Chapitre 6
Espaces vectoriels

Objectifs :
Définir la notion d'espaces vectoriels. À la façon de monsieur Jourdain, vous utilisiez déjà des exemples espaces vectoriels sans le savoir. L'étude de la notion d'espace vectoriel permet d'étudier tous ces exemples en même temps.
Prérequis :

- Ensembles et applications
- Systèmes linéaires
- Matrices
- Polynômes

Table des matières

1 Définition des espaces vectoriels **2**

2 Sous-espaces vectoriels **5**

3 Combinaison linéaire, espace vectoriel engendré **7**

4 Propriétés des familles finies d'un espace vectoriel **8**
4.1 Famille libre 8
4.2 Famille génératrice 10
4.3 Bases 10

5 Construction de la théorie de la dimension finie **11**

6 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie **13**
6.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel 13
6.2 Rang d'une famille de vecteurs 14

7 Méthodes **15**

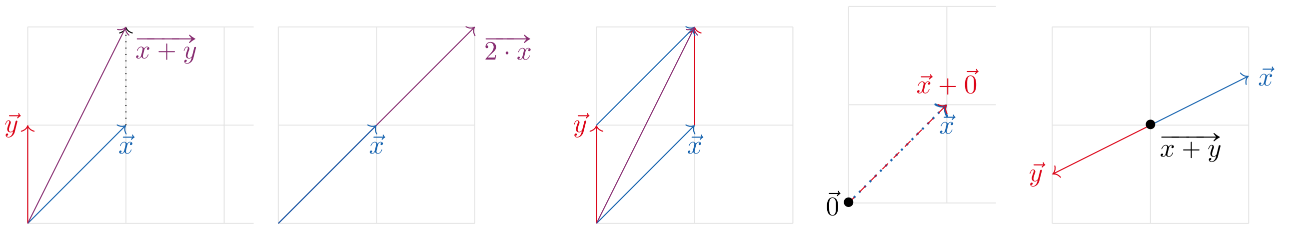
8 Carte mentale pour étudier la liberté d'une famille **16**

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et n un entier non nul.

1 Définition des espaces vectoriels

Avant de donner la définition d'un espace vectoriel, regardons quelques exemples :

1. Soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on les somme : $x + y = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$. On multiplie aussi x par $\lambda \in \mathbb{R}$: $\lambda \cdot x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$



(a) $(1,1) + (0,1) = (1,2)$ (b) $2 \cdot (1,1) = (2,2)$ (c) $\vec{x} + \vec{y} = \vec{y} + \vec{x}$ (d) $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$ (e) Il existe $\vec{y}$ tel que $\vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$

Figure 1 – Les vecteurs de $\mathbb{R}^2$ représentés avec des flèches. Et quelques propriétés sur les vecteurs.

2. De même, étant donnés deux polynômes P et $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on obtient $P + Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda P \in \mathbb{K}[X]$.
3. Soient deux fonctions $(f, g) \in (\mathbb{R}^I)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $f + g \colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) + g(x) \end{cases} \in \mathbb{R}^I$ et $\lambda f \colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{cases} \in \mathbb{R}^I$
4. Soient $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $A + B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Remarque 1. Dans la suite, la notion d'espace vectoriel généralise ces exemples. Ainsi, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{F}(I, \mathbb{R})$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ etc. seront des espaces vectoriels, les éléments de ces ensembles seront appelés des vecteurs.

Définition d'un espace vectoriel

On appelle **$\mathbb{K}$-espace vectoriel** un ensemble E muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ vérifiant :

1. L'**addition** dite **interne**, pour tout $(x, y) \in E^2$ $x + y \in E$ vérifiant :
   (a) $\forall (x, y) \in E^2 \quad x + y = y + x$ (l'addition de vecteurs est commutative)
   (b) $\forall (x, y, z) \in E^3 \quad (x + y) + z = x + (y + z)$ (l'addition de vecteurs est associative)
   (c) $\exists 0_E \in E \quad \forall x \in E \quad x + 0_E = x$ (il existe un vecteur nul noté 0_E)
   (d) $\forall x \in E \quad \exists y \in E \quad x + y = 0_E$ (tout vecteur x admet un vecteur opposé y).
2. La **multiplication** dite **externe**, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$, $\lambda \cdot x \in E$, vérifiant :
   (a) $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$ (multiplier un vecteur par 1 ne change pas le vecteur)
   (b) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad \lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$ (pseudo-associativité)
   (c) $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2 \quad \forall x \in E \quad (\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (pseudo-distributivité de $\cdot$ par rapport à $+$)
   (d) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall (x, y) \in E^2 \quad \lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (distributivité de $\cdot$ par rapport $+$)

Les éléments de E sont alors appelés **vecteurs** de E, 0_E est appelé **vecteur nul** de E.

Remarque 2. Voilà une définition particulièrement rebutante. L'important est surtout de comprendre ce que ça veut dire. Que faites-vous avec des vecteurs ? Les additionner ensemble, et les multiplier par un scalaire. Cette définition n'est que la formalisation de cette idée avec tout un tas d'exigences raisonnables, par exemple :

- Le point 1a exige seulement que lorsqu'on ajoute deux vecteurs l'ordre n'intervient pas.
- Le point 1c exige juste qu'il existe un vecteur nul.

Exemples classiques d'espaces vectoriels

Les ensembles suivants sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels :

I. $\mathbb{K}^n$ (i.e. $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel)

II. $\mathbb{K}[X]$

III. $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (l'ensemble des matrices de n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$)

IV. $\mathbb{K}^I = \mathscr{F}(I, \mathbb{K})$ où I est un ensemble non vide (l'ensemble des applications de I dans $\mathbb{K}$)

Démonstration que ce sont des espaces vectoriels :

I. Si $E = \mathbb{K}^n$, alors les applications suivantes sont bien définies :

$$\begin{cases} \mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) & \longmapsto (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (\lambda, (x_1, x_2, \dots, x_n)) & \longmapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$$

Fixons $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ trois éléments de $\mathbb{K}^n$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\mu \in \mathbb{K}$.

1. (a) $x + y = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (y_1 + x_1, \dots, y_n + x_n) = y + x$

   (b)
$$\begin{aligned} (x + y) + z &= ((x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n)) + z \\ &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) + (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x_1 + y_1 + z_1, \dots, x_n + y_n + z_n) \\ &= (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1 + z_1, \dots, y_n + z_n) = x + (y + z) \end{aligned}$$

   (c) Posons $z = (0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{K}^n$, alors $x + z = (x_1 + 0, \dots, x_n + 0) = x$, z est bien un vecteur nul.

   (d) Posons $m = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $x + m = (x_1 - x_1, \dots, x_n - x_n) = (0, 0, \dots, 0) = z$.

2. (a) $1 \cdot x = 1 \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (1x_1, 1x_2, \dots, 1x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) = x$

   (b) $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = \lambda \cdot (\mu x_1, \dots, \mu x_n) = (\lambda\mu x_1, \dots, \lambda\mu x_n) = (\lambda\mu)(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

   (c) $\lambda \cdot x + \mu \cdot x = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\mu x_1, \dots, \mu x_n) = (\lambda x_1 + \mu x_1, \dots, \lambda x_n + \mu x_n)$ $= ((\lambda + \mu)x_1, \dots, (\lambda + \mu)x_n) = (\lambda + \mu)(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda + \mu)x$

   (d) $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) = (\lambda(x_1 + y_1), \dots, \lambda(x_n + y_n)) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, \dots, \lambda x_n + \lambda y_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) + (\lambda y_1, \dots, \lambda y_n) = \lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda(y_1, y_2, \dots, y_n) = \lambda x + \lambda y$

Ceci montre que $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Appliqué à $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on obtient que $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Appliqué à $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on obtient que $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Si $E = \mathbb{C}^n$, alors, on peut de même définir les applications suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ ((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) & \longmapsto (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{C}^n & \longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (\lambda, (x_1, x_2, \dots, x_n)) & \longmapsto (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) \end{cases}$$

Or, on a huit propriétés qui sont vraies dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, si on restreint ces propriétés en remplaçant $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$, elles encore encore vraies faisant de $\mathbb{C}^n$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit que c'est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, car dans $\lambda \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

II. Si $(P, Q, R) \in \mathbb{K}[X]^3$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $P + Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda P \in \mathbb{K}$. De plus, $P + Q = Q + P$, $(P + Q) + R = P(Q + R)$, $P + 0 = P$, $P + (-1)P = 0$, $1 \cdot P = P$, $\lambda(P + Q) = \lambda P + \lambda Q$, $(\lambda + \mu)P = \lambda P + \mu P$ et $\lambda(\mu P) = (\lambda\mu)P$. Toutes ces propriétés ont déjà été énoncées et démontrées dans le chapitre sur les polynômes.

