Chapitre 5

Polynômes

Le but de ce chapitre est de revoir les polynômes vu en BCPST1. Une nouveauté sera d'écrire les polynômes à l'aide de X, un certain polynôme. Une autre nouveauté et que cette année les polynômes pourront être à coefficients complexes.

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $f\colon \mathbb{K}\to\mathbb{K}$, $g\colon \mathbb{K}\to\mathbb{K}$, $\lambda\in\mathbb{K}$, $n\in\mathbb{N}^*$, alors on rappelle que l'on définit l'addition de fonctions, le produit de fonctions, la multiplication d'une fonction par un scalaire et la puissance d'une fonction par :

$$f+g\colon \begin{cases}\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\\ x \longmapsto f(x)+g(x)\end{cases} \qquad f\times g\colon \begin{cases}\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\\ x \longmapsto f(x)\times g(x)\end{cases} \qquad \lambda\cdot f\colon \begin{cases}\mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}\\ x \longmapsto \lambda\times f(x)\end{cases} \qquad f^n = \underbrace{f\times f\cdots\times f}_{n \text{ fois}}$$

Par convention, pour $n=0$, $f^n\colon x\mapsto 1$. On rappelle aussi que «$f=g$» équivaut à «pour tout $x\in\mathbb{K}$, $f(x)=g(x)$».

1 Définition et écriture d'un polynôme

Définition d'un polynôme

Soit $P\colon \mathbb{K}\to\mathbb{K}$. On dit que P est un **polynôme réel** si $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ et **polynôme complexe** si $\mathbb{K}=\mathbb{C}$, s'il existe $n\in\mathbb{N}$ et $(a_0,a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P\colon x\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Les scalaires a_k sont appelés **coefficients** du polynôme P.

Remarques 1.
- Si tous les coefficients d'un polynôme sont nuls, on dit que c'est le **polynôme nul**, noté 0.
- On décide de noter $X\colon x\mapsto x$, c'est bien un polynôme : il suffit de poser $n=1$, $a_0=0$ et $a_1=1$.
- Le n dépend du polynôme. Si $Q\colon x\mapsto 2+3x$, alors on peut poser $n=1$, $a_1=2$ et $a_2=3$, mais comme $Q\colon x\mapsto 2+3x+0x^2+0x^3$, ce n n'est pas unique, on peut aussi poser $m=3$ et $a_0=2$, $a_1=3$, $a_2=a_4=0$.

  Dans l'écriture du polynôme $P\colon x\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on peut remplacer n par m avec $m>n$ et poser $a_k=0$ pour $k>n$.

Proposition n° 1 : écriture d'un polynôme quelconque à l'aide du polynôme X

Soit $P\colon x\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ un polynôme, on a alors l'égalité suivante : $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k$.

Démonstration de la proposition n° 1 : Comme $X\colon x\mapsto x$, $X^2=X\times X\colon x\mapsto x^2$, de même pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $X^k\colon x\mapsto x^k$. Par produit par un scalaire, $a_kX^k\colon x\mapsto a_kx^k$ et par somme de fonctions, $\sum_{k=0}^{n} a_kX^k\colon x\mapsto \sum_{k=0}^{n} a_kx^k$, Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} a_kX^k$ et P sont deux fonctions égales (par définition de l'égalité de fonctions). ■

Définition des ensembles $\mathbb{K}[X]$

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels et $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes complexes.

Proposition n° 2 : unicité de l'écriture d'un polynôme

Soit $P=\sum_{k=0}^{n} a_kX^k\in\mathbb{K}[X]$ et $Q=\sum_{k=0}^{m} b_kX^k\in\mathbb{K}[X]$, (quitte à rajouter des coefficients nuls, on suppose $n=m$).

1. P est le polynôme nul ssi pour tout $x\in\mathbb{K}$, $P(x)=0$. 2. Pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $a_k=b_k$ ssi $P=Q$.

Démonstration de la proposition n° 2 :

1. Si P est le polynôme nul, alors, par définition, pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $a_k=0$, dès lors, pour tout $x\in\mathbb{K}$, $P(x)=\sum_{k=0}^{n} a_kx^k=0$.

