

Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3. 1. (a) En multipliant par le conjugué du dénominateur, on obtient :

$$f(z) = \frac{(1+iz)(\overline{1-iz})}{|1-iz|^2} = \frac{(1+iz)(\overline{1-i\bar{z}})}{|1-iz|^2} = \frac{(1+iz)(1+i\bar{z})}{|1-iz|^2} = \frac{(1-z\bar{z}) + i(z+\bar{z})}{|1-iz|^2} = \frac{1-|z|^2}{|1-iz|^2} + i \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|1-iz|^2}$$

Ainsi, $f(z) \in \mathbb{R}$ ssi $\operatorname{Im}(f(z)) = 0$ ssi $\operatorname{Re}(z) = 0$ ssi $z \in i\mathbb{R} \setminus \{i\}$.

(b) En reprenant le calcul de $f(z)$ de la question précédente, $f(z) \in i\mathbb{R}$ ssi $\operatorname{Re}(f(z)) = 0$ ssi $|z|^2 = 1$ ssi $z \in \mathbb{U} \setminus \{i\}$.

(c) $|f(z)| = 1$ ssi $|1+iz|^2 = |1-iz|^2$ ssi $(1+iz)(1-i\bar{z}) = (1-iz)(1+i\bar{z})$ ssi $1+i(z-\bar{z})+|z|^2 = 1+i(-z+\bar{z})+|z|^2$ ssi $2i(z-\bar{z}) = 0$ ssi $2i(2i\operatorname{Im}(z)) = 0$ ssi $\operatorname{Im}(z) = 0$ ssi $z \in \mathbb{R}$.

2. Le premier cas correspond à l'axe des ordonnées privé de i . Le second cas correspond au cercle trigonométrique privé de i . Le dernier cas correspond à l'axe des abscisses.

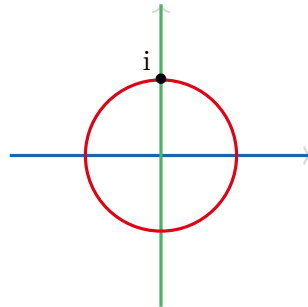


FIGURE 1 – En vert le premier cas, en rouge le second et en bleu le dernier. Le point i est exclu des ensembles considérés.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6. 1.

2. $|1+i| = \sqrt{2}$, ainsi

$$1+i = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = \sqrt{2} (\cos(\pi/4) + i \sin(\pi/4)) = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$$

Ainsi, en utilisant la formule de Moivre, $z = (\sqrt{2})^n (e^{i\pi/4})^n = (\sqrt{2})^n e^{i\frac{\pi n}{4}}$ Ainsi, $|z| = 2^{n/2}$ et $\arg(z) \equiv \frac{\pi n}{4} [2\pi]$.

3. On commence par factoriser par l'angle moitié

$$z = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2 \sin(\theta/2) e^{i\frac{\theta}{2}} (-i) = 2 \sin(\theta/2) e^{i\frac{\theta}{2}} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Alors $|z| = |2 \sin(\theta/2)|$. Il faut distinguer les cas suivant le signe du sinus :

- Si $\sin(\theta/2) \geq 0$, alors $|z| = 2 \sin(\theta/2)$ et alors $z = |z| e^{i(\theta/2-\pi/2)}$ et ainsi $\arg(z) \equiv (\theta - \pi)/2 [2\pi]$.
- Si $\sin(\theta/2) < 0$, alors $|z| = -2 \sin(\theta/2)$ et alors

$$z = |z|(-1) \times e^{i(\theta/2-\pi/2)} = |z| e^{i\pi} \times e^{i(\theta/2-\pi/2)} = |z| \times e^{i(\theta/2-\pi/2+\pi)}$$

et ainsi $\arg(z) = (\theta + \pi)/2 [2\pi]$.

4. Tout d'abord, il est nécessaire que $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. De plus,

$$|z| = \sqrt{1^2 + \tan^2(\theta)} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(\theta)}} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(\theta)}} = \frac{1}{|\cos(\theta)|}$$

Ainsi, il faut distinguer les cas suivant le signe de $\cos(\theta)$:

- Si $\cos(\theta) > 0$, $|z| = \frac{1}{\cos(\theta)}$, ainsi on factorise par $|z|$ dans z :

$$z = \frac{1}{\cos(\theta)} (\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = \frac{1}{\cos(\theta)} e^{i\theta}$$

Ainsi, dans ce cas $|z| = 1/\cos(\theta)$ et $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.

- Si $\cos(\theta) < 0$, $|z| = \frac{-1}{\cos(\theta)}$, ainsi on factorise par $|z|$ dans z :

$$z = \frac{-1}{\cos(\theta)} (-\cos(\theta) - i \sin(\theta)) = \frac{-1}{\cos(\theta)} (\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)) = \frac{-1}{\cos(\theta)} e^{i\theta + \pi}$$

Ainsi, dans ce cas $|z| = -1/\cos(\theta)$ et $\arg(z) \equiv \theta + \pi [2\pi]$.

5. Remarquons que le dénominateur s'annule ssi $\theta \equiv 0 [2\pi]$. On considère donc $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. En factorisant encore par l'angle moitié

$$z = \frac{1 + \cos(\theta) + i \sin(\theta)}{1 - (\cos(\theta) + i \sin(\theta))} = \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2})}{e^{i\theta/2} (e^{-i\theta/2} - e^{i\theta/2})} = \frac{2 \cos(\theta/2)}{-2i \sin(\theta/2)} = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} i = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} e^{i\pi/2}$$

Ce qui nous force, encore une fois, à distinguer les cas :

- Si $\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} > 0$, alors $|z| = \frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ et $\arg(z) \equiv \pi/2 [2\pi]$.
- Si $\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)} < 0$, alors $|z| = -\frac{\cos(\theta/2)}{\sin(\theta/2)}$ et $z = |z| \times (-1) \times e^{i\pi/2} = |z| e^{i\pi} e^{i\pi/2} = |z| e^{i3\pi/2}$, ainsi $\arg(z) \equiv 3\pi/2 [2\pi]$.