III. Si $E = \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $(A, B) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $A + B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. De plus, on sait que $A + 0_{n,p} = A$, $(A + B) + C = A + (B + C)$, $A + B = B + A$, $A + (-1) \cdot A = 0_{n,p}$, $1 \cdot A$, $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ et $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$. Toutes ces propriétés ont déjà été énoncées et démontrées dans le chapitre sur les matrices.

IV. Soit $(f, g, \lambda) \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})^2 \times \mathbb{K}$, on pose $f + g \colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(x) + g(x) \end{cases}$ et $\lambda \cdot f \colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \lambda f(x) \end{cases}$, alors $f + g \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$ et $\lambda f \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})$.

1. Soit $(f, g, h) \in \mathscr{F}(I, \mathbb{R})^3$

   (a) Pour tout $x \in I$, $(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$. Ainsi, $f + g = g + f$.

   (b) Pour tout $x \in I$,

$$((f + g) + h)(x) = (f + g)(x) + h(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = f(x) + (g + h)(x) = (f + (g + h))(x)$$

   Ainsi, $(f + g) + h = f + (g + h)$.

   (c) Posons $\Theta \colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0_E \end{cases}$, alors pour tout $x \in E$, $(f + \Theta)(x) = f(x) + \Theta(x) = f(x) + 0_E = f(x)$. Ainsi, $f + \Theta = f$.

(d) On pose $\tilde{f}\colon \begin{cases} I \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -f(x) \end{cases}$, alors, pour tout $x \in I$, $(f+\tilde{f})(x) = f(x) + \tilde{f}(x) = f(x) - f(x) = 0$, ainsi, $f + \tilde{f} = \Theta$.

2. Soit $(f,g) \in \mathscr{F}(I,\mathbb{R})^2$ et $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$
   (a) Pour tout $x \in I$, $(1 \cdot f)(x) = 1 \cdot f(x) = f(x)$. Ainsi, $1 \cdot f = f$.
   (b) Pour tout $x \in I$, $(\lambda\cdot(\mu\cdot f))(x) = \lambda\cdot((\mu f)(x)) = \lambda\cdot(\mu\cdot f(x)) = (\lambda\times\mu)\cdot f(x) = ((\lambda\times\mu)\cdot f)(x)$. Ainsi, $\lambda\cdot(\mu\cdot f) = (\lambda\times\mu)\cdot f$.
   (c) Pour tout $x \in I$,
   $$((\lambda+\mu)\cdot f)(x) = (\lambda+\mu)\cdot f(x) = \lambda\cdot f(x) + \mu\cdot f(x) = (\lambda\cdot f)(x) + (\mu\cdot f)(x) = (\lambda\cdot f + \mu\cdot f)(x)$$
   Ainsi, $(\lambda+\mu)\cdot f = \lambda\cdot f + \mu\cdot f$.
   (d) Pour tout $x \in I$,
   $$(\lambda\cdot(f+g))(x) = \lambda\cdot((f+g)(x)) = \lambda\cdot(f(x)+g(x)) = \lambda\cdot f(x) + \lambda\cdot g(x) = (\lambda\cdot f)(x) + (\lambda\cdot g)(x) = (\lambda\cdot f + \lambda\cdot g)(x)$$
   Ainsi, $\lambda\cdot(f+g) = \lambda\cdot f + \lambda\cdot g$.

Par conséquent, $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. ■

Remarques 3.
- Les vecteurs peuvent donc être des polynômes, des matrices, des suites, des fonctions etc.
- «*Faut-il appliquer cette définition à chaque fois pour montrer qu'un machin est un espace vectoriel ?*» Non, on ne l'utilisera quasiment jamais. Dans la pratique, on montre que des ensembles sont bien des espaces vectoriels en vérifiant quelque chose de bien plus simple que l'on va voir au plus vite.

Péril imminent : à l'impossible nul n'est tenu

Si on a deux vecteurs d'un espace vectoriel, on peut les additionner mais pas les multiplier entre eux.

À partir de maintenant E désignera toujours un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition n° 1 : premières propriétés d'un espace vectoriel

1. On a unicité du vecteur 0_E au point 1c.
2. $\forall(\lambda,x) \in \mathbb{K}\times E \quad (\lambda = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0_E) \quad \Longleftrightarrow \quad \lambda\cdot x = 0_E$
3. Pour tout $x \in E$, on a unicité du vecteur y au point 1d, de plus $y = (-1)\cdot x$.

Démonstration de la proposition n° 1 :

1. Supposons qu'il y ait deux vecteurs nuls 0_E et $0'_E$. Cela veut dire que :
$$\forall x \in E \qquad x + 0_E = x \tag{1}$$
$$\forall x \in E \qquad x + 0'_E = x \tag{2}$$
Alors $0_E \underset{(2)}{=} 0_E + 0'_E \underset{1a}{=} 0'_E + 0_E \underset{(1)}{=} 0'_E$. On a donc montré que $0_E = 0'_E$, donc l'unicité du vecteur nul.

2. Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour montrer l'équivalence, procédons par double implications :
   - Supposons $x = 0_E$ ou $\lambda = 0$ et montrons $\lambda\cdot x = 0_E$. Il y a donc deux cas $x = 0_E$ ou $\lambda = 0$.
     — Cas 1 : $\lambda = 0$. Alors $\lambda\cdot x = 0\cdot x = (0+0)\cdot x \underset{2c}{=} 0\cdot x + 0\cdot x$. On a donc $0\cdot x = 0\cdot x + 0\cdot x$. Notons $y \in E$ un vecteur tel que $(0\cdot x) + y = 0_E$ (y existe d'après 1d). En ajoutant y des deux côtés, on obtient
     $$0_E = 0\cdot x + y = (0\cdot x + 0\cdot x) + y \underset{1b}{=} 0\cdot x + (0\cdot x + y) = 0\cdot x + 0_E \underset{1c}{=} 0\cdot x$$
     On a donc $0\cdot x = 0_E$, soit $\lambda\cdot x = 0_E$.
     — Cas 2 : $x = 0_E$. Alors $\lambda\cdot x = \lambda\cdot 0_E = \lambda\cdot(0_E + 0_E) \underset{2d}{=} \lambda\cdot 0_E + \lambda\cdot 0_E$. On a donc $\lambda\cdot 0_E = \lambda\cdot 0_E + \lambda\cdot 0_E$. Notons $y \in E$ un vecteur tel que $\lambda\cdot 0_E + y = 0_E$ (y existe d'après 1d). En ajoutant y des deux côtés, on obtient donc
     $$0_E = \lambda\cdot 0_E + y = (\lambda\cdot 0_E + \lambda\cdot 0_E) + y \underset{1b}{=} \lambda\cdot 0_E + (\lambda\cdot 0_E + y) = \lambda\cdot 0_E + 0_E \underset{1c}{=} \lambda\cdot 0_E$$
     On a donc $\lambda\cdot 0_E = 0_E$, soit $\lambda\cdot x = 0_E$.

     Dans les deux cas, on a montré que $\lambda\cdot x = 0_E$.
   - Supposons $\lambda\cdot x = 0_E$ et montrons $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$. Il y a deux cas :
     — Soit $\lambda = 0$ et donc c'est ce qu'on veut.

— Soit $\lambda \neq 0$, dans ce cas, on peut multiplier l'équation $\lambda \cdot x = 0_E$ des deux côtés par $\dfrac{1}{\lambda}$, on a alors $\dfrac{1}{\lambda} \cdot (\lambda \cdot x) = \dfrac{1}{\lambda} 0_E$. Donc $\left(\dfrac{1}{\lambda} \times \lambda\right) \cdot x = 0_E$. Donc $1 \cdot x = 0_E$, soit $x = 0_E$.

Ainsi, $\lambda = 0$ ou $x = 0_E$.