   Réciproquement, supposons que pour tout $x\in\mathbb{K}$, $P(x)=0$. On souhaite montrer que tous les coefficients de P sont nuls. Raisonnons par l'absurde et supposons il existe $k\in[\![0\,;n]\!]$ tel que $a_k\neq 0$. Notons $d=\max\{k\in[\![0\,;n]\!]\mid a_k\neq 0\}$, alors $a_d\neq 0$ et pour tout $k\in[\![d+1\,;n]\!]$, $a_k=0$. Ainsi, pour tout $x\in\mathbb{K}$, $P(x)=\sum_{k=0}^{d} a_kx^k=0$. Ainsi, $a_dx^d=-\sum_{k=0}^{d-1} a_kx^k$. En utilisant le module et l'inégalité triangulaire, on obtient pour $x\in\mathbb{R}$, $|a_d||x^d|=\left|-\sum_{k=0}^{d-1} a_kx^k\right|\leqslant\sum_{k=0}^{d-1}|a_k|\times|x^k|$. Prenons $x\geqslant 1$, de sorte que pour tout $k\in[\![0\,;d-1]\!]$, $|x^k|=x^k\leqslant x^{d-1}$, ainsi, $|a_d|x^d\leqslant\sum_{k=0}^{d-1}|a_k|\times x^{d-1}$, donc $x\leqslant\sum_{k=0}^{d-1}\frac{|a_k|}{|a_d|}$. Notons $M=\sum_{k=0}^{d-1}\frac{|a_k|}{|a_d|}$, on a montré que pour tout $x\geqslant 1$, on a $x\leqslant M$. Prenons, en particulier, $x=1+M\geqslant 1$ et donc $1+M\leqslant M$, ce qui est absurde. Ainsi, pour tout $k\in[\![0\,;n]\!]$, $a_k=0$. Donc P est le polynôme nul.

2. Supposons que pour touut $k \in [\![0\,; n]\!]$, $a_k = b_k$, alors, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = Q(x)$, ainsi $P = Q$. Réciproquement, supposons que $P = Q$. Donc pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = Q(x)$, alors pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) x^k = 0$, ainsi, par le premier point, le polynôme $x \mapsto \sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) x^k$ est le polynôme nul, donc pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $a_k - b_k = 0$, donc pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $a_k = b_k$. ■

2 Degré et opérations des polynômes

Définition du degré d'un polynôme, du coefficient dominant, d'un polynôme unitaire

- Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme non nul. Notons $d = \max\{k \in [\![0\,; n]\!] \mid a_k \neq 0\}$, de sorte que $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ et $a_d \neq 0$. L'entier d est appelé **degré** de P et est noté $d^\circ P = d$.
- On pose, par convention, $d^\circ 0 = -\infty$.
- On appelle **coefficient dominant** de P le coefficient a_d. On dit que P est **unitaire** si $a_d = 1$.
- On dit que P est un **polynôme constant** si $d^\circ P \leqslant 0$, dans ce cas, $P = a_0$.
- Les polynômes λX^n, avec $\lambda \neq 0$, sont appelés **monômes**.
- On note $\mathbb{K}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ dont le de degré est inférieur ou égale à n.

Exemples 1. $d^\circ 0 =$ $\quad$ $d^\circ 3 =$ $\quad$ $d^\circ X + 2 =$ $\quad$ $d^\circ X^n =$ $\quad$ $d^\circ(aX^2 + bX + c) =$

Attention à ne pas confondre degré n et somme dont le dernier terme est X^n

L'écriture $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ n'implique pas $d^\circ P = n$ seulement que $d^\circ P \leqslant n$. De plus, $a_n \neq 0$ ssi $d^\circ P = n$.

Exemples 2. Si $P = 2X^2 + 3X$, $Q = X^3 - 2X$ et $R = -2X^2 + 2$, calculer $P + Q$, $P + R$, $P \times Q$ et $P \circ Q$.