6.

Correction de l'exercice 7. Posons $z = 1 + i\alpha \neq 0$, ainsi $|z| \neq 0$, notons θ un argument de z compris entre $-\pi$ et π . Alors :

$$z = |z| \left(\frac{1}{|z|} + i \frac{\alpha}{|z|} \right) = |z| e^{i\theta} = |z| (\cos(\theta) + i \sin(\theta))$$

Alors $\cos(\theta) = 1/|z| > 0$, ainsi $\theta \in]-\pi/2; \pi/2[$. De plus, $\sin(\theta) = \alpha/|z|$. En effectuant le quotient, on obtient $\tan(\theta) = \alpha$. Ainsi, $\arctan(\tan(\theta)) = \arctan(\alpha)$. Cependant, comme $\theta \in]-\pi/2; \pi/2[$, on obtient $\theta = \arctan(\alpha)$.

Correction de l'exercice 8. Calculons $|a - b|^2$:

$$\begin{aligned} |a - b|^2 &= (a - b)(\overline{a - b}) = (a - b)(\bar{a} - \bar{b}) = a\bar{a} - a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{b} \\ &= |a|^2 - (a\bar{b} + \bar{a}b) + |b|^2 = |a|^2 - 2\operatorname{Re}(a\bar{b}) + |b|^2 \end{aligned}$$

De même, calculons $|a + b|^2$:

$$\begin{aligned} |a + b|^2 &= (a + b)(\overline{a + b}) = (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) = a\bar{a} + a\bar{b} + b\bar{a} + b\bar{b} \\ &= |a|^2 + (a\bar{b} + \bar{a}b) + |b|^2 = |a|^2 + 2\operatorname{Re}(a\bar{b}) + |b|^2 \end{aligned}$$

En sommant ces deux résultats, on obtient $|a - b|^2 + |a + b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$, en divisant par deux, on trouve le résultat demandé.

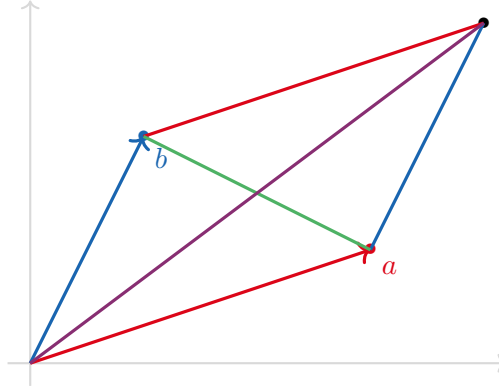


FIGURE 2 – Interprétation graphique de la formule de l'exercice 8, $|a|$ est la longueur d'un côté d'un parallélogramme, $|b|$ est la longueur d'un côté adjacent. Ainsi, $2|a|^2 + 2|b|^2$ est la somme des carrés des quatre côtés du parallélogramme, $|a + b|$ est la longueur de la plus grande diagonale en violet, $|a - b|$ est la longueur de la plus petite diagonale en vert.

Correction de l'exercice 9. 1. Posons l'hypothèse de récurrence, $\mathcal{P}(n)$: «Pour tout $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$,

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|.$$

- Pour $n = 2$, soit $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$, alors, on sait d'après l'inégalité triangulaire que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$. Ainsi, $\mathcal{P}(2)$ est vraie.
- Soit un entier $n \geq 2$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1}$. Alors :

$$\left| \sum_{k=1}^{n+1} z_k \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^n z_k \right) + z_{n+1} \right| \stackrel{\mathcal{P}(2)}{\leq} \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| + |z_{n+1}| \stackrel{\mathcal{P}(n)}{\leq} \sum_{k=1}^n |z_k| + |z_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k|$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, ceci montre que pour tout entier $n \geq 2$ et tout $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |z_k|$.

2. Soit $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$.

- Supposons que $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$. Distinguons deux cas :
 - Si pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $z_i = 0$, alors il est vrai de dire que pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $z_i = \lambda_i z_1$ avec $\lambda_i = 0 \geq 0$.
 - S'il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $z_i \neq 0$. Soit $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, supposons qu'il n'existe pas de $\lambda_j \geq 0$ tel que $z_j = \lambda_j z_i$. Alors, d'après le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, $|z_i + z_j| < |z_i| + |z_j|$. Ainsi,

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \left| z_i + z_j + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n z_k \right| \leq |z_i + z_j| + \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n z_k \right| \leq |z_i + z_j| + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n |z_k| < |z_i| + |z_j| + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n |z_k| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Ainsi, il n'y a pas égalité ce qui est absurde. On peut en conclure qu'il existe $\lambda_j \geq 0$, tel que $z_j = \lambda_j z_i$, et ce pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

- Réciproquement, s'il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que pour tout $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$, il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_j = \lambda_j z_i$, alors :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n z_k \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k z_i \right| = \left| \left(\sum_{k=1}^n \lambda_k \right) z_i \right| = \left| \sum_{k=1}^n \lambda_k \right| \times |z_i| = \left(\sum_{\substack{k=1 \\ \lambda_k \geq 0}}^n \lambda_k \right) |z_i| \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k |z_i| \stackrel{\lambda_k \geq 0}{=} \sum_{k=1}^n |\lambda_k z_i| = \sum_{k=1}^n |z_k| \end{aligned}$$

3. Le cas d'égalité est possible que si tous les z_k sont alignés sur une même demi-droite partant de 0 (la demi-droite dirigée par z_i si $z_i \neq 0$, si $z_i = 0$ tous les points sont nuls).