3. Supposons qu'il existe $y \in E$ tel que $x + y = 0_E$ et $y' \in E$ tel que $x + y' = 0_E$, alors

$$y = y + 0_E = y + (x + y') \underset{1b}{=} (y + x) + y' = 0_E + y' \underset{1a}{=} y' + 0_E \underset{1c}{=} y'$$

On a donc prouvé que $y = y'$. Montrons que $y = (-1) \cdot x$:

$$x + (-1) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 0 \cdot x = 0_E$$

Par unicité de l'opposé, on a donc $y = (-1) \cdot x$. ■

2 Sous-espaces vectoriels

Définition d'un sous-espace vectoriel

Soit $F \subset E$, on dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si : $\quad 0_E \in F, \quad \forall (x, y) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \lambda x + y \in F$

Proposition n° 2 : un sous-espace vectoriel est un espace vectoriel

Soit F un sous-espace vectoriel de E, alors F est lui-même un espace vectoriel.

Démonstration de la proposition n° 2 : Si F est un sous-espace vectoriel, alors pour tout x et y, on a $1 \cdot x + y \in F$ (en utilisant $\lambda = 1$), de même, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda x + 0_E = \lambda x \in F$ (en utilisant $y = 0_E \in F$). On peut ainsi définir les applications suivantes : $+ : \begin{cases} F \times F \longrightarrow F \\ (x, y) \longmapsto x + y \end{cases}$ et $\cdot : \begin{cases} \mathbb{K} \times F \longrightarrow F \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x \end{cases}$. Il reste à vérifier les 8 propriétés :

1. Soit $(x, y, z) \in F^3$
   (a) Comme $x \in E$ et $y \in E$, $x + y = y + x$ (car E est un espace vectoriel).
   (b) Comme $x \in E$, $y \in E$, $z \in E$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (car E est un espace vectoriel).
   (c) Par définition du vecteur nul, $x + 0_E = x$ avec $0_E \in F$. Ainsi, F admet bien un vecteur nul (le même que celui de E).
   (d) En prenant $y = 0_E$ et $\lambda = -1$, on obtient que $\lambda \cdot x + y = (-1) \cdot x \in F$. Or, d'après la proposition 1, $x + (-1)x = 0_E$. Ainsi, x admet bien un opposé dans F (et c'est le même opposé que l'opposé de x dans E).
2. Soient $(x, y) \in F^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$
   (a) Comme $x \in E$, $1 \cdot x = x$ (car E est un espace vectoriel).
   (b) Comme $x \in E$, $\lambda \cdot (\mu \cdot x) = (\lambda \times \mu) \cdot x$ (car E est un espace vectoriel).
   (c) Comme $x \in E$, $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ (car E est un espace vectoriel).
   (d) Comme $x \in E$ et $y \in E$, $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ (car E est un espace vectoriel).

Par conséquent, F est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. ■

Exemples 1. Montrer que F et F' sont des sous-espaces vectoriels de E dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$
2. $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$
3. E quelconque et $F = \{0_E\}$ et $F' = E$
4. $E = \mathbb{K}[X]$ et $F = \mathbb{K}_n[X]$
5. $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et F l'ensemble des solutions de $y'' + y = 0$
6. $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{K})$.

Solution des exemples 1 :

1.
   - $F \subset E$.
   - Posons $x = y = z = 0$ de sorte que $x + y + z = 0$ donc $0_{\mathbb{R}^3} = (0, 0, 0) \in F$.
   - Soient $u = (x, y, z) \in F$ et $v = (x', y', z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons

$$w = \lambda u + v = \lambda(x, y, z) + (x', y', z') = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) + (x', y', z') = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z') = (x'', y'', z'')$$

   Avec $x'' = \lambda x + x'$, $y'' = \lambda y + y'$ et $\lambda z + z'$. Alors $x'' + y'' + z'' = \lambda(x + y + z) + (x' + y' + z') = \lambda 0 + 0 = 0$ Donc $\lambda u + v \in F$.

   Dès lors, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
2.
   - Notons que $F \subset \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

- Posons $a = b = c = 0$ de sorte que $0_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \in F$.
- Soit $(M, N) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Il existe alors $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et il existe $(a', b', c') \in \mathbb{C}^3$ tel que $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix}$.
Alors $\lambda M + N = \begin{pmatrix} \lambda a + a' & \lambda b + b' \\ \lambda b + b' & \lambda c + c' \end{pmatrix}$. Ainsi, en posant $\alpha = \lambda a + a' \in \mathbb{C}$, $\beta = \lambda b + b' \in \mathbb{C}$ et $\gamma = \lambda c + c' \in \mathbb{C}$, on obtient $\lambda M + N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} \in F$.

Dès lors, F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

3. - Si $F = \{0_E\}$, alors comme $0_E \in E$, $F \subset E$. De plus, $0_E \in F$. Soit $(x, y) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\lambda x + y = \lambda \cdot 0_E + 0_E = 0_E \in F$. Ainsi, $F = \{0_E\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   - Si $F' = E$, alors $F' \subset E$, $0_E \in E = F'$. Soit $(x, y, \lambda) \in F' \times F' \times \mathbb{K}$, alors $\lambda x + y \in E = F'$. Ainsi, $F' = E$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$, $d^\circ 0 = -\infty \leqslant n$ donc $0 \in \mathbb{K}_n[X]$. Soient $P \in \mathbb{K}_n[X]$, $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
$$d^\circ(\lambda P + Q) \leqslant \max(d^\circ \lambda P, d^\circ Q) \leqslant \max(d^\circ P, d^\circ Q) \leqslant \max(n, n) = n$$
Ainsi, $\lambda P + Q \in \mathbb{K}_n[X]$. Par conséquent, $\mathbb{K}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.
5. - $F = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Comme ${0_n}^\top = 0_n$, $0_n \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
   - Soit $(S, S') \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrons que $\lambda S + S' \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$: $(\lambda S + S')^\top = \lambda S^\top + {S'}^\top = \lambda S + S'$. Ainsi, $\lambda S + S' \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

   Dès lors, $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ est un SEV de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
6. $E = \mathbb{R}^\mathbb{R}$ et $F = \{y \in E \mid y \text{ est deux fois dérivable et } y'' + y = 0\}$, alors $F \subset E$, notons $\theta :\begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{cases}$, θ est deux fois dérivable et $\theta'' + \theta = \theta$, donc $\theta \in F$. Soient $(f, g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f + g$ est deux fois dérivables (car f et g le sont), et
$$(\lambda f + g)'' + \lambda f + g = \lambda f'' + g'' + \lambda f + g = \lambda(f'' + f) + (g'' + g) = \lambda\theta + \theta = \theta$$
De sorte que $\lambda f + g \in F$. Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E.
Remarquons que par résolution d'une équation différentielle : $F = \{x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2\}$. ■

Exemples 2. Les ensembles suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$?
1. D : la droite passant par les points $(1, 2)$ et $(0, 1)$
2. $F = \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Solution des exemples 2 :
1. La droite passant par les points $(1, 2)$ et $(0, 1)$ a pour équation $x \mapsto 1 + x$. Ainsi, en notant $D = \{(x, 1 + x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$, $(0, 0) \notin D$, ainsi D n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
2. Notons $F = \{(x, \sin(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$, alors certes $F \subset \mathbb{R}^2$ et $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Mais, $v = (\pi/2, 1) \in F$ (prendre $x = \pi/2$)), mais $2v = (\pi, 2) \notin F$ (en effet dans le cas contraire, il existerait $x \in \mathbb{R}$, tel que $(\pi, 2) = (x, \sin(x))$, or $\sin(x) < 2$ ce qui est absurde). Ainsi, F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. ■

Remarque 4. Soient F un SEV de E, $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in F^n$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in F$.

Justification de la remarque 4 : Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, l'hypothèse de récurrence $\mathscr{P}(n)$: «pour tout $(e_1, e_2, \ldots, e_n) \in F^n$ et pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in F$».

- Pour $n = 1$, soit $e_1 \in F$ et $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, alors $\sum\limits_{i=1}^{1} \lambda_i e_i = \lambda_1 e_1 \in F$ (car F est un espace vectoriel), ainsi $\mathscr{P}(1)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}) \in F^{n+1}$ et $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i = \lambda_{n+1} e_{n+1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$, d'après $\mathscr{P}(n)$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in F$, comme F est un sous-espace vectoriel, $\lambda_{n+1} e_{n+1} + \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in F$, ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i \in F$, donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie. ■

Proposition n° 3 : intersection de sous-espaces vectoriels
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E, alors $F \cap G$ est alors un sous-espace vectoriel de E.
De même, si $(F_i)_{i \in I}$ est une famille de SEVs de E, alors $\bigcap\limits_{i \in I} F_i$ est un SEV de E.