Proposition n° 3 : formules pour les opérations sur les polynômes

Soient $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, $\tilde{P} = \sum_{k=0}^{p} \tilde{a}_k X^k$, $Q = \sum_{k=0}^{q} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $P + Q$, λP, $P \times Q$ et $P \circ Q = P(Q)$ sont encore des polynômes donnés par les formules suivantes :

1. $P + \tilde{P} = \sum_{k=0}^{p} (a_k + \tilde{a}_k) X^k$
2. $\lambda P = \sum_{k=0}^{p} (\lambda a_k) X^k$
3. $P \times Q = \sum_{k=0}^{p+q} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^k$
4. $P \circ Q = P(Q) = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^k$

Démonstration de la proposition n° 3 :

1. Par définition de la somme de deux fonctions : $P + \tilde{P} \colon x \mapsto P(x) + \tilde{P}(x)$, or pour $k \in \mathbb{K}$,

$$P(x) + \tilde{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + \sum_{k=0}^{n} \tilde{a}_k x^k = \sum_{k=0}^{n} (a_k + \tilde{a}_k) x^k$$

On reconnait alors le polynôme $\sum_{k=0}^{n} (a_k + \tilde{a}_k) X^k$, ainsi, $P + \tilde{P} = \sum_{k=0}^{n} (a_k + \tilde{a}_k) X^k$

2. Pour tout $x \in \mathbb{K}$, par linéarité de la somme, on obtient :

$$(\lambda P)(x) = \lambda P(x) = \lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \lambda a_k x^k$$

Ainsi, λP est un polynôme et $\lambda P = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k) X^k$.

3. $P\times Q\colon x\mapsto P(x)\times Q(x)$
   Soit $x\in\mathbb{K}$,
$$P(x)\times Q(x)=\left(\sum_{i=0}^{p}a_ix^i\right)\times\left(\sum_{j=0}^{q}b_jx^j\right)=\sum_{i=0}^{p}\sum_{j=0}^{q}a_ib_jx^{i+j}=\sum_{k=0}^{p+q}\sum_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}x^k$$
   Ainsi, $P\times Q\colon x\mapsto P(x)\times Q(x)$ est la fonction $P\times Q\colon x\mapsto \sum\limits_{k=0}^{p+q}\sum\limits_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}X^k$, ainsi, $P\times Q$ est un polynôme et $P\times Q=\sum\limits_{k=0}^{p+q}\sum\limits_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}x^k$.
4. $P\circ Q\colon x\mapsto P(Q(x))$. Soit $x\in\mathbb{K}[X]$, $P(Q(x))=\sum\limits_{k=0}^{p}a_k(Q(x))^k=\sum\limits_{k=0}^{p}a_kQ^k(x)$, or comme Q est un polynôme, le point 3 montre, par récurrence, que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, Q^k est un polynôme. Ainsi, par somme de polynômes, $P\circ Q$ est un polynôme et vaut $P\circ Q=\sum\limits_{k=0}^{p}a_kQ^k$ ■

Remarques 2. • Pour la somme de deux polynômes, on a pris les mêmes bornes (quitte à rajouter des zéros).
- En revanche, ce n'est pas nécessaire pour le produit de deux polynômes.
- Attention : $P(X+1)$, $P(X)$ et $P(X-1)$ désignent souvent des composées (et non des produits) de P respectivement avec $X+1$, X et $X-1$, de plus, $P\circ X=P(X)=P$.

Proposition n° 4 : propriétés des opérations sur les polynômes

Soient $(P,Q,R)\in\mathbb{K}[X]^3$, alors :

1. $P+Q=Q+P$ (commutativité)
2. $P\times Q=Q\times P$ (commutativité)
3. $(P+Q)+R=P+(Q+R)$ (associativité)
4. $(P\times Q)\times R=P\times(Q\times R)$ (associativité)
5. $0+P=P$ (0 neutre de l'addition)
6. $1\times P=P$ (1 neutre de la multiplication)
7. $P+(-1)\times P=0$ (existence de l'opposé)
8. $P\times(Q+R)=P\times Q+P\times R$ (distributivité)
9. $(P+Q)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P^kQ^{n-k}$ (binôme de Newton)
10. $P^n-Q^n=(P-Q)\sum\limits_{k=0}^{n-1}P^kQ^{n-1-k}$

Exemple 3. Grâce à $(1+X)^{2n}$, démontrer que $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

Exemples 4. Si $P=2X^2+3X$, $Q=X^3-2X$ et $R=-2X^2+2$, que valent les degrés de $P+Q$, $P+R$, PQ et $P\circ Q$?