Correction de l'exercice 10. On remarque que $|z_1|^2 = a^2 + b^2 = n_1$ et $|z_2|^2 = c^2 + d^2 = n_2$. Considérons alors $z_3 = z_1 z_2 = ac - bd + i(ad + bc)$. Alors $|z_3|^2 = |z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2 = n_1 n_2 = (ac - bd)^2 + (ad + bc)^2$. Comme $ad + bc \in \mathbb{N}$ (somme et produits d'entiers naturels). En outre $ac - bd \in \mathbb{Z}$ (la différence d'entiers naturels peut être négatif). Cependant, comme la fonction carrée est paire, $n_1 n_2 = (|ac - bd|)^2 + (ad + bc)^2$ est bien une somme de deux carrés.

Correction de l'exercice 11. Procédons par analyse-synthèse :

- **Analyse :** soit $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$ et pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z + z') = f(z) + f(z')$ et $f(z z') = f(z) f(z')$. Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Le but est de calculer explicitement, $f(z)$:

$$f(z) = f(a + ib) = f(a) + f(ib) = f(a) + f(i)f(b) = a + f(i)b$$

Cependant, on ne connaît pas $f(i)$. Comme $i \times i = -1$, on $f(-1) = f(i \times i) = f(i) \times f(i) = f(i)^2$. Ainsi, $f(i)^2 = -1$. Ainsi, $f(i)$ est une racine carrée de -1 , or il y a deux racines carrées de -1 : i et $-i$. Ainsi, nécessairement, $f(i) = i$ ou $f(i) = -i$. Dans le premier cas, $f(z) = a + ib = z$, ainsi $f: z \mapsto z$. Dans le second cas, $f(z) = a - ib = \bar{z}$, ainsi, $f: z \mapsto \bar{z}$.

- **Synthèse :** posons les fonctions suivantes :

$$f: \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto z \end{cases} \quad \text{et} \quad g: \begin{cases} \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ z \longmapsto \bar{z} \end{cases}$$

Et vérifions qu'elles conviennent. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x$, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $f(z + z') = z + z' = f(z) + f(z')$ et $f(z z') = z z' = f(z) f(z')$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \bar{x} = x$, pour tout $(z, z') \in \mathbb{C}^2$, $g(z + z') = \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'} = g(z) + g(z')$ et $g(z z') = \overline{z z'} = \bar{z} \bar{z'} = g(z) g(z')$ (d'après les propriétés du cours sur le conjugué d'un complexe). Ainsi, les fonctions f et g ainsi posées vérifient bien les conditions demandées.

La synthèse montre que les fonctions $z \mapsto z$ et $z \mapsto \bar{z}$ vérifient bien les propriétés recherchées. L'analyse montre que ce sont les seules fonctions.

Correction de l'exercice 12. Soit $t \in \mathbb{R}$,

$$|e^{it} - 1| = \sqrt{(\cos(t) - 1)^2 + \sin^2(t)} = \sqrt{\cos^2(t) - 2\cos(t) + 1 + \sin^2(t)} = \sqrt{2(1 - \cos(t))}$$

Or $\sin^2(t) = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$. Ainsi, $1 - \cos(t) = 2\sin^2(t/2)$. Dès lors, $|e^{it} - 1| = \sqrt{4(\sin^2(t/2))} = 2|\sin(t/2)|$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$. Ainsi, $|e^{it} - 1| \leq 2|t/2| = |t|$. On peut donner une interprétation graphique de cette inégalité (voir figure 3).

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19. 1. Remarquons que :

- $P(1) = 1^3 - 1 = 0$
- D'après la formule de Moivre, $P(j) = j^3 - 1 = e^{i2\pi} - 1 = 0$

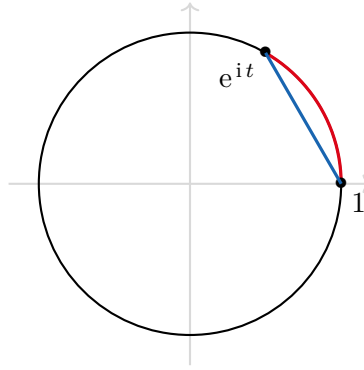


FIGURE 3 – $|e^{it} - 1|$ représente la longueur du segment d'extrémités 1 et e^{it} . Ce segment est en bleu, $|t|$ représente la valeur absolue de l'angle de e^{it} donc la longueur de l'arc, cet arc est en rouge. Comme la ligne droite est le plus court chemin qui relie deux points, $|e^{it} - 1| \leq |t|$

- Encore une fois, d'après la formule de Moivre, $P(j^2) = j^6 - 1 = e^{i4\pi} - 1 = 0$.

De plus, comme $j = \frac{-1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ et $j^2 = \frac{-1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$, on remarque 1, j et j^2 sont trois nombres complexes deux à deux distincts, on a donc trouvé trois racines distinctes de $X^3 - 1$, comme c'est un polynôme de degré 3, il a donc au plus 3 racines et on a donc trouvé toutes ces racines.