Démonstration de la proposition n° 3 :

- Remarquons que $F \cap G = \{x \in E \mid x \in F \text{ et } x \in G\}$, nécessairement, $F \cap G \subset E$. Comme F et G sont deux SEV de E, $0_E \in F$ et $0_E \in G$, ainsi $0_E \in F \cap G$. Soient $(x, y) \in (F \cap G)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors x et y sont dans F, $\lambda x + y \in F$ (F est un SEV de E). De même, $\lambda x + y \in G$. Dès lors, $\lambda x + y \in F \cap G$.
- Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de SEV de E. Cela veut dire, que pour tout $i \in I$, F_i est un SEV de E. Remarquons que
$$\bigcap_{i \in I} F_i = \{x \in E \mid \forall i \in I \quad x \in F_i\}$$
Nécessairement, $\bigcap_{i \in I} F_i \subset E$. Considérons x et y appartenant à $\bigcap_{i \in I} F_i$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Soit $i \in I$, x et y appartiennent à F_i, comme F_i est un SEV de E, $0_E \in F_i$ et $\lambda x + y \in F_i$ et ce pour tout $i \in I$, Par conséquent, $0_E \in \bigcap_{i \in I} F_i$ et $\lambda x + y \in \bigcap_{i \in I} F_i$. Donc $\bigcap_{i \in I} F_i$ est un SEV de E. ■

Exemple 3. On note $F = \left\{(x, y, y) \text{ tel que } (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ et $G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y + z = 0\right\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$, puis calculer leur intersection.

Solution de l'exemple 3 :

- $F \subset \mathbb{R}^3$, en posant $x = y = 0$, on obtient que $(x, y, y) = (0, 0, 0) \in F$. Soit $(u, v) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Comme $u \in F$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u = (a, b, b)$ et comme $v \in F$, il existe $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ tel que $v = (a', b', b')$, alors
$$\lambda u + v = \lambda(a, b, b) + (a', b', b') = (\lambda a + a', \lambda b + b', \lambda b + b') \in F$$
Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- $G \subset \mathbb{R}^3$, en posant $x = 0$, $y = 0$ et $z = 0$, alors comme $x + 2y + z = 0 + 2 \times 0 + 0 = 0$, on a que $(0, 0, 0) \in G$. Soient $u = (x, y, z) \in G$, $v = (x', y', z') \in G$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u + v = (\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')$, de plus :
$$\lambda x + x' + 2(\lambda y + y') + \lambda z + z' = \lambda(x + 2y + z) + (x' + y' + z') = \lambda \times 0 + 0 = 0$$
Ainsi, $\lambda u + v \in G$. Dès lors, G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.
- Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, alors :
$$u \in F \cap G \iff u \in F \text{ et } u \in G \iff \begin{cases} y & = & z \\ x + 2y + z & = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y & = & z \\ x & = & -3z \end{cases} \iff u = (-3z, z, z)$$
Ainsi, $F \cap G = \{(-3z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$. ■

Attention l'union de deux SEV de E n'est pas, en général, un SEV de E.
Par exemple, $F = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, $F \cup G$ est-il un SEV de $\mathbb{R}^2$?

3 Combinaison linéaire, espace vectoriel engendré

Définition d'une combinaison linéaire et de l'espace vectoriel engendré

Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E.

- Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on dit que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ est **une combinaison linéaire** de la famille $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
- On appelle **espace vectoriel engendré** par $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ l'ensemble de toutes les combinaisons linéaires de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. On note $\operatorname{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ cet ensemble :
$$\operatorname{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \left\{x \in E \mid \exists\, (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n,\ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \text{ où } (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$$

Remarques 5.

- $\operatorname{vect}(e_1, \ldots, e_n)$ a été défini par compréhension et par paramétrage.
- $x \in \operatorname{vect}(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$.

Exemples 4.

- Dans $E = \mathbb{R}^3$, donner plusieurs combinaisons linéaires de $u = (1, 2, 3)$ et $v = (2, 2, 2)$.
- Si $e_1 \neq 0_E$, $\operatorname{vect}(e_1)$ est une droite vectorielle de E.
- Si e_1 et e_2 sont non nuls et que e_2 n'est pas colinéaire à e_1, alors $\operatorname{vect}(e_1, e_2)$ est un plan vectoriel.
- Pour $E = \mathbb{R}[X]$, déterminer $\operatorname{vect}(1, X)$.

Proposition n° 4 : l'espace engendré est un espace vectoriel

Soient $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille finie de vecteurs de E et $F = \text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

1. F est un SEV de E.
2. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $e_i \in F$.
3. F est le plus petit SEV de E (au sens de l'inclusion) à contenir tous les e_i pour $i \in [\![1\,;n]\!]$:
   Si H est un sous-espace vectoriel qui contient tous les e_i, alors $F \subset H$.

Démonstration de la proposition n° 4 :

1.
   - $F \subset E$ (ensemble défini par compréhension)
   - Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, posons $\lambda_i = 0$: Ainsi, $0_E = \sum_{i=1}^{n} \lambda e_i$ est une combinaison linéaire de $(e_1, e_2, \dots, e_n)$, dès lors $0_E \in \text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$.
   - Soient $(x, y) \in F^2$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i$
     Alors :
     $$\alpha x + y = \alpha \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha\lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{n} \mu_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\lambda_i + \mu_i) e_i \in \text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$$

   Ceci prouve que $\text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est un SEV de E.
2. Si $j \in [\![1\,;n]\!]$, alors $e_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{i,j} e_i \in \text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Ainsi, $\text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est un SEV de E qui contient tous les e_i.
3. Montrons que c'est le plus petit SEV de E, au sens de l'inclusion, qui contient tous les e_i. Soit H un SEV de E qui contient tous les e_i. Montrons que $\text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset H$. Soit $x \in \text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.
   Or, $e_i \in H$, et H est un SEV de E, ainsi, par combinaison linéaire, $x \in H$. Ainsi, $\text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset H$. Par conséquent, pour tout H, SEV de E qui contient les e_i, on a $\text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n) \subset H$. ■

Remarques 6.
- Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$, si $e_i \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_n)$, alors ce vecteur ne sert à rien dans l'espace vectoriel engendré : $\text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_p) = \text{vect}(e_1, \dots, e_{i-1}, e_{i+1}, \dots, e_p)$.
- Pour montrer que F est un SEV de E, il suffit de trouver des $e_i \in E$ tel que $F = \text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$.

Exemples 5.
1. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},\ (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
2. Montrer que $F = \left\{ y \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid y \text{ est deux fois dérivable et } y'' + y = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Solution des exemples 5 :

1. Posons $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors,
   $$\text{vect}(A, B, C) = \{aA + bB + cC \mid (a, b, c) \in \mathbb{C}^3\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{C}^3 \right\} = F$$
   est un SEV de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
2. $F = \left\{ x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x) \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \left\{ A\cos + B\sin \mid (A, B) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{vect}(\cos, \sin)$ est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. ■

4 Propriétés des familles finies d'un espace vectoriel

4.1 Famille libre

Remarque 7. Soit $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de E, si pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i = 0$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$.

Définition d'une famille libre

Soit $\mathscr{L} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille finie de E, on dit que la famille $\mathscr{L}$ est **libre**, si il y a une seule façon d'écrire le vecteur nul comme combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{L}$. Autrement dit si

$$\forall\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \quad \Longrightarrow \quad \forall i \in [\![1\,;n]\!] \quad \lambda_i = 0 \right)$$

Si $\mathscr{L}$ est libre, on dit aussi que les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ sont **linéairement indépendants**, si $\mathscr{L}$ n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.

Exemples 6. 1. Soit $u = (1, 2, 3)$ et $v = (1, 1, 1)$ et $w = (1, 1, 10)$, montrer que $\mathscr{F} = (u, v, w)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^3$.

2. La famille $(1, \mathrm{i})$ est-elle libre dans $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-EV ? Et vu comme $\mathbb{C}$-EV ?
3. La famille $\mathscr{F} = ((1, 1, 1), (1, 0, 0), (4, 1, 1))$ n'est pas libre.

Remarques 8. 1. La famille $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est liée si et seulement si il existe $i_0 \in [\![1 ; n]\!]$ tel que $e_{i_0} \in \mathrm{vect}(e_1, \dots, e_{i_0-1}, e_{i_0+1}, \dots, e_n)$. Ainsi, une famille $\mathscr{F}$ est liée si et seulement si il existe un vecteur de $\mathscr{F}$ qui est une combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{F}$.