Proposition n° 5 : propriétés sur le degré et intégrité

Soient $(P,Q)\in\mathbb{K}[X]^2$, alors :

1. $d^\circ(P+Q)\leqslant\max(d^\circ P,d^\circ Q)$
2. Si $d^\circ P\neq d^\circ Q$, alors $d^\circ(P+Q)=\max(d^\circ P,d^\circ Q)$
3. $d^\circ(PQ)=d^\circ P+d^\circ Q$
4. Si $\lambda\in\mathbb{K}^*$ alors $d^\circ(\lambda P)=d^\circ P$
5. Si Q non constant, $d^\circ(P\circ Q)=d^\circ P\times d^\circ Q$
6. Si $PQ=0$, alors $P=0$ ou $Q=0$ (intégrité)

Démonstration de la proposition n° 5 : Posons $p=d^\circ P$ et $q=d^\circ Q$, de sorte que $P=\sum\limits_{k=0}^{p}a_kX^k$ et $Q=\sum\limits_{k=0}^{q}b_kX^k$ avec $a_p\neq0$ et $b_q\neq0$.

1. Il y a trois cas :
   - Si $p>q$, alors $P+Q=\sum\limits_{k=0}^{q}(a_k+b_k)X^k+\sum\limits_{k=q+1}^{p}a_kX^k$ avec $a_p\neq0$, de sorte que $d^\circ(P+Q)=p=\max(p,q)=\max(d^\circ P,d^\circ Q)$.
   - Si $p<q$, alors idem que précédemment, en changeant les rôles de P et Q.
   - Si $p=q$, alors $P+Q=\sum\limits_{k=0}^{p}(a_k+b_k)X^k$. Donc si $a_k+b_k\neq0$, alors $d^\circ(P+Q)=p=\max(d^\circ P,d^\circ Q)$. Si $a_k+b_k=0$, alors $P+Q=\sum\limits_{k=0}^{p-1}(a_k+b_k)X^k$ et donc $d^\circ(P+Q)\leqslant p-1<p=\max(d^\circ P,d^\circ Q)$.
2. La preuve du point 2 a été fait lors du point 1.
3. Remarquons que si $P=0$ ou $Q=0$, alors la propriété est vraie. Travaillons donc dans le cas où $p=d^\circ P\geqslant0$ et $q=d^\circ Q\geqslant0$. Par définition du produit de deux polynômes, $PQ=\sum\limits_{k=0}^{p+q}c_kX^k$ avec pour tout $k\in[\![\,0\,;p+q\,]\!]$, $c_k=\sum\limits_{i=0}^{k}a_ib_{k-i}$, en particulier, $c_{p+q}==\sum\limits_{i=0}^{p+q}a_ib_{p+q-i}=\sum\limits_{i=0}^{p-1}a_ib_{p+q-i}+a_pb_q+\sum\limits_{i=p+1}^{p+q}a_ib_{p+q-i}=a_pb_q\neq0$, ainsi $d^\circ PQ=p+q=d^\circ P+d^\circ Q$.

4. Utiliser la propriété précédente avec $Q = \lambda$, alors $d^\circ Q = 0$.
5. Par le point 3 : $d^\circ Q^2 = d^\circ Q + d^\circ Q = 2q$. Puis, par une récurrence facile, $d^\circ Q^k = kq$. Ainsi,

$$P \circ Q = \sum_{k=0}^{p} a_k Q^k = a_p Q^p + \sum_{k=0}^{p-1} a_k Q^k$$

Or, $d^\circ a_p Q^p = pq$ ($a_p \neq 0$) et $d^\circ \left(\sum_{k=0}^{p-1} a_k Q^k\right) \leqslant (p-1)q < pq$ ($q \geqslant 1$). Comme les degrés sont différents, par la propriété du degré de la somme : $d^\circ P(Q) = pq = d^\circ P \times d^\circ Q$.