- $\bar{j} = e^{i-\frac{2\pi}{3}} = e^{i-\frac{2\pi}{3}+2\pi} = j^2$
 - $1 \times j \times j^2 = j^3 = 1$
 - $1 + j + j^2 = \frac{1-j^3}{1-j} = \frac{1-1}{1-j} = 0$ (somme des termes d'une suite géométrique de raison $j \neq 1$)
 - $j(j+1) = j^2 + j = -1$.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21. 1. D'après la formule de Moivre, $w^5 = e^{i\frac{10\pi}{5}} = e^{i2\pi} = 1$ En reconnaissant la somme des termes d'une suite géométrique de raison $w \neq 1$,

$$1 + w + w^2 + w^3 + w^4 = \frac{1 - w^5}{1 - w} = 0$$

$$a = w + w^4 = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{i\frac{8\pi}{5}} = e^{i\frac{2\pi}{5}} + e^{-i\frac{2\pi}{5}} = 2\cos(2\pi/5). \text{ De même } b = w^2 + w^3 = e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{i\frac{6\pi}{5}} = e^{i\frac{4\pi}{5}} + e^{-i\frac{4\pi}{5}} = 2\cos(4\pi/5).$$

2.

$$a + b = w + w^2 + w^3 + w^4 = -1$$

De plus, $ab = (w + w^4)(w^2 + w^3) = w^3 + w^4 + w^6 + w^7 = w^3 + w^4 + w^1 + w^2 = -1$. Ainsi, a et b sont racines du polynôme $(X - a)(X - b) = X^2 - (a + b)X + ab = X^2 + X - 1$.

3. Les racines de ce polynôme sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

4. Comme $2\pi/5 \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\cos(2\pi/5) > 0$ et donc $a > 0$. Ainsi, comme $\frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$, nécessairement $a = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $b = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$. Dès lors, $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$. De plus, $\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) \geq 0$. Ainsi,

$$\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \sqrt{1 - \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{6 - 2\sqrt{5}}{16}\right)} = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$$

Correction de l'exercice 22.

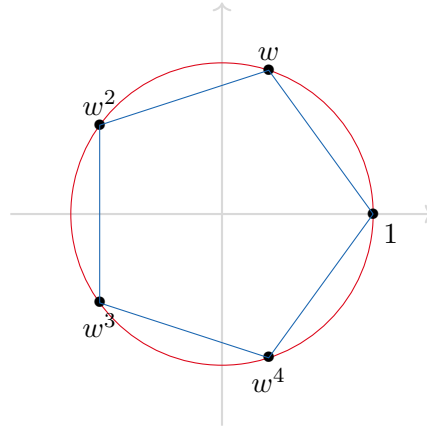


FIGURE 4 – Le pentagone régulier formé par les cinq racines de l'unité.

Correction de l'exercice 23. z et z' sont solutions de ce système ssi z et z' sont racines de

$$P = (X - z)(X - z') = X^2 - (z + z')X + zz' = X^2 - (5 + 2i)X + 5 + 5i$$

Cherchons donc les racines de $P = X^2 - (5 + 2i)X + 5 + 5i$. Le discriminant vaut

$$\Delta = (-(5 + 2i)^2) - 4(5 + 5i) = 25 + 20i - 4 - 20 - 20i = 1 = (1)^2$$

Ainsi les solutions sont $\frac{5 + 2i - 1}{2}$ et $\frac{5 + 2i + 1}{2}$ ainsi soit $z = 2 + i$ et $z' = 3 + i$ soit $z = 3 + i$ et $z' = 2 + i$.

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25. Notons $P = aX^{n+1} + bX^n + 1$, d'après le cours, P est factorisable par $(X - 2)^2$ ssi 2 est racine de multiplicité ¹ au moins deux dans P ssi $P(2) = P'(2) = 0$. Or,

$$\begin{aligned} P(2) = P'(2) = 0 & \iff \begin{cases} a2^{n+1} + b2^n &= -1 \\ (n+1)a2^n + nb2^{n-1} &= 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} \xleftrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{n}{2} L_1} \\ \iff \end{matrix} \begin{cases} a2^{n+1} + b2^n &= -1 \\ a2^n &= \frac{n}{2} \end{cases} \\ & \iff a = \frac{n}{2^{n+1}} \quad \text{et} \quad b = -2^{-n} - \frac{n}{2^n} \end{aligned}$$

Ainsi, seul le couple $\left(\frac{n}{2^{n+1}}, -2^{-n} - \frac{n}{2^n}\right)$ convient.

Correction de l'exercice 26. 1. $X^a - 1 = X^a - 1^a = (X - 1) \sum_{k=0}^{a-1} X^k X^{a-1-k} = (X - 1) \sum_{k=0}^{a-1} X^k$ Ainsi, $X^a - 1$ se factorise par $X - 1$ Autre méthode : 1 est racine de $X^a - 1$ donc $X - 1$ divise $X^a - 1$.

2. S'il existe $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $a = bq$. Alors :

$$X^a - 1 = (X^b)^q - 1^q = (X^b - 1) \sum_{k=0}^{q-1} (X^b)^k 1^{q-1-k} = (X^b - 1) \sum_{k=0}^{q-1} X^{kb}$$

ainsi, $X^a - 1$ se factorise par $X^b - 1$

Correction de l'exercice 27. Soit $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $Q^2 = XP^2$, avec P et Q non nuls. alors d'après les formules sur les degrés, $2d^\circ Q = d^\circ X + 2d^\circ P$. Ainsi, $1 = 2(d^\circ Q - d^\circ P)$ ce qui prouve que 1 est pair ce qui est absurde. Si $P = 0$, alors $Q^2 = 0$ donc $Q = 0$ (car $\mathbb{K}[X]$ est intègre). Si $Q = 0$, alors $XP^2 = 0$ or $X \neq 0$ donc $P = 0$ (car, encore une fois, $\mathbb{K}[X]$ est intègre). Réciproquement $(0, 0)$ est bien solution.

