théorème n° 3 de la base extraite

(admis)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -EV de dimension finie. Soit  $\mathcal{G}$  une famille génératrice de  $E$ , il existe  $\mathcal{B}$  base de  $E$  telle que  $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ .

**Remarque 12.** Grâce au théorème de la base incomplète ou à celui de la base extraite, un espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base mais il n'y a pas unicité des bases.



### Proposition n° 5 : comparaison entre les cardinaux des familles libres, génératrices et des bases

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -EV de dimension fine. Si les familles  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{G}$  sont respectivement libre, base, et génératrice alors

$$\text{Card}(\mathcal{L}) \leq \text{Card}(\mathcal{B}) \leq \text{Card}(\mathcal{G})$$



### Théorème n° 4 : toutes les bases ont le même cardinal

Si  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -EV de dimension finie, toutes les bases de  $E$  ont le même cardinal.



### Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -EV de dimension finie et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . On définit la **dimension** de  $E$ , par  $\dim(E) = \text{Card}(\mathcal{B})$ .

**Remarque 13.** La dimension d'un espace vectoriel  $E$  s'interprète comme le nombre de degrés de liberté de  $E$ . Si  $E = \{0_E\}$ , on pose  $\dim(E) = 0$ , si  $E$  n'est pas de dimension finie, on dit que la dimension de  $E$  est infinie.



### Exemples de dimensions importantes à connaître

$$\dim(\mathbb{K}^n) = \quad \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = \quad \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = \quad \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = \quad \dim(\mathbb{K}_n[X]) =$$



### Attention à la dimension de deux espaces vectoriels

La dimension de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est  $n^2$  (et non  $n$ ), de même attention à la dimension de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

**Exemple 11.** Soit  $F = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x + 2y + z &= 0 \\ 2x - t &= 0 \end{cases} \right\}$ . Déterminer une base de  $F$  et en déduire  $\dim(F)$ .

**Exemple 12.** Si  $E$  est de dimension  $n$ , alors toute famille de  $n + 1$  vecteurs (ou plus) est liée.



### Proposition n° 6 : caractérisation des bases avec le cardinal

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -EV de dimension finie, et  $\mathcal{F}$  une famille finie de vecteurs de  $E$  telle que  $\text{Card}(\mathcal{F}) = \dim(E)$ . Alors,

$\mathcal{F}$  est une base de  $E$  ssi  $\mathcal{F}$  est une famille génératrice de  $E$  ssi  $\mathcal{F}$  est une famille libre.

**Exemples 13.**

- Montrer que  $\mathcal{B} = ((1, 1, 0), (2, 1, 0), (5, 1, 1))$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Soit  $\mathcal{F} = ((1, 1, 1), (2, 1, 3), (3, 2, 4), (-1, 0, 3))$ , extraire de cette famille une base de  $\mathbb{R}^3$ .
- Soit  $\mathcal{L} = \left(I_2, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ , compléter cette famille libre en une base de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .
- Si  $\mathcal{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$  telle que pour tout  $i \in \llbracket 0 ; n \rrbracket$ ,  $d^\circ P_i = i$ , alors  $\mathcal{F}$  est une base de  $\mathbb{K}_n[X]$ .

## 6 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

### 6.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel



#### Proposition n° 7 : dimension d'un sous-espace vectoriel

(admise)

Soient  $E$  un EV de dimension finie et  $F$  un SEV de  $E$ , alors :

- $F$  est de dimension finie
- $\dim(F) \leq \dim(E)$
- $E = F \iff \dim(E) = \dim(F)$



#### Exemples de sous-espaces particuliers

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie  $n$ . Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  :

- Si  $\dim(F) = 1$ , alors on dit que  $F$  est une **droite** (vectorielle) de  $E$ .
- Si  $\dim(F) = 2$ , alors on dit que  $F$  est un **plan** (vectoriel) de  $E$ .

**Exemple 14.** Si  $E = \mathbb{R}^3$  et  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - 2z = 0\}$ , donner  $\dim(F)$ .

### 6.2 Rang d'une famille de vecteurs



#### Définition du rang d'une famille finie de vecteurs

Soit  $\mathcal{F}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ , on appelle **rang** de  $\mathcal{F}$  :

$$\text{rg}(\mathcal{F}) = \dim(\text{vect}(\mathcal{F}))$$



#### Attention à ne pas confondre dimension, rang et cardinal

La dimension c'est pour les EV. Le rang et le cardinal sont pour les familles finies de vecteurs.