6. Supposons $P \neq 0$ et $Q \neq 0$. Ainsi, $d^\circ P \geqslant 0$, $d^\circ Q \geqslant 0$. Par conséquent, en utilisant le degré du produit, $d^\circ PQ = d^\circ P + d^\circ Q \geqslant 0$, dès lors, $PQ \neq 0$. Par contraposée, on a donc montré que $PQ = 0$ implique $P = 0$ ou $Q = 0$. ■

Péril imminent au degré de la somme

En général, le degré de la somme n'est pas égale à la somme des degrés ni au maximum des degrés.

3 Racines et factorisation de polynômes

Définition d'une racine d'un polynôme

Soient P un polynôme et $x \in \mathbb{K}$, on dit que x est une **racine** de P si $P(x) = 0$.

Exemple 5. Est-ce que 0, 1 et 2 sont racines de $P = X^3 + X^2 - X - 1$?

Attention X et x ce n'est pas la même chose !

Chercher les racines de $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, c'est résoudre l'équation $P(x) = 0$. Ce n'est pas la même chose que résoudre l'équation $P(X) = 0$: $P(X) = 0$ ssi pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $a_k = 0$ d'après la proposition 2.

Proposition n° 6 : caractérisation des racines par la factorisation

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$ et $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in \mathbb{K}^r$ avec les x_i deux à deux distincts.

1. Le polynôme P admet a comme racine si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)Q$.
2. Le polynôme P admet x_1, $x_2, \dots, x_r$ comme racines ssi il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \left(\prod_{i=1}^{r} (X - x_i)\right) Q$

Démonstration de la proposition n° 6 :

1. Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)Q$. Dès lors, $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$, donc a est racine de P. Réciproquement, supposons que a soit racine de P. Écrivons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, alors :

$$P = P - 0 = P - P(a) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n} a_k a^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (X^k - a^k) = \sum_{k=1}^{n} a_k (X - a) \sum_{i=0}^{k-1} X^i a^{k-1-i} = (X - a) \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} X^i$$

Ainsi, on a bien trouvé $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)Q$.

2. Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \prod_{i=1}^{r} (X - x_i)Q$, alors soit $j \in [\![1\,; r]\!]$, $P(x_j) = \prod_{i=1}^{r} (x_j - x_i)Q(x_j) = 0$ (en effet, le terme dans le produit pour $i = j$ est nul), ainsi les x_i sont bien racines. Réciproquement, posons pour $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathscr{P}(n)$: «Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, si $x_1, \dots, x_n$ sont n racines distinctes de $P \in \mathbb{K}[X]$, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \prod_{i=1}^{n} (X - x_i)Q$».
Comme x_1 est racine, en utilisant le point 1, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - x_1)Q = \prod_{i=1}^{1} (X - x_i)Q$. Donc $\mathscr{P}(1)$ est

vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $x_1, \dots, x_n, x_{n+1}$ $n+1$ racines deux à deux distinctes de P. En particulier, $x_1, \dots, x_n$ sont n racines distinctes de P, d'après $\mathscr{P}(n)$, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)Q$. Or, comme x_{n+1} est racine, $P(x_{n+1}) = 0$, donc $\prod_{i=1}^{n}(x_{n+1} - x_i)Q(x_{n+1}) = 0$. Comme les x_i sont deux à deux distincts, pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, $x_{n+1} - x_i \neq 0$, donc $Q(x_{n+1}) = 0$, d'après le point 1, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = (X - x_{n+1})R$, ainsi, $P = \prod_{i=1}^{n}(X - x_i)(X - x_{n+1})R$, donc $P = \prod_{i=1}^{n+1}(X - x_i)R$. Dès lors, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. En particulier, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ■

Proposition n° 7 : le conjugué d'une racine d'un polynôme à coefficients réels est encore racine

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ une racine de P, alors $\overline{z}$ est aussi racine de P.