En conclusion, seul $(0, 0)$ vérifie la relation demandée.

1. Ne pas oublier le «au moins», en effet, 2 il pourrait être de multiplicité 3, 4 ou plus.

Correction de l'exercice 28.

Correction de l'exercice 29.

Correction de l'exercice 30. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ vérifiant $P \circ P = P$. Si P est non constant, alors $d^\circ P \times d^\circ P = d^\circ P$. Ainsi, $d^\circ P = 0$ ou $d^\circ P = 1$. Ainsi, si P est solution nécessairement, P est de degré 1 ou constant.

Réciproquement, considérons $P \in \mathbb{K}_1[X]$, ainsi $P = aX + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$. Or,

$$P \circ P = aP + b = a(aX + b) + b = a^2X + ab + b$$

Ainsi, $P \circ P \text{ ssi } \begin{cases} a^2 = a \\ ab + b = b \end{cases} \text{ ssi } (a = 1 \text{ et } b = 0) \text{ ou } a = 0$ Ainsi les solutions sont exactement X et les polynômes constants.

Correction de l'exercice 31.

Correction de l'exercice 32.

Correction de l'exercice 33.

Correction de l'exercice 34.

Correction de l'exercice 35.

Correction de l'exercice 36.

Correction de l'exercice 37. Soit $y \in \mathbb{C}$. On pose, $Q = P - y$, alors $d^\circ Q = d^\circ P \geq 1$. D'après le théorème de d'Alembert-Gauss, Q admet une racine. Il existe $x \in \mathbb{C}$ tel que $Q(x) = P(x) - y = 0$. Par conséquent, $y = P(x)$, le complexe y admet bien un antécédent pour $\tilde{P}$. En conclusion, la fonction polynomiale associée à P est surjective.

Correction de l'exercice 38.

Correction de l'exercice 39. Si P est un tel polynôme, alors on a une somme de 5 réels positifs qui est nulle, donc tous les termes sont nuls. Ainsi, 0, -3, 5, $-\pi$ et 42 sont racines de P avec $d^\circ P \leq 4$. Ainsi, P a plus de racines que son degré. Ainsi P est nul. Réciproquement si $P = 0$, alors on a bien la relation $P(0)^2 + P(-3)^2 + P(5)^4 + P(-\pi)^6 + P(42)^{42} = 0$.

Correction de l'exercice 40. 1. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = Q(n)$. Posons $R = P - Q$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(n) = P(n) - Q(n) = 0$. Ainsi, R a une infinité de racines donc $R = 0$. D'où $P - Q = 0$ ie $P = Q$.

2. Supposons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(\sin(x)) = Q(\sin(x))$. Posons $R = P - Q$, alors, pour tout $a \in [-1; 1]$, $R(a) = P(\sin(\arcsin(a))) - Q(\sin(\arcsin(a))) = 0$. Ainsi, R a une infinité de racines (l'intervalle $[-1; 1]$), ainsi R est nul. Dès lors, $P = Q$.

3. Supposons que $x \mapsto P(x)$ soit périodique. Notons T la période (rappelons alors que $T > 0$). Posons $R = P - P(0)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R(nT) = P(nT) - P(0) = P(0) - P(0) = 0$. Ainsi, R a une infinité de racines (tous les nT pour $n \in \mathbb{N}$ et il y en a une infinité car $T \neq 0$), donc $R = 0$ puis $P = P(0)$ donc P est constant.

Correction de l'exercice 41. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $(X + 3)P(X) = XP(X + 1)$.

- En remplaçant X par 0, on obtient $3P(0) = 0$ donc $P(0) = 0$.
- En remplaçant X par -2, on obtient $2P(-1) = 0$ donc $P(-1) = 0$.
- En remplaçant X par -2, on obtient $1P(-2) = 0$.

Ainsi, 0, -1 et -2 sont racines. Dès lors, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = X(X+1)(X+2)Q$ Ainsi,

$$(X+3)X(X+1)(X+2)Q = X(X+1)(X+2)(X+3)(Q(X+1))$$

Par conséquent $X(X+1)(X+2)(X+3)(Q - Q(X+1)) = 0$. Comme $X(X+1)(X+2)(X+3)$ n'est pas le polynôme nul, par intégrité de $\mathbb{R}[X]$, on en déduit que $Q - Q(X+1) = 0$ Soit $Q(X) = Q(X+1)$. Par conséquent, $x \mapsto Q(x)$ est 1-périodique. D'après la question 3 de l'exercice 40, Q est constant. Par conséquent, $P = \lambda X(X+1)(X+2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, si $P = \lambda X(X+1)(X+2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned}(X+3)P(X) &= \lambda X(X+1)(X+2) \\ XP(X+1) &= \lambda X(X+1)(X+2)(X+3)\end{aligned}$$

Ainsi, $(X+3)P = XP(X+1)$.

Les polynômes vérifiant $(X+3)P = XP(X+1)$ sont donc exactement les polynômes $\lambda X(X+1)(X+2)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 42. Notons a une éventuelle racine multiple de P_n . Alors $P_n(a) = P_n'(a) = 0$.

