

Problème 1 : mais où vont donc les racines ? Sous terre ?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, on pose $P_n = X^n + 9X^2 - 4$

Partie I : Existence, unicité et approximation d'une racine positive de P_n

1. Donner le degré de P_n .
2. Écrire une fonction Python **Pn(x,n)** qui, pour x un réel positif et $n \in \mathbb{N}$, renvoie $P_n(x)$.
3. À l'aide du théorème des valeurs intermédiaires, démontrer qu'il existe $c \in [0; 1]$ tel que $P_n(c) = 0$.
4. On souhaite écrire un algorithme de dichotomie qui à un n donné et un $\varepsilon > 0$ donné renvoie une approximation de c à ε près, recopiez et complétez le code suivant :

```
def Dichotomie(eps,n):  
    a =          #a tel que P_n(a)<0  
    b =          #b tel que P_n(b)>0  
    while  
        c =  
        if  
  
        else  
  
    return
```

5. Écrire des commandes Python qui, sur une même figure, affiche les tracés de P_3 , P_4 , P_5 sur $[0; 1]$, ainsi que les approximations de la racine de P_3 , celle de P_4 et celle de P_5 .
6. Démontrer qu'il existe un unique $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $P_n(c) = 0$.

Comme ce c dépend du n choisi, on l'appelle à partir de maintenant x_n , ainsi, $P_n(x_n) = 0$

7. Donner la valeur explicite de x_1 et de x_2 .

Partie II : Étude d'une suite

Ainsi, on a défini une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

8. Démontrer que pour tout $x \in]0; 1[$, $P_{n+1}(x) < P_n(x)$.
9. En déduire le signe de $P_{n+1}(x_n)$.
10. Soit $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante et $(x, x') \in I^2$, on suppose que $g(x) < g(x')$, démontrer que $x < x'$.
11. À l'aide des questions précédentes, montrer que la suite $(x_n)_n$ est croissante.
12. En déduire que la suite $(x_n)_n$ converge.
13. Déterminer la limite de $(x_n)_n$.

Partie III : Étude des dérivées successives

14. On pose $f: x \mapsto \frac{1}{P_1(x)}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f est n fois dérivable sur $[1; +\infty[$ et qu'il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \geq 1$, $f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{(9x^2 + x - 4)^{n+1}}$. On donnera une formule reliant Q_{n+1} à Q_n .
15. Déterminer le degré de Q_n .

Problème 2 : Les polynômes de la ferme

Partie I : cas particulier $\mathbb{R}_2[X]$

1. En déterminant ses racines, factoriser le polynôme $2X^2 + 10X + 12$.

2. Donner un exemple de polynôme P de degré 2 tel que 3 et 4 soient racines de P . Que vaut $P(5)$?
 3. En déduire alors un exemple de polynôme Q de degré 2 tel que $Q(3) = Q(4) = 0$ et $Q(5) = 1$.
On pourra remarquer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $Q = \lambda P$, alors, on a encore $Q(3) = Q(4) = 0$.
 4. Soit $S \in \mathbb{R}_2[X]$, on suppose que S a au moins trois racines distinctes, en citant un résultat de cours, que peut-on en déduire sur S ?
 5. Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q de degré 2 tel que $Q(3) = Q(4) = 0$ et $Q(5) = 1$.
On pourra prendre deux tels polynômes Q et R et étudier les racines de $Q - R$.
- On note maintenant L_1 l'unique polynôme de degré 2 tel que $L_1(3) = L_1(4) = 0$ et $L_1(5) = 1$.
6. Donner alors, sans preuve et sous forme factorisée :
 - L_2 le seul polynôme de degré 2 tel que $L_2(3) = L_2(5) = 0$ et $L_2(4) = 1$
 - L_3 le seul polynôme de degré 2 tel que $L_3(4) = L_3(5) = 0$ et $L_3(3) = 1$.
 7. Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Montrer que $P = P(5)L_1 + P(4)L_2 + P(3)L_3$.
On pourra considérer les racines de la différence entre ces deux polynômes.

Partie II : Cas général

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ un $n+1$ -uplet de réels deux à deux distincts. Fixons $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

On pose $L_i = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - x_k}{x_i - x_k}$

8. Déterminer le degré de L_i .
9. Pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, calculer $L_i(x_j)$.
10. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, en utilisant les racines de $P - \sum_{k=0}^n P(x_k)L_k$, démontrer que $P = \sum_{k=0}^n P(x_k)L_k$.

Partie III : Majoration de l'erreur (partie facultative)

11. Soit $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur $[a; b]$, on suppose que f s'annule au moins $n+2$ fois, montrer que f' s'annule au moins $n+1$ fois.
12. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b], \mathbb{R})$ s'annulant $n+2$ fois, montrer que $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[a; b]$.

Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b], \mathbb{R})$ et $a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_n \leq b$, on note $P = \sum_{k=0}^n f(x_k)L_k$, on cherche à montrer que

$$\forall x \in [a; b] \quad \exists c \in [a; b] \quad f(x) - P(x) = \frac{\prod_{k=0}^n (x - x_k)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)$$

13. Démontrer que le résultat est vrai, si $x = x_i$ pour un certain $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
14. On considère $x \in [a; b] \setminus \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, on pose

$$Q = \prod_{k=0}^n (X - x_k) \quad \text{et} \quad W: t \mapsto f(t) - P(t) - \frac{Q(t)}{Q(x)} (f(x) - P(x))$$

En utilisant la fonction W en déduire le résultat voulu.

15. Justifier que $f^{(n+1)}$ est une fonction bornée sur $[a; b]$.
16. On note alors $M = \sup\{|f^{(n+1)}(t)| \mid t \in [a; b]\}$. Déduire de ce qui précède que

$$\forall x \in [a; b] \quad |f(x) - P(x)| \leq \frac{|Q(x)|}{(n+1)!} M$$