Démonstration de la proposition n° 7 : Écrivons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ comme $P(z) = 0$, alors

$$P(\bar{z}) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{z}^k = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k}\,\overline{z^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k z^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k z^k} = \overline{P(z)} = \overline{0} = 0$$

Ainsi, $\bar{z}$ est une racine de P. ■

Exemples 6.

1. Si $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme du second degré dont le discriminant est strictement négatif, quelles sont ses racines ?
2. Quelles sont les racines de $Q = X^2 - (2 + \mathrm{i})X + 2\mathrm{i}$?

Proposition n° 8 : un polynôme non nul admet un nombre fini de racines majoré par son degré

1. Si $P \in \mathbb{K}[X]\backslash\{0\}$, P a au plus $d^\circ P$ racines.
2. Si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ a au moins $n+1$ racines, alors $P = 0$.
3. Si $P \in \mathbb{K}[X]$ a une infinité de racines, alors $P = 0$.

Démonstration de la proposition n° 8 :

1. Notons $n = d^\circ P \in \mathbb{N}$ (car $P \neq 0$). Supposons que P ait strictement plus de n racines, en particulier, il en admet au moins $n+1$, notons $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ ces $n+1$ racines distinctes. D'après la propositon 6, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \prod_{i=1}^{n+1}(X - x_i)Q$. En passant au degré, on obtient $n = (n+1) + d^\circ Q$, donc nécessairement, $d^\circ Q = -1$ ce qui est impossible, ainsi, P a au plus n racines.
2. Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$, si $P \neq 0$, alors par le point précédent, le nombre de racines est majoré par $d^\circ P$ et $d^\circ P \leqslant n$, donc le nombre de racines est majorée par n. Par contraposée, si $P \in \mathbb{K}_n[X]$ a au moins $n+1$ racines, alors P est nul.
3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, si $P \neq 0$, alors le premier point montre que P a un nombre fini de racines. Par contraposée, si P a une infinité de racines, alors $P = 0$. ■

Définition de la multiplicité d'une racine

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul. On dit que la **multiplicité** (ou d'**ordre**) de $a \in \mathbb{K}$ dans P vaut $m \in \mathbb{N}$ s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - a)^m Q$ avec $Q(a) \neq 0$.

Remarques 3. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ non nul.

1. Si $m = 0$, alors a n'est pas racine de P.
2. Si $m = 1$, on dit que a est une racine **simple** de P.
3. Si $m = 2$, on dit que a est une racine **double** de P.
4. Si $P = (X - a)^m Q$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$, la multiplicité de a est supérieure ou égale à m.

Exemple 7. Donner le degré, le coefficient dominant, les racines et leur multiplicités de $P = 3(X-1)^4(X-2)^2$.

Théorème n° 1 de d'Alembert-Gauss (théorème fondamental de l'algèbre) *(admis)*

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non constant, alors P admet au moins une racine complexe.

Exemple 8. Quelles sont les racines complexes/réelles de X^2+1 ?

Théorème n° 2 : factorisation d'un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$

Si $P \in \mathbb{C}[X]$ est non constant, alors il se factorise $P = \lambda \prod_{i=1}^{r}(X - z_i)^{m_i}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^\star$, m_i des entiers naturels non nuls et les z_i des complexes deux à deux distincts. Cette décomposition est unique à l'ordre des facteurs près : λ est le coefficient dominant, les z_i sont exactement les racines de P et m_i est la multiplicité de z_i.

Démonstration du théorème n° 2 :