$P_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{X^k}{k!}$, alors²

$$P_n' = 0 + \sum_{k=1}^n \frac{kX^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^n \frac{X^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} = P_{n-1}$$

Ainsi, $P_n(a) = P_{n-1}(a) = 0$. Par différence $P_n(a) - P_{n-1}(a) = \frac{a^n}{n!} = 0$. Ainsi, nécessairement $a = 0$. Or, $0 = P_n(0) = 1$ ce qui est impossible. Par conséquent, P_n n'a que des racines complexes simples.

Correction de l'exercice 43. 1. Supposons qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\} \quad \frac{1}{x(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2}$$

En multipliant par x et en faisant $x \rightarrow 0$ on obtient $a = 1/2$. En multipliant par $x+1$ et en faisant $x \rightarrow -1$ $b = -1$. En multipliant par $X+2$ et en faisant $x \rightarrow -2$ $c = 1/2$. Ainsi, si a, b , et c existent nécessairement $(a, b, c) = (1/2, -1, 1/2)$. Réciproquement, posons $(a, b, c) = (1/2, -1, 1/2)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1, -2\}$:

$$\begin{aligned}\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} &= \frac{\frac{1}{2}(x+1)(x+2) - x(x+2) + \frac{1}{2}x(x+1)}{x(x+1)(x+2)} \\ &= \frac{x^2 \left(\frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right) + x \left(\frac{3}{2} - 2 + \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} \times 2}{x(x+1)(x+2)} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}\end{aligned}$$

Ainsi, $(a, b, c) = (1/2, -1, 1/2)$ convient et c'est le seul triplet qui conviennent par ce qui a été fait précédemment.

2. En écrivant la fraction en une somme de trois fractions par ce qui précède, on obtient :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k} + \frac{-1}{k+1} + \frac{1}{2(k+2)} = \sum_{k=1}^n \left(\left(\frac{1}{2(k+2)} - \frac{1}{2(k+1)} \right) - \left(\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k} \right) \right)$$

2. Attention quand vous dérivez de bien isoler le terme constant dont la dérivée sera nulle, en effet, écrire $(X^k)' = kX^{k-1}$ est problématique pour $k = 0$, X^{k-1} n'a alors pas de sens. Si vous n'êtes pas convaincu, essayez de remplacer X par 0, c'est encore pire si après vous faites la simplification avec les factorielles avec du $(k-1)!$ si $k = 0$...

En posant $u_k = \frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2k}$, on reconnait une somme télescopique :

$$S_n = \sum_{k=1}^n (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_1 = \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2n+4} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{4}$$

Ainsi, $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 14$, ainsi la série $\sum \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ converge et $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$.

3. En primitivant chacun des éléments, $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{2} \ln(x+2)$ est une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Correction de l'exercice 44.

Correction de l'exercice 45. 1. $r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{0}{1}$ (la somme des racines vaut l'opposé du quotient entre l'avant dernier coefficient et le dernier) Ainsi, $r_1 + r_2 + r_3 = 0$. De plus, $r_1 r_2 r_3 = (-1)^3 \frac{2}{1}$ (le produit des racines vaut $(-1)^n$ multiplié par le coefficient constant divisé par le coefficient dominant). Ainsi, $r_1 r_2 r_3 = -2$.

2. Si $r_1 \geq 0$, alors on aurait $r_2 \geq 0$ et $r_3 \geq 0$, ainsi le produit $r_1 r_2 r_3 \geq 0$ ce qui est impossible. Par conséquent, $r_1 < 0$.
3. Comme $r_1 r_2 r_3 < 0$ avec $r_1 < 0$, $r_2 r_3 > 0$. Ainsi, r_2 et r_3 sont de même signe (soit ils sont tous les deux strictement positifs soit ils sont strictement négatifs) Si $r_2 < 0$ et $r_3 < 0$. Par somme $r_1 + r_2 + r_3 < 0$. Comme $r_1 + r_2 + r_3 = 0$, ceci est impossible. Ainsi, $r_2 > 0$ et $r_3 > 0$. De plus, $r_1 r_2 r_3 = -2$, donc $|r_1| |r_2| |r_3| = 2$. En particulier, $|r_1|$ divise 2 et 2 est premier. Ainsi, soit $|r_1| = 2$ soit $|r_1| = 1$. Distinguons les cas :

- Si $|r_1| = 2$, alors comme $r_1 < 0$, $r_1 = -2$. Et $r_2 r_3 = 1$, ainsi r_2 et r_3 sont des entiers naturels qui divisent 1, ainsi $r_2 = r_3 = 1$. Ici, $(r_1, r_2, r_3) = (-2, 1, 1)$
- Si $|r_1| = 1$, alors $r_1 = -1$ et $r_2 r_3 = 2$. Comme 2 est premier soit $r_2 = 1$ et $r_3 = 2$ soit $r_2 = 2$ et $r_3 = 1$ mais ce dernier cas est impossible car $r_2 \leq r_3$. Ainsi, $(r_1, r_2, r_3) = (-1, 1, 2)$, mais alors $r_1 + r_2 + r_3 = 2 \neq 0$.

Ainsi nécessairement $r_1 = -2$, $r_2 = 1$ et $r_3 = 1$

4. 1 est racine double, donc $P_a'(1) = 0$. Or $P_a' = 3X^2 - (a^2 + 2a)$. Ainsi, $P_a'(1) = 3 - a^2 - 2a$. On a donc l'équation $a^2 + 2a + 3 = 0$, dont les racines sont -3 et 1 . Comme $a \in \mathbb{N}$. Nécessairement, $a = 1$.
5. Si $a = 1$. Alors, $P_a = X^3 - 3X + 2$. Alors $P_a(-2) = 0 = P_a(1) = P_a'(1)$ (car $P_a' = 3X^2 - 3$).
En conclusion, $a = 1$ est la seule valeur telle que P_a est trois racines dans $\mathbb{Z}$.