2. Si $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et qu'il existe $i \in [\![1 ; n]\!]$ tel que $e_i = 0_E$, alors la famille $\mathscr{F}$ est liée.
3. Si (u) est une famille de un vecteur de E, alors (u) est libre si et seulement si $u \neq 0_E$.
4. Si (u, v) est une famille de deux vecteurs de E, alors, (u, v) est libre si et seulement si u et v ne sont pas colinéaires.

Attention cela ne se généralise pas à plus de deux vecteurs

Si pour tout $i \neq j$, e_i et e_j sont non colinéaires, cela n'implique pas forcément que $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre. En effet, la famille $((1, 1, 1), (1, 0, 0), (4, 1, 1))$ est liée.

Justification des remarques 8 :

1.
2.
3. Si $u = 0_E$, alors, par le point précédent, la famille (u) est liée. Par contraposée, on en déduit que (u) est libre implique que $u \neq 0_E$. Réciproquent, supposons $u \neq 0_E$. Soit $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, supposons que $\lambda_1 u = 0_E$. Comme $u \neq 0_E$, d'après la proposition 1, on en déduit que $\lambda_1 = 0$, donc (u) est libre.
4. Supposons u et v colinéaires, cela veut dire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$, si $u = \lambda v$, alors $1 \cdot u - \lambda v = 0_E$, comme $1 \neq 0$, on en déduit que la famille (u, v) est liée. Si $v = \lambda u$, alors $-\lambda u + 1v = 0_E$, comme $1 \neq 0$, on en déduit que la famille (u, v) est liée. Ainsi, on a montré que u et v colinéaires implique que (u, v) est liée. Par contraposée, si (u, v) est libre, alors u et v ne sont pas colinéaires.

   Réciproquement, supposons que u et v ne soient pas colinéaires. Montrons que (u, v) est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$. Supposons que $\lambda_1 u + \lambda_2 v = 0_E$. Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $u = \dfrac{-\lambda_2}{\lambda_1} v$ et donc u et v sont colinéaires, ce qui est absurde, donc $\lambda_1 = 0$, et donc $\lambda_2 v = 0_E$, si $\lambda_2 \neq 0$, alors $v = 0_E$ mais alors $v = 0u$ et u et v sont colinéaires, ce qui est absurde, donc $\lambda_2 = 0$. On peut donc en conclure que $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,ainsi la famille (u, v) est libre.

Remarque 9. Une famille $\mathscr{L} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre si et seulement si pour tout $x \in \mathrm{vect}(\mathscr{L})$, il existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Justification de la remarque 9 : Supposons que $\mathscr{L} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ soit libre. Soit $x \in \mathrm{vect}(\mathscr{L})$, alors par définition de $\mathrm{vect}(\mathscr{L})$, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ Soit $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, donc $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i e_i$, donc, par linéarité de la somme, $\sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i e_i - \mu_i e_i) = 0_E$, ainsi, $\sum\limits_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mu_i) e_i = 0_E$, comme $\mathscr{L}$ est libre, on en déduit que pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $\lambda_i - \mu_i = 0$ donc, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $\lambda_i = \mu_i$. Ceci démontre que pour tout $x \in \mathrm{vect}(\mathscr{L})$, il existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$.

Réciproquement, supposons que tout $x \in \mathrm{vect}(\mathscr{L})$, il existe un unique $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, supposons que $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$. Or, on sait aussi que $\sum\limits_{i=1}^{n} 0 e_i = 0_E$. Par unicité de la décomposition de $x = 0_E$, on peut en conclure que pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $\lambda_i = 0$. Ainsi, la famille $\mathscr{L}$ est libre.

Exemple 7. Cela permet d'identifier : si $m\vec{a} = \vec{F}$ et $\vec{a} = a_x \vec{x} + a_y \vec{y}$, $\vec{F} = F_x \vec{x} + F_y \vec{y}$, alors $m a_x = F_x$ et $m a_y = F_y$.

Solution de l'exemple 7 : En effet, dans ce cas, en développant par m, on a $m a_x \vec{x} + m a_y \vec{y} = F_x \vec{x} + F_y \vec{y}$, or $(\vec{x}, \vec{y})$ est une famille libre, ainsi $m a_x = F_x$ et $m a_y = F_y$.

Théorème n° 1 : famille de polynômes de degrés deux à deux distincts est libre

Si $\mathscr{L}$ est une famille finie de polynômes non nuls de $\mathbb{K}[X]$ de degrés deux à deux distincts, alors $\mathscr{L}$ est libre.

Démonstration du théorème n° 1 : Quitte à renuméroter les polynômes, on suppose que $\mathscr{L} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ avec

$$0 \leqslant d^\circ P_1 < d^\circ P_2 < \dots < d^\circ P_n$$

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Supposons que $\sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k P_k = 0$. Montrons que pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $\lambda_k = 0$. Supposons (par l'absurde) qu'il existe $k \in [\![1 ; n]\!]$ tel que $\lambda_k \neq 0$. Posons $d = \max \{k \in [\![1 ; n]\!] \mid \lambda_k \neq 0\}$ (ensemble fini et non vide, donc le maximum est bien défini). Ainsi, pour $k \in [\![1 ; n]\!]$, si $\lambda_k \neq 0$ alors $k \leqslant d$. Par contraposée, si $k > d$ alors $\lambda_k = 0$. Dès lors, en coupant la somme en trois :

$$0 = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k P_k + \lambda_d P_d + \sum_{k=d+1}^{n} \underbrace{\lambda_k}_{=0} P_k = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k P_k + \lambda_d P_d + 0$$

Donc $\lambda_d P_d = -\sum\limits_{k=1}^{d-1} \lambda_k P_k$. En passant au degré, on obtient

$$d^\circ P_d \underset{\lambda_d \neq 0}{=} d^\circ(\lambda_d P_d) \leqslant \max_{k \in [\![1 ; d-1]\!]} d^\circ \lambda_k P_k \leqslant d^\circ P_{d-1}$$

Ceci est absurde, ainsi, pour tout $k \in [\![1 ; n]\!]$, $\lambda_k = 0$, ainsi $\mathscr{L}$ est libre. ∎

4.2 Famille génératrice

Définition d'une famille génératrice

Soit $\mathscr{G} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit $\mathscr{G}$ est **génératrice** de E (ou **engendre** E) si

$$\forall x \in E \qquad \exists\, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \quad \text{tel que} \quad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Exemples 8.
1. Montrer que $\mathscr{F}_1 = (1, X^2 + X, X + 1)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$. Est-elle libre ?
2. Montrer que $\mathscr{F}_2 = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$. Est-elle libre ?
3. Montrer que $\mathscr{F}_3 = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est une famille génératrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ (où $E_{a,b} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ est la matrice contenant que des 0, sauf un 1 à la ligne a et colonne b). Est-elle libre ?

Solution des exemples 8 :
1. Soit $P = aX^2 + bX + c \in \mathbb{R}_2[X]$. Alors,
$$P = a(X^2 + X) + (b - a)X + c = a \times (X^2 + X) + (b - a) \times (X + 1) + (c - b + a) \times 1$$
Ainsi, $\mathscr{F}_1$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_2[X]$.
2.
3.

Remarques 10.
1. La famille $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{vect}(\mathscr{G})$.
2. La famille $\mathscr{G}$ est nécessairement génératrice de $\mathrm{vect}(\mathscr{G})$.

4.3 Bases

Définition d'une base

Soit $\mathscr{B}$ une famille finie de E. On dit que $\mathscr{B}$ est une **base** si $\mathscr{B}$ est à la fois libre et génératrice de E.

Ainsi, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E ssi $\qquad \forall x \in E \qquad \exists!\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad x = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k e_k$

On dit que les x_k sont les **coordonnées** de x dans la base $\mathscr{B}$.

Attention : il faut une famille finie

Au programme de BCPST, les familles libres, génératrices et les bases sont toujours des familles finies.

Exemple de bases importantes (à connaître)

1. $(1, X, \dots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}_n[X]$.
2. $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{K}^n$, appelée **base canonique** de $\mathbb{K}^n$, où $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
3. $(E_{a,b})_{\substack{1\leqslant a\leqslant n\\ 1\leqslant b\leqslant p}}$ est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, appelée **base canonique** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Exemples 9. • Montrer que $((1,1,1),(1,0,0),(0,1,0))$ est une base de $\mathbb{R}^3$ (ce n'est pas la base canonique de $\mathbb{R}^3$).