- Posons, pour $k \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse de récurrence : $\mathscr{P}(k)$: «Si $d^\circ P = k$, alors il existe des complexes z_i deux à deux distincts, des entiers naturels non nuls m_i et $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $P = \lambda \prod_{i=1}^{r}(X - z_i)^{m_i}$ ».
  - Si $k = 1$. Prenons donc $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 1. Alors $P = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ et $a \neq 0$, alors $P = a\left(X - \dfrac{-b}{a}\right)$. P est donc bien de la forme voulue. Ainsi, $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
  - Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons par récurrence forte que pour tout $j \in [\![1\,;k]\!]$, $\mathscr{P}(j)$ vraie. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $d^\circ P = k+1 \geqslant 1$. Alors d'après le théorème de d'Alembert-Gauss, P admet une racine $z_1 \in \mathbb{C}$. Notons $m_1 \in \mathbb{N}^*$ sa multiplicité : il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = (X - z_1)^{m_1}Q$ avec $Q(z_1) \neq 0$.
    - Si Q est constant alors (Q est nécessairement non nul) et $P = \lambda(X - z_1)^{m_1}$ avec $\lambda = Q \in \mathbb{C}^*$ convient.
    - Si $d^\circ Q \geqslant 1$, remarquons que $n + 1 = d^\circ P = m_1 + d^\circ Q$. Ceci prouve que $d^\circ Q = k + 1 - m_1 \leqslant n$ (car $m_1 \geqslant 1$). Si on note $j = d^\circ Q$, alors $j \in [\![1\,;n]\!]$, d'après l'hypothèse de récurrence forte, $\mathscr{P}(j)$ est vraie. Donc $Q = \lambda \prod_{i=2}^{r}(X - z_i)^{m_i}$ pour des z_i 2 à 2 distincts, $m_i \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Notons, que comme $Q(z_1) \neq 0$, $Q(z_2) = 0$, $Q(z_3) = 0$, $\ldots$, $Q(z_r) = 0$, on en déduit que $z_1 \neq z_2$, $z_1 \neq z_3$, $\ldots$, $z_1 \neq z_r$. Ainsi, $P = \lambda \prod_{i=1}^{r}(X - z_i)^{m_i}$ avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les z_i 2 à 2 distincts et $m_i \in \mathbb{N}^*$.

    Ainsi, $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
  - Par récurrence forte, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.
- Montrons que si $P = \lambda \prod_{i=1}^{r}(X - z_i)^{m_i}$ avec les z_i deux à deux distincts, les m_i des entiers naturels non nuls et $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors nécessairement les racines de P sont exactement les z_i avec chacune une multiplicité m_i et que λ est le coefficient dominant. Fixons $j \in [\![1\,;r]\!]$, alors, en isolant le terme pour $i = j$:

$$P = (X - z_j)^{m_j}\lambda \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}(X - z_i)^{m_i} = (X - z_j)^{m_j}Q \quad \text{avec} \quad Q(z_i) = \lambda \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{r}(z_j - z_i)^{m_i} \neq 0$$

  Donc z_j est bien une racine de P de multiplicité m_j. Réciproquement si z est une racine de P alors $0 = P(z) = \lambda \prod_{i=1}^{r}(z - z_i)^{m_i}$, un produit de termes étant nul, on en déduit que l'un d'eux est nul, donc il existe $i \in [\![1\,;r]\!]$ tel que $(z - z_i)^{m_i} = 0$, donc que $z = z_i$, ainsi les racines de P sont exactement les z_i. De plus, en développant le produit $P = \lambda \prod_{i=1}^{r}(X - x_i)^{m_i}$, le terme de plus haut degré est $\lambda X^{\sum_{i=1}^{r} m_i}$ avec $\lambda \neq 0$, ainsi λ est bien le coefficient dominant de P. ■

Racines n-ièmes et factorisation du polynôme $X^n - 1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P = X^n - 1$

1. Démontrer que $w_k = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{2k\pi}{n}}$, pour $k \in \mathbb{Z}$, est une racine de P.
2. Démontrer que les nombres complexes w_k, pour $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, sont deux à deux distincts.
3. Factoriser $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.

Remarque 4. Un polynôme à coefficients complexes de degré n a donc toujours exactement n racines complexes comptées avec multiplicité contrairement au nombre de racines réelles d'un polynôme à coefficients réels. Ainsi, les réels sont plus complexes que les complexes...

Exemple 9. Combien $P = (X^2+1)(X^2-6X+9)$ admet-il de racines réelles ? complexes ?