Correction de l'exercice 46. 1. $P_1 = 1$, $P_2 = 2X$ et $P_3 = 3X^2 - 1$.

2. Par la formule du binôme de Newton

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{2i} \left[\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^{n-k} i^k - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^{n-k} (-i)^k \right] = \frac{1}{2i} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^{n-k} (i^k - (-i)^k) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^{n-k} \left(\frac{i^k - (-i)^k}{2i} \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^{n-k} \frac{e^{ik\frac{\pi}{2}} - e^{-ik\frac{\pi}{2}}}{2i} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^{n-k} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{j=n-k}^n \binom{n}{j} X^j \sin\left(\frac{(n-k)\pi}{2}\right) \in \mathbb{R}[X] \end{aligned}$$

3. Isolons les deux premiers termes dans la somme obtenue précédemment :

$$P_n = \binom{n}{0} \sin(0) X^n + \binom{n}{1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) X^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) X^{n-k} = nX^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n}{j} \sin\left((n-j)\frac{\pi}{2}\right) X^j$$

Comme $n \neq 0$, dès lors, $d^\circ P_n = n - 1$, de plus P_n a pour coefficient dominant n (ce qui est cohérent avec les calculs de P_0 , P_1 et P_2).

4. • Supposons n paire. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $y \mapsto y^n$ est alors paire, on obtient :

$$P_n(-x) = \frac{1}{2i} ((-x+i)^n - (-x-i)^n) = \frac{1}{2i} ((x-i)^n - (x+i)^n) = -P_n(x)$$

Ainsi, la fonction P_n est impaire.

• Supposons n impaire. Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $y \mapsto y^n$ est alors impaire, on obtient :

$$P_n(-x) = \frac{1}{2i} ((-x+i)^n - (-x-i)^n) = \frac{1}{2i} (-(x-i)^n + (x+i)^n) = P_n(x)$$

Ainsi, la fonction P_n est paire.

5. Soit $z \in \mathbb{C}$. Et cherchons une condition nécessaire et suffisante pour que z soit racine de P_n :

$$P_n(z) = 0 \iff \frac{1}{2i} [(z+i)^n - (z-i)^n] = 0 \iff (z+i)^n = (z-i)^n$$

Remarquons alors que $z = i$ n'est pas racine de P_n . Fixons donc $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} P_n(z) = 0 &\iff \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1 \iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad \frac{z+i}{z-i} = e^{i \frac{k2\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad z+i = (z-i)e^{i \frac{k2\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket \quad z(1 - e^{i \frac{k2\pi}{n}}) = -i(e^{i \frac{k2\pi}{n}} + 1) \end{aligned}$$

Remarquons que $k = 0$ est impossible car conduirait à $0 = -2i$. Ainsi,

$$P_n(z) = 0 \iff \exists k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket \quad z = \frac{-i(e^{i \frac{k2\pi}{n}} + 1)}{1 - e^{i \frac{k2\pi}{n}}} = (-i) \frac{e^{i \frac{k\pi}{n}}(e^{-i \frac{k\pi}{n}} + e^{i \frac{k\pi}{n}})}{e^{i \frac{k\pi}{n}}(e^{-i \frac{k\pi}{n}} - e^{i \frac{k\pi}{n}})} = (-i) \frac{2 \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)}{-2i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)}$$

Ainsi, on a trouvé que les racines de P_n sont de la forme $\cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Comme la fonction $\cotan$ est strictement décroissante sur $]0; \pi[$, on en déduit que nous avons trouvé exactement $n-1$ racines distinctes de P_n .

6. D'après ce qui précède, on sait que P_n est un polynôme de degré $n-1$ et de coefficient dominant n dont on connaît $n-1$ racines deux à deux distinctes. $P_n = n \prod_{k=1}^{n-1} \left(X - \cotan\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$

7. Supposons qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ et $(s_0, s_1, \dots, s_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que $S(X) = \sum_{k=1}^N s_k X^{2k}$. Alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad s(-x) = \sum_{k=1}^N s_k (-x)^{2k} = \sum_{k=1}^N s_k x^{2k}$$

Ainsi, $x \mapsto S(x)$ est paire. Réciproquement, supposons que $x \mapsto S(x)$ est paire. Notons $S = \sum_{k=0}^n s_k X^k$,

alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $s(x) = s(-x)$, d'où $\sum_{k=0}^n s_k (x^k - (-x)^k) = 0$. Ainsi, $Q(X) = \sum_{k=0}^n s_k (1 - (-1)^k) X^k$ a

une infinité de racines (tout réel est racine de Q), donc Q est le polynôme nul, donc tous ces coefficients sont nuls. Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $s_k(1 - (-1)^k) = 0$. Or si k est impair, on obtient $2s_k = 0$, donc $s_k = 0$. Ainsi, tous les s_k sont nuls pour k impair. Dès lors $S = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n s_k X^k$. En notant $p = 2k$ et en

faisant un changement d'indice, on obtient $S = \sum_{p=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} s_{2p} (X^2)^p$

8. D'après la question 4, la fonction P_{2n+1} est paire. Donc d'après la question 7, il existe $N \in \mathbb{N}$ et il existe $(x_0, x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que

$$P_{2n+1} = \sum_{k=0}^N x_k X^{2k} = \sum_{k=0}^N x_k (X^2)^k$$

Notons $R_n(X) = \sum_{k=0}^N x_k X^k$. Alors $R_n(X^2) = P_{2n+1}(X)$.