- Donner une base de $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Puis vu comme un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

Définition de la matrice d'une famille de vecteurs dans une base

La matrice dont la j-ième colonne contient les coordonnées de u_j dans la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est appelée **matrice de la famille** $\mathscr{F} = (u_1, u_2, \dots, u_p)$ dans la base $\mathscr{B}$: $\forall j \in [\![1\,;q]\!] \quad \exists!(a_{1,j}, \dots, a_{n,j}) \in \mathbb{K}^n \quad u_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i$.

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1, u_2, \dots, u_q) = \begin{array}{c c} \begin{array}{ccccc} u_1 & \cdots & u_j & \cdots & u_q \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,q} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,q} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,q} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array} \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

Exemples 10. • Pour $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathscr{B}$ la base canonique de E, et $\mathscr{F} = (X^3+2, X^2+1, 4)$, que vaut $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$? Si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}') = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, que vaut $\mathscr{F}'$?

- Si $F = \mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C}$ la base canonique de F, $\mathscr{F}_2 = ((1,1),(2,3),(1,-2))$ que valent $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}_2)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C})$?

5 Construction de la théorie de la dimension finie

Remarque 11. La dimension ne peut pas être définie comme le nombre d'éléments de E, car E est un ensemble infini.

Définition d'un espace vectoriel de dimension finie

On dit que E est un espace vectoriel de **dimension finie** si E possède une famille génératrice (finie).
Sinon, on dit que E est un espace vectoriel de **dimension infinie**.

Exemple d'espaces vectoriels de dimension finie ou de dimension infinie

$\mathbb{K}^n$, $\mathbb{C}$ vu comme un $\mathbb{C}$-EV ou un $\mathbb{R}$-EV, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont de dimension finie, contrairement à $\mathbb{K}[X]$.

Lemme 1. Soient $\mathscr{L}$ une famille libre de E et $x \in E$. Alors, $\mathscr{L} \cup (x)$ est libre si et seulement si $x \notin \mathrm{vect}(\mathscr{L})$.

Démonstration du lemme 1 : Notons $\mathscr{L} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$. Supposons que $x \in \mathrm{vect}(\mathscr{L})$, alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, alors $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k + \lambda_{n+1} x = 0_E$ avec $\lambda_{n+1} = -1 \neq 0$ de sorte que $\mathscr{L} \cup (x)$ est liée. Par contraposée, si $\mathscr{L} \cup (x)$ est libre, alors $x \notin \mathrm{vect}(\mathscr{L})$.

Supposons $x \notin \mathrm{vect}(\mathscr{L})$. Montrons que $\mathscr{L} \cup (x) = (e_1, \dots, e_n, x)$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + \lambda_{n+1} x = 0_E$, si $\lambda_{n+1} \neq 0$, alors $x = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\lambda_k}{\lambda_{n+1}} e_k \in \mathrm{vect}(\mathscr{L})$ ce qui est impossible, donc $\lambda_{n+1} = 0$ donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E$. Or, $\mathscr{L}$ est libre, donc pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_k = 0$. Dès lors, pour tout $k \in [\![1\,;n+1]\!]$, $\lambda_k = 0$, la famille $\mathscr{L} \cup (x)$ est libre.

Lemme 2. Si $\mathscr{G}$ engendre E et $\mathscr{G}'$ est une famille telle que $\mathscr{G} \subset \text{vect}(\mathscr{G}')$, alors $\mathscr{G}'$ engendre aussi E.

Démonstration du lemme 2 : Supposons que $\mathscr{G} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ soit une famille génératrice et que $\mathscr{G}'$ soit une autre famille telle que $\mathscr{G} \subset \text{vect}(\mathscr{G}')$. Montrons que $\mathscr{G}'$ est une famille génératrice de E. Soit $x \in E$, alors, comme $\mathscr{G}$ engendre E, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$. Or, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $e_k \in \text{vect}(\mathscr{G}')$ par hypothèse, comme $\text{vect}(\mathscr{G}')$ est un espace vectoriel, on en déduit, par stabilité par combinaison linéaire que $x \in \text{vect}(\mathscr{G}')$. Ainsi, $\mathscr{G}'$ est une famille génératrice de E.

Théorème n° 2 de la base incomplète *(admis)*
Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre de E, il existe $\mathscr{B}$ base de E telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B}$.

Théorème n° 3 de la base extraite *(admis)*
Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E, il existe $\mathscr{B}$ base de E telle que $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$.

Démonstration du théorème de la base extraite et du théorème de la base incomplète : On va démontrer le théorème de la base extraite et celui de la base incomplète en même temps. Soit $\mathscr{G}$ une famille génératrice de E. Et $\mathscr{L}$ une famille libre de E. Notons :

$$C = \{\text{Card}(\mathscr{F}) \text{ vérifiant } \mathscr{L} \subset \mathscr{F} \subset \mathscr{L} \cup \mathscr{G} \text{ et } \mathscr{F} \text{ famille libre de } E\}$$

Comme $\text{Card}(\mathscr{L}) \in C$, $C \neq \varnothing$, C est majorée par $\text{Card}(\mathscr{L} \cup \mathscr{G})$. Elle admet donc un plus grand élément $p \in \mathbb{N}$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une famille libre de E de cardinal p telle que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{L} \cup \mathscr{G}$. Montrons que $\mathscr{B}$ est une base. Elle est libre. Montrons qu'elle est génératrice : Soit $g \in \mathscr{G}$, supposons que $g \notin \text{vect}(\mathscr{B})$. La famille $\mathscr{B}' = (e_1, \dots, e_p, g)$ est alors libre d'après le lemme 1. De plus, on a $\mathscr{L} \subset \mathscr{B}' \subset \mathscr{L} \cup \mathscr{G}$. Ainsi $p + 1 \in C$, donc, $p + 1 \leqslant \max(C) = p$, ce qui est absurde, donc $g \in \text{vect}(\mathscr{B})$. Ainsi, $\mathscr{G} \subset \text{vect}(\mathscr{B})$, par le lemme 2, $\mathscr{B}$ est génératrice de E. Donc c'est une base de E.

Comme $\mathscr{B}$ est une base de E et que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B}$ cela démontre le théorème de la base incomplète.

Prenons maintenant $\mathscr{L} = \varnothing$ (famille libre), alors, par ce qu'il précède, il existe une base $\mathscr{B}$ de E tel que $\mathscr{L} \subset \mathscr{B} \subset \mathscr{L} \cup \mathscr{G} = \mathscr{G}$ et donc cela démontre le théorème de la base extraite.

Remarque 12. Grâce au théorème de la base incomplète ou à celui de la base extraite, un espace vectoriel de dimension finie possède au moins une base mais il n'y a pas unicité des bases.

Proposition n° 5 : comparaison entre les cardinaux des familles libres, génératrices et des bases
Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension fine. Si les familles $\mathscr{L}$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{G}$ sont respectivement libre, base, et génératrice alors

$$\text{Card}(\mathscr{L}) \leqslant \text{Card}(\mathscr{B}) \leqslant \text{Card}(\mathscr{G})$$

Démonstration de la proposition n° 5 : Notons $n = \text{Card}(\mathscr{G})$ et $p = \text{Card}(\mathscr{L})$. Posons, pour $k \in [\![0\,;p]\!]$:

$$\mathscr{P}(k) : \text{«}\exists \mathscr{L}_k \subset \mathscr{L} \quad \exists \mathscr{G}_k \subset \mathscr{G} \quad \text{telles que} \quad \mathscr{L}_k \cup \mathscr{G}_k \text{ soit génératrice} \quad \text{et} \quad \text{Card}(\mathscr{L}_k) = k \quad \text{et} \quad \text{Card}(\mathscr{G}_k) = n - k\text{»}$$