4 Dérivée d'un polynôme (pas vraiment au programme)

Remarque 5. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$. Par somme de fonctions dérivables, $P\colon x \mapsto a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $P'\colon x \mapsto 0 + \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} x^j$, ainsi P' est un polynôme et $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1}$. Or, vous savez dériver des fonctions dont la variable est réelle mais pas complexe. La définition suivante va généraliser par métonymie :

Définition de la dérivée formelle d'un polynôme

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on définit le polynôme **dérivé** de P par $P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} X^j \in \mathbb{C}[X]$.

Proposition n° 9 : propriétés de la dérivation de polynômes

Soient $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors :

1. $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$
2. $(PQ)' = P'Q + PQ'$

Démonstration de la proposition n° 9 : Prenons $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$ (encore une fois, on complète avec des zéros pour que les sommes finissent avec le même indice n).

1. Alors, $(\lambda P + Q) = \sum_{k=0}^{n} (\lambda a_k + b_k) X^k$. Ainsi :

$$(\lambda P + Q)' = \sum_{k=1}^{n} k(\lambda a_k + b_k) X^{k-1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} + \sum_{k=1}^{n} k b_k X^{k-1} = \lambda P' + Q'$$

2. Par produit de deux polynômes et par dérivation :

$$\begin{aligned} PQ &= \sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^k \\ (PQ)' &= \sum_{k=1}^{2n} \left(k \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) X^{k-1} \underset{j=k-1}{=} \sum_{j=0}^{2n-1} \left((j+1) \sum_{i=0}^{j+1} a_i b_{j+1-i} \right) X^j \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} PQ' + P'Q &= \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) b_{k+1} X^k + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k \sum_{k=0}^{n} b_k X^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i (k-i+1) b_{k-i+1} \right) X^k + \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} (i+1) a_{i+1} b_{k-i} \right) X^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i (k-i+1) b_{k-i+1} + \sum_{i=1}^{k+1} i a_i b_{k+1-i} \right) X^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \left(\sum_{i=0}^{k+1} a_i (k-i+1) b_{k-i+1} + i a_i b_{k+1-i} \right) X^k \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} \left((k+1) \sum_{i=0}^{k+1} a_i b_{k+1-i} \right) X^k \end{aligned}$$

Ainsi, $(PQ)' = PQ' + P'Q$. ■

Proposition n° 10 : caractérisation d'une racine non simple à l'aide de la dérivée

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul et $\alpha \in \mathbb{C}$.
La multiplicité de α dans P est supérieure ou égale à 2 si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.
Le nombre α est racine simple de P si et seulement si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$.

Démonstration de la proposition n° 10 : Supposons que la multiplicité de α dans P est supérieure ou égale à 2, alors il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)^2 Q$, alors $P(\alpha) = (\alpha-\alpha)^2 Q(\alpha) = 0$ et $P' = 2(X-\alpha)Q + (X-\alpha)^2 Q'$ de sorte que $P'(\alpha) = 2(\alpha-\alpha)Q(\alpha) + (\alpha-\alpha)^2 Q'(\alpha) = 0$. Réciproquement, supposons que $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$, alors α est racine de P, donc d'après la proposition 6, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X-\alpha)Q$, alors $P' = Q + (X-\alpha)Q'$ donc $0 = P'(\alpha) = Q(\alpha) + (\alpha-\alpha)Q'(\alpha)$ donc $Q(\alpha) = 0$, ainsi, en utilisant à nouveau la proposition 6, il existe $R \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = (X-\alpha)R$, ainsi, $P = (X-\alpha)^2 R$ et donc la multiplicité de α dans P est supérieure ou égale à 2.

Si α est racine simple de P, alors $P(a) = 0$, si $P'(\alpha) = 0$, par ce qui précède, α serait racine au moins double ce qui est absurde, donc $P'(\alpha) \neq 0$.

Réciproquement, si $P(\alpha) = 0$ et $P'(\alpha) \neq 0$, alors α est racine donc sa multiplicité est supérieure ou égale à 1 et si elle était supérieure ou égale à 2 par ce qui précède, on aurait $P'(\alpha) = 0$ ce qui est exclus, donc α est une racine simple de P. ■