**Exemple 15.** Soit  $E = \mathbb{R}^3$ , notons  $e_1 = (1, 1, 1)$ ,  $e_2 = (2, 1, 1)$  et  $e_3 = (4, 3, 3)$ . Former des phrases justes utilisant les mots dimension, rang et cardinal et la famille  $\mathcal{F} = (e_1, e_2, e_3)$ .



#### Proposition n° 8 : propriétés du rang

Soient  $E$  un EV de dimension finie  $n$  et  $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ . Alors :

- $\text{rg}(\mathcal{F}) \leq \min(p, n)$ .
- $\mathcal{F}$  engendre  $E$  SSI  $\text{rg}(\mathcal{F}) = n$ .
- $\mathcal{F}$  est libre SSI  $\text{rg}(\mathcal{F}) = p$ .
- Soit  $i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$ , et  $\mathcal{F}' = (e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$ , si  $e_i \in \text{vect}(\mathcal{F}')$  alors  $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\mathcal{F}')$ .
- $\text{rg}(\mathcal{F}) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}))$  où  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ .
- $\text{rg}(\mathcal{F})$  est le nombre maximum de vecteurs de  $\mathcal{F}$  linéairement indépendants.

**Exemple 16.** Calculer le rang de  $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$ , avec  $P_1 = X^2$ ,  $P_2 = X^2 + 1$ ,  $P_3 = 5X^2 + 1$ ,  $P_4 = P_1$ ,  $P_5 = 2P_1$

## 7 Méthodes



#### Comment montrer que $E$ est un espace vectoriel ?

M1 Montrer que  $E$  un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence (voir méthode suivante).

M2 Reconnaître que  $E$  est un espace vectoriel de référence.

M3 Montrer que  $E$  respecte la définition (rare et long).



### Comment montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $E$ ?

M1 Montrer que  $F \subset E$

$0_E \in F$

$\forall (a, b) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad a + \lambda b \in F.$

M2  $F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_n)$  où  $e_i \in E$ .

M3 Écrire  $F = \text{Ker}(\varphi)$  en introduisant  $\varphi$  une application linéaire définie sur  $E$ .

M4  $F$  s'écrit comme intersection de SEVs de  $E$ .



### Quelle est la méthode standard pour montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre ?

Écrire «Soit  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ , supposons  $\sum_{i=1}^n \lambda_i e_i = 0_E$ », et montrer que pour tout  $i$ ,  $\lambda_i = 0$  (système à résoudre souvent).



### Comment montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice ?

«Soit  $x \in E$ » puis trouver  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$  tel que  $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i e_i$  (système à résoudre, ou analyse-synthèse).



### Comment montrer qu'une famille est une base ?

M1 Montrer qu'elle est libre et génératrice.

M2 Montrer que  $\mathcal{B}$  est libre et vérifier  $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$ .

(utile si  $\dim(E)$  est connue)

M3 Montrer que  $\mathcal{B}$  est génératrice et vérifier  $\text{Card}(\mathcal{B}) = \dim(E)$ .

(utile si  $\dim(E)$  est connue)



### Comment montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie ?

M1 On trouve une famille génératrice.

M2 On montre qu'il est inclus dans un autre espace vectoriel de dimension finie.



### Comment, en dimension finie, montrer que $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?

Montrer  $\dim(F) = \dim(G)$  et  $F \subset G$ .



### Comment calculer la dimension d'un espace vectoriel ?

Compter le nombre d'éléments dans une de ses bases.



### Comment construire une base de $E$ ?

M1 Si on a une famille libre, rajouter petit à petit des vecteurs de façon à rester libre. Dès que la famille a  $\dim(E)$  d'éléments, on a une base.

M2 Si on a une famille génératrice, retirer petit à petit des vecteurs qui s'écrivent comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Dès que la famille a  $\dim(E)$  d'éléments, on a une base.



### Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs ?

M1 Pour calculer  $\text{rg}(e_1, e_2, \dots, e_n)$ , retirer un vecteur de la famille s'il est combinaison linéaire des autres. Puis continuer de retirer des vecteurs que l'on peut exprimer comme combinaison linéaire des autres. S'arrêter, dès qu'on obtient une famille libre, le rang est alors égal au nombre de vecteurs qui restent.

M2 Se fixer une base  $\mathcal{B}$ , alors  $\text{rg}(e_1, e_2, \dots, e_n) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(e_1, e_2, \dots, e_n))$  puis échelonner cette matrice pour déterminer son rang.

## 8 Carte mentale pour étudier la liberté d'une famille