- <u>Initialisation :</u> posons $\mathscr{L}_0 = \varnothing$ et $\mathscr{G}_0 = \mathscr{G}$, alors $\mathscr{P}(0)$ est vraie.
- <u>Hérédité :</u> soit $k \in [\![0\,;p-1]\!]$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie. Soient $\mathscr{L}_k = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ et $\mathscr{G}_k = (g_1, g_2, \dots, g_{n-k})$ vérifiant $\mathscr{P}(k)$. Le but est d'ajouter un élément à $\mathscr{L}_k$ et d'en retirer un $\mathscr{G}_k$. Comme $\text{Card}(\mathscr{L}_k) = k < p = \text{Card}(\mathscr{L})$, il existe un élément $v_{k+1} \in \mathscr{L} \backslash \mathscr{L}_k$, alors $v_{k+1} \in E = \text{vect}(\mathscr{L}_k \cup \mathscr{G}_k)$:

$$\exists (\mu_i)_{1 \leqslant i \leqslant k} \in \mathbb{K}^k \quad \exists (\lambda_i)_{1 \leqslant i \leqslant n-k} \in \mathbb{K}^{n-k} \qquad v_{k+1} = \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i + \sum_{i=1}^{n-k} \lambda_i g_i$$

  Or, il existe un $\lambda_i \neq 0$ (par l'absurde : $\mathscr{L}$ est libre), prouvant que $n - k \geqslant 1$. Quitte à changer la numérotation, on suppose que $\lambda_{n-k} \neq 0$, alors

$$g_{n-k} = \frac{1}{\lambda_{n-k}} \left(v_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} \mu_i v_i - \sum_{i=1}^{n-k-1} \lambda_i g_i \right) \in \text{vect}((v_1, v_2, \dots, v_{k+1}) \cup (g_1, g_2, \dots, g_{n-k-1}))$$

  Posons $\mathscr{L}_{k+1} = (v_1, v_2, \dots, v_{k+1})$ et $\mathscr{G}_{k+1} = (g_1, g_2, \dots, g_{n-k-1})$, alors $\mathscr{L}_k \cup \mathscr{G}_k \subset \text{vect}(\mathscr{L}_{k+1} \cup \mathscr{G}_{k+1})$, en appliquant le lemme 2, $\mathscr{L}_{k+1} \cup \mathscr{G}_{k+1}$ engendre E. Ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie.
- <u>Conclusion :</u> par principe de récurrence, $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour $k \in [\![0\,;p]\!]$.

Alors, on a $\mathscr{P}(p)$ vraie, et donc $\text{Card}(\mathscr{G}_p) = n - p \geqslant 0$ donc $p \leqslant n$. Ainsi, si $\mathscr{L}$ est libre et $\mathscr{B}$ est une base, comme $\mathscr{B}$ est génératrice, $\text{Card}\mathscr{G} \leqslant \text{Card}\mathscr{B}$, si $\mathscr{B}$ est une base et $\mathscr{G}$ est génératrice, alors comme $\mathscr{B}$ est libre, $\text{Card}\mathscr{B} \leqslant \text{Card}\mathscr{G}$, en rassemblant ces deux inégalités, $\text{Card}\mathscr{L} \leqslant \text{Card}\mathscr{B} \leqslant \text{Card}\mathscr{G}$. ■

Théorème n° 4 : toutes les bases ont le même cardinal
Si E est un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie, toutes les bases de E ont le même cardinal.

Démonstration du théorème n° 4 : Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de E. Alors $\mathscr{B}$ est libre et $\mathscr{B}'$ est une famille génératrice, donc d'après la proposition 5, $\text{Card}(\mathscr{B}) \leqslant \text{Card}(\mathscr{B}')$. De plus, $\mathscr{B}'$ est libre et $\mathscr{B}$ est une famille génératrice, en utilisant encore une fois la proposition 5, il s'ensuit que $\text{Card}(\mathscr{B}') \leqslant \text{Card}(\mathscr{B})$. Par double inégalité, $\text{Card}(\mathscr{B}) = \text{Card}(\mathscr{B}')$. ■

Définition de la dimension d'un espace vectoriel de dimension finie

Soient E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie et $\mathscr{B}$ une base de E. On définit la **dimension** de E, par $\dim(E) = \text{Card}(\mathscr{B})$.

Remarque 13. La dimension d'un espace vectoriel E s'interprète comme le nombre de degrés de liberté de E.
Si $E = \{0_E\}$, on pose $\dim(E) = 0$, si E n'est pas de dimension finie, on dit que la dimension de E est infinie.

Exemples de dimensions importantes à connaître

$\dim(\mathbb{K}^n) =$ $\quad$ $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) =$ $\quad$ $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) =$ $\quad$ $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) =$ $\quad$ $\dim(\mathbb{K}_n[X]) =$

Attention à la dimension de deux espaces vectoriels

La dimension de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est n^2 (et non n), de même attention à la dimension de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 11. Soit $F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x+2y+z &= 0 \\ 2x-t &= 0 \end{cases}\right\}$. Déterminer une base de F et en déduire $\dim(F)$.

Exemple 12. Si E est de dimension n, alors toute famille de $n+1$ vecteurs (ou plus) est liée.

Proposition n° 6 : caractérisation des bases avec le cardinal

Soient E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie, et $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E telle que $\text{Card}(\mathscr{F}) = \dim(E)$. Alors,

$$\mathscr{F} \text{ est une base de } E \text{ ssi } \mathscr{F} \text{ est une famille génératrice de } E \text{ ssi } \mathscr{F} \text{ est une famille libre.}$$

Démonstration de la proposition n° 6 :

- Si $\mathscr{F}$ est une base alors elle est libre et génératrice.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice, d'après le théorème de la base extraite, il existe $\mathscr{B}$ base de E incluse dans $\mathscr{F}$. Donc $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ et $\text{Card}(\mathscr{B}) = \text{Card}(\mathscr{F})$ donc $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ est une base de E.
- Si $\mathscr{F}$ est une famille libre, alors d'après le théorème de la base incomplète, il existe une base $\mathscr{B}$ telle que $\mathscr{F} \subset \mathscr{B}$ et $\text{Card}(\mathscr{F}) = n = \text{Card}(\mathscr{B})$. Donc $\mathscr{F} = \mathscr{B}$ est une base de E. ■

Exemples 13.

1. Montrer que $\mathscr{B} = ((1,1,0),(2,1,0),(5,1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $\mathscr{F} = ((1,1,1),(2,1,3),(3,2,4),(-1,0,3))$, extraire de cette famille une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Soit $\mathscr{L} = \left(I_2, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$, compléter cette famille libre en une base de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Si $\mathscr{F} = (P_0, P_1, \dots, P_n) \in \mathbb{K}[X]^{n+1}$ telle que pour tout $i \in [\![0\,;n]\!]$, $d^\circ P_i = i$, alors $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

6 Sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel de dimension finie

6.1 Dimension d'un sous-espace vectoriel

Proposition n° 7 : dimension d'un sous-espace vectoriel *(admise)*

Soient E un EV de dimension finie et F un SEV de E, alors :

1. F est de dimension finie
2. $\dim(F) \leqslant \dim(E)$
3. $E = F \iff \dim(E) = \dim(F)$

Démonstration de la proposition n° 7 :

- Si $F = \{0_E\}$, il n'y a rien à faire. Sinon, on note $C = \{\text{Card}(\mathscr{F}), \quad \mathscr{F} \text{ famille libre de } F\}$, C est non vide, et si $\mathscr{F}$ est une famille libre de F, alors $\mathscr{F}$ est une famille libre de E, donc $\text{Card}(\mathscr{F}) \leqslant \dim(E)$ prouvant que C est majorée. Soit $\mathscr{F}$ une famille libre de F tel que $\text{Card}(\mathscr{F}) = \max C$. Montrons que $\mathscr{F}$ est génératrice de F. Soit $f \in F$, supposons $f \notin \text{vect}(\mathscr{F})$, alors en vertu du lemme 1, $\mathscr{F} \cup \{f\}$ est une famille libre. Contredisant le maximum de C, donc $f \in \text{vect}(\mathscr{F})$. Donc $F \subset \text{vect}(\mathscr{F})$. De plus, $\text{vect}(\mathscr{F}) \subset F$. Donc $\text{vect}(\mathscr{F}) = F$, ainsi $\mathscr{F}$ est une base de F.
- Comme F est de dimension finie, il existe $\mathscr{B} = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F, comme c'est une famille libre de F et donc de E. Ainsi $\dim(F) = \text{Card}(\mathscr{B}) \leqslant \dim(E)$ en vertu de la proposition 5.
- Si $E = F$, alors $\dim(E) = \dim(F)$. Réciproquement, supposons $\dim(E) = \dim(F)$. Soit $\mathscr{B} = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ une base de F, c'est une famille libre de F et donc de E. De plus, $\text{Card}(\mathscr{B}) = \dim(F) = \dim(E)$. Donc d'après la proposition 5, $\mathscr{B}$ est une base de E. Donc $E = \text{vect}(\mathscr{B}) = F$. Donc $E = F$. ■

Exemples de sous-espaces particuliers

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit F un sous-espace vectoriel de E :
- Si $\dim(F) = 1$, alors on dit que F est une **droite** (vectorielle) de E.
- Si $\dim(F) = 2$, alors on dit que F est un **plan** (vectoriel) de E.