9. Par propriété des degrés, on obtient $d^\circ P_{2n+1} = d^\circ R_n \times d^\circ X^2$. Soit $2n = 2d$, dès lors, $d = n$. Notons $R_n = aX^n + bX^{n-1} + \tilde{R}$ où $\tilde{R} \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$. Le but est de trouver a et b . Comme $R_n(X^2) = P_{2n+1}(X)$, on obtient

$$aX^{2n} + bX^{2n-2} + \tilde{R}(X^2) = \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} \sin\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2}\right) X^k$$

Par identification et en utilisant les coefficients de P_{2n+1} , déterminés à la question 2, on obtient que

$$\begin{aligned} a &= \binom{2n+1}{2n} = 2n+1 \\ b &= -\binom{2n+1}{2n-2} = \binom{2n+1}{3} = -\frac{(2n+1)(2n)(2n-1)}{6} = -\frac{(2n+1)n(2n-1)}{3} \end{aligned}$$

10. Soit $x \in \mathbb{R}_+$, alors $R_n(x) = R_n((\sqrt{x})^2) = P_{2n+1}(\sqrt{x})$. Donc $R_n(x) = 0$ si et seulement si $\sqrt{x}$ est une racine de P_{2n+1} si et seulement si $\sqrt{x} = \cotan(k\pi/(2n+1))$ avec $k \in \llbracket 1; 2n \rrbracket$. Or comme $\sqrt{x} \geq 0$ et que $\cotan(k\pi/(2n+1)) \geq 0$ si $k \leq n$. On en déduit que, pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\cotan(k\pi/(2n+1))^2$ est racine de R_n . Or $d^\circ R_n = n$, donc R_n a au plus n racines, et comme $\cotan^2$ est injective sur $]0; \pi/2[$ (strictement décroissante), on a ainsi trouvé exactement n racines de R_n . Donc, on a toutes les racines de R_n . Dès lors

$$R_n = (2n+1) \prod_{k=1}^n \left(X - \cotan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 \right)$$

11. On sait, d'après le résultat de l'exercice 34, on sait que si $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ avec $a_n \neq 0$, alors la somme des racines de P vaut $-\frac{a_{n-1}}{a_n}$, on obtient donc ici

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = -\frac{(2n+1)n(2n-1)}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$$

12. Considérons $f: x \mapsto x - \sin(x)$. Comme f est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f': x \mapsto 1 - \cos(x) \geq 0$. Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geq f(0) = 0$. Ainsi, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leq x$. De plus, pour $x \in]0; \pi/2[$, $\sin(x) > 0$. Posons maintenant $g: x \mapsto \tan(x) - x$, comme g est la différence de deux fonctions dérivables sur $]0; \pi/2[$, g est dérivable sur cet intervalle et $g': x \mapsto 1 + \tan^2(x) - 1 = \tan^2(x) \geq 0$, ainsi g est croissante sur $]0; \pi/2[$ et pour tout $x \in]0; \pi/2[$, $g(x) \geq 0$, ainsi $\tan(x) \geq x$. Ainsi, pour tout $\theta \in]0; \pi/2[$, $0 < \sin(\theta) \leq \theta \leq \tan(\theta)$.

13. Soit $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, alors $\theta_p = \pi \frac{p}{2n+1}$, avec $0 < \frac{p}{2n+1} \leq \frac{n}{2n+1} < \frac{1}{2}$, ainsi, $\theta_p \in]0; \pi/2[$, dès lors on peut appliquer le résultat de la question précédente à θ_p , ainsi $\sin(\theta_p) \leq \theta_p \leq \tan(\theta_p)$. Or la fonction $x \mapsto x^{-2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $\theta_p^{-2} \leq \cotan^2(\theta_p)$. De plus,

$$1 + \cotan^2(\theta_p) = 1 + \frac{\cos^2(\theta_p)}{\sin^2(\theta_p)} = \frac{1}{\sin^2(\theta_p)}$$

Comme $0 < \sin(\theta_p) \leq \theta$ et que $x \mapsto x^{-2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que $1 + \cotan^2(\theta_p) = \frac{1}{\sin^2(\theta_p)} \geq \theta_p^{-2}$. En réunissant ces deux résultats :

$$\cotan^2(\theta_p) \leq \frac{1}{\theta_p^2} \leq 1 + \cotan^2(\theta_p)$$

14. En sommant les inégalités obtenues à la question précédente pour $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on obtient

$$\sum_{k=1}^n \cotan^2(\theta_p) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\theta_p^2} \leq \sum_{k=1}^n (1 + \cotan^2(\theta_p)) = n + \sum_{k=1}^n \cotan^2(\theta_p)$$

En utilisant le résultat de la question 12 et la définition de θ_p , il vient :

$$\frac{n(2n-1)}{3} \leq \sum_{k=1}^n \frac{(2n+1)^2}{k^2 \pi^2} \leq n + \frac{n(2n-1)}{3}$$

Soit

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \leq \frac{(n\pi^2)}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$$

Or, $2n-1 \sim 2n$, par produit, $n(2n-1) \sim 2n^2$, et $2n+1 \sim 2n$, par produit, $3(2n+1)^2 \sim 12n^2$ par quotient d'équivalents,

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \sim \frac{\pi^2 2n^2}{12n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Or, si une suite est équivalente à une constante non nulle, d'après le cours, elle tend vers cette constante. Ainsi,

$$\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6}$$

Par somme de limites finies

$$\frac{(n\pi^2)}{(2n+1)^2} + \frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6}$$

Grâce au théorème d'encadrement, on en conclut que $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{6}$. Par conséquent, $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.