Exemple 14. Si $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x + y - 2z = 0\}$, donner $\dim(F)$.

6.2 Rang d'une famille de vecteurs

Définition du rang d'une famille finie de vecteurs

Soit $\mathscr{F}$ une famille finie de vecteurs de E, on appelle **rang** de $\mathscr{F}$: $\text{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\text{vect}(\mathscr{F}))$

Attention à ne pas confondre dimension, rang et cardinal

La dimension c'est pour les EV. Le rang et le cardinal sont pour les familles finies de vecteurs.

Exemple 15. Soit $E = \mathbb{R}^3$, notons $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (2, 1, 1)$ et $e_3 = (4, 3, 3)$. Former des phrases justes utilisant les mots dimension, rang et cardinal et la famille $\mathscr{F} = (e_1, e_2, e_3)$.

Proposition n° 8 : propriétés du rang

Soient E un EV de dimension finie n et $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \ldots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors :
1. $\text{rg}(\mathscr{F}) \leqslant \min(p, n)$.
2. $\mathscr{F}$ engendre E SSI $\text{rg}(\mathscr{F}) = n$.
3. $\mathscr{F}$ est libre SSI $\text{rg}(\mathscr{F}) = p$.
4. Soit $i \in [\![1\,; p]\!]$, et $\mathscr{F}' = (e_1, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_p)$, si $e_i \in \text{vect}(\mathscr{F}')$ alors $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{rg}(\mathscr{F}')$.
5. $\text{rg}(\mathscr{F}) = \text{rg}(\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$ où $\mathscr{B}$ est une base de E.
6. $\text{rg}(\mathscr{F})$ est le nombre maximum de vecteurs de $\mathscr{F}$ linéairement indépendants.

Démonstration de la proposition n° 8 : Posons $F = \text{vect}(\mathscr{F}) = \text{vect}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de sorte que $\dim(F) = \text{rg}(\mathscr{F})$.

1. Comme $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de F, on a $\dim(F) \leqslant \text{Card}(\mathscr{F})$, soit $\text{rg}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p) \leqslant p$. Comme $F = \text{vect}(\mathscr{F})$ est un SEV de E, on a $\dim(F) \leqslant \dim(E)$ soit $\text{rg}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p) \leqslant n$. Ainsi, $\text{rg}\,(e_1, e_2, \ldots, e_p) \leqslant \min(p, n)$.
2. Si $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E, alors $\text{vect}(\mathscr{F}) = E$ donc $\dim(\text{vect}(\mathscr{F})) = \dim(E) = n$ donc $\text{rg}(\mathscr{F}) = n$. Si $\text{rg}(\mathscr{F}) = n$, alors $\dim(F) = n = \dim(E)$ avec F SEV de E donc $F = E$, ainsi, $\text{vect}(\mathscr{F}) = E$ donc $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.
3. Si $\mathscr{F}$ est libre, alors $\mathscr{F}$ est une base de $F = \text{vect}(\mathscr{F})$, dès lors $\text{Card}(\mathscr{F}) = \dim(F)$ soit $p = \text{rg}(\mathscr{F})$. Si $\text{rg}(\mathscr{F}) = p$, alors $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de $\text{vect}(\mathscr{F})$ avec $\text{Card}(\mathscr{F}) = p = \text{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\text{vect}(\mathscr{F}))$ ainsi, $\mathscr{F}$ est une base de $\text{vect}(\mathscr{F})$ par conséquent, $\mathscr{F}$ est libre.
4. Posons $\mathscr{F}' = \mathscr{F} \backslash (e_i) = (e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, e_{i+1}, \ldots, e_n)$. Si $e_i \in \text{vect}(\mathscr{F}')$, alors comme $\mathscr{F} \subset \text{vect}(\mathscr{F}')$, en appliquant le lemme 2, la famille $\mathscr{F}'$ engendre F, ainsi, $\text{rg}(\mathscr{F}) = \dim(F) = \dim(\text{vect}(\mathscr{F}')) = \text{rg}(\mathscr{F}')$.
5. Admis provisoirement.
6. Soit $\mathscr{L}$ une famille libre incluse dans $\mathscr{F}$, alors $\text{Card}(\mathscr{L}) \leqslant \dim(\text{vect}(\mathscr{F})) = \text{rg}(\mathscr{F})$. Comme $\mathscr{F}$ est une famille génératrice, d'après le théorème de la base extraite, il existe $\mathscr{B} \subset \mathscr{F}$ une base de $\mathscr{F}$, alors $\text{rg}(\mathscr{F}) = \dim(\text{vect}(\mathscr{F})) = \text{Card}(\mathscr{B})$. ■

Exemple 16. Calculer le rang de $(P_1, P_2, P_3, P_4, P_5)$, avec $P_1 = X^2$, $P_2 = X^2 + 1$, $P_3 = 5X^2 + 1$, $P_4 = P_1$, $P_5 = 2P_1$

7 Méthodes

Comment montrer que E est un espace vectoriel ?

<u>M1</u> Montrer que E un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel de référence (voir méthode suivante).

<u>M2</u> Reconnaître que E est un espace vectoriel de référence.

M3 Montrer que E respecte la définition (rare et long).

Comment montrer que F est un sous-espace vectoriel de E ?

<u>M1</u> Montrer que $F \subset E$ $\qquad 0_E \in F \qquad \forall (a,b) \in F^2 \quad \forall \lambda \in \mathbb{K} \quad a + \lambda b \in F$.

M2 $F = \text{vect}\,(e_1, e_2, \dots, e_n)$ où $e_i \in E$.

M3 Écrire $F = \text{Ker}(\varphi)$ en introduisant φ une application linéaire définie sur E.

M4 F s'écrit comme intersection de SEVs de E.

Quelle est la méthode standard pour montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est libre ?

Écrire «Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, supposons $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E$», et montrer que pour tout i, $\lambda_i = 0$ (système à résoudre souvent).

Comment montrer que $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est génératrice ?

«Soit $x \in E$» puis trouver $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ (système à résoudre, ou analyse-synthèse).

Comment montrer qu'une famille est une base ?

<u>M1</u> Montrer qu'elle est libre et génératrice.

<u>M2</u> Montrer que $\mathscr{B}$ est libre et vérifier $\text{Card}(\mathscr{B}) = \dim(E)$. (utile si $\dim(E)$ est connue)

M3 Montrer que $\mathscr{B}$ est génératrice et vérifier $\text{Card}(\mathscr{B}) = \dim(E)$. (utile si $\dim(E)$ est connue)

Comment montrer qu'un espace vectoriel est de dimension finie ?

M1 On trouve une famille génératrice.

M2 On montre qu'il est inclus dans un autre espace vectoriel de dimension finie.

Comment, en dimension finie, montrer que F et G deux sous-espaces vectoriels sont égaux ?

Montrer $\dim(F) = \dim(G)$ et $F \subset G$.

Comment calculer la dimension d'un espace vectoriel ?

Compter le nombre d'éléments dans une de ses bases.

Comment construire une base de E ?

M1 Si on a une famille libre, rajouter petit à petit des vecteurs de façon à rester libre. Dès que la famille a $\dim(E)$ d'éléments, on a une base.

M2 Si on a une famille génératrice, retirer petit à petit des vecteurs qui s'écrivent comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Dès que la famille a $\dim(E)$ d'éléments, on a une base.

Comment calculer le rang d'une famille de vecteurs ?

M1 Pour calculer $\mathrm{rg}\,(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, retirer un vecteur de la famille s'il est combinaison linéaire des autres. Puis continuer de retirer des vecteurs que l'on peut exprimer comme combinaison linéaire des autres. S'arrêter, dès qu'on obtient une famille libre, le rang est alors égal au nombre de vecteurs qui restent.

M2 Se fixer une base $\mathscr{B}$, alors $\mathrm{rg}\,(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}\,(e_1, e_2, \ldots, e_n))$ puis échelonner cette matrice pour déterminer son rang.

8 Carte mentale pour étudier la liberté d'une famille