

Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

Exercice 1 (★ Cou, Rai, Rec ©). Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des espaces vectoriels (on vérifiera si ce sont ou non des sous-espaces vectoriels d'espaces vectoriels de référence que l'on précisera).

1. L'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et continues en 0.
2. L'ensemble des fonctions monotones définies sur $\mathbb{R}$.
3. L'ensemble des fonctions réelles définies sur $[1; 2]$ prenant la valeur 1 en 1.
4. $\{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6 = 0\}$
5. L'ensemble des suites réelles arithmétiques
6. L'ensemble des suites réelles géométriques
7. $\{f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), f(a) = f(b)\}$
8. $\{f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), \int_a^b f(t) dt = 0\}$
9. $\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ dérivable} \mid f(1) = f'(1) = 0\}$
10. $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \text{ est inversible}\}$
11. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ converge}\}$
12. $\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n) \text{ bornée}\}$
13. $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M = M^2\}$
14. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$
15. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$
16. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$
17. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 0\}$
18. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$
19. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x - 2y = 0\}$

Exercice 2 (★ Rai). 1. Montrer que les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels engendrés par une partie finie à déterminer :

- (a) Dans $E = \mathbb{R}[X]$: $F = \{aX^3 + bX + c, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$
- (b) Dans $E = \mathbb{R}^n$: $G = \{(a, \dots, a) \in \mathbb{R}^n, a \in \mathbb{R}\}$
- (c) Dans $E = \mathbb{R}^3$: $H = \{(a - b, a + b, a - 3b) \in \mathbb{R}^3, (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$
- (d) Dans $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$: $N = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}, (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$
- (e) Dans $E = \mathbb{R}^3$: $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\}$
- (f) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: $D = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n\}$
- (g) Dans $E = \mathbb{R}_3[X]$: $A = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(1) = 0\}$.
- (h) Dans $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: $S = \{y \in E \mid y'' - 5y' - 6y = 0\}$

2. Déterminer $H \cap R$.

Exercice 3 (ℳ★ Rai, Rec ©). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, F et G deux sous-espaces vectoriel de E . Montrer que

$$F \cup G \text{ sous-espace vectoriel de } E \iff F \subset G \text{ ou } G \subset F$$

Sous-espaces vectoriels engendrés

Exercice 4 (★★ Rai, Rec). Soit $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux familles finies de vecteurs d'un espace vectoriel E .

1. Comparer $\text{vect}(\mathcal{F} \cap \mathcal{G})$ et $\text{vect}(\mathcal{F}) \cap \text{vect}(\mathcal{G})$.
2. Comparer $\text{vect}(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$ et $\text{vect}(\mathcal{F}) + \text{vect}(\mathcal{G})$.

Exercice 5 (★★ Rec, Rai). Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $\omega \in \mathbb{R}$ on note $F = \{x \mapsto A \cos(\omega x + \varphi), (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E en trouvant une partie génératrice.

Exercice 6 (ℳ★ Rai). Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on note P l'ensemble des fonctions paires de E et I l'ensemble des fonctions impaires de E . Montrer que P et I sont des sous-espaces vectoriels de E , puis montrer que pour tout $f \in E$, il existe un unique couple $(p, i) \in P \times I$ tel que $f = p + i$.

Familles libres

Exercice 7 (★★). Soit $\mathcal{F} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une famille liée de vecteurs de E (un $\mathbb{K}$ -EV). Montrer qu'il existe $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $e_j \in \text{vect}(e_1, \dots, e_{j-1})$.

Exercice 8 (ℳ★ Cou, Rai). Considérons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient $a < b$ deux réels, on pose $f: x \mapsto e^{ax}$ et $g: x \mapsto e^{bx} \in E$ montrer que f et g sont indépendantes dans E .

Exercice 9 (ℳ★ Cou, Rai). Considérons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient $a < b$ deux réels, on pose $f: x \mapsto |x - a|$ et $g: x \mapsto |x - b| \in E$ montrer que f et g sont indépendantes dans E .

Exercice 10 (ℳ★ Rec ©). Généraliser l'exercice 8 (resp. 9) dans le cas de n fonctions de la forme $x \mapsto e^{a_i x}$ (resp. $x \mapsto |x - a_i|$) avec $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Exercice 11 (★ Cal YT). Les familles suivantes sont-elles des familles libres de $\mathbb{R}^3$?

1. $x_1 = (1, 0, 1)$ et $x_2 = (1, 2, 2)$
2. $x_1 = (1, 2, 1)$, $x_2 = (2, 1, -1)$ et $x_3 = (1, -1, -2)$
3. $x_1 = (1, -1, 1)$, $x_2 = (2, -1, 3)$ et $x_3 = (-1, 1, -1)$
4. $x_1 = (1, 2, 3)$, $x_2 = (2, 3, 1)$ et $x_3 = (-4, 1, 0)$

Exercice 12 (★ Cal © YT). Montrer que $(1)_n$, $(2^n)_n$ et $(3^n)_n$ sont des vecteurs linéairement indépendants de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 13 (★★ Rai, Cal). 1. Soit $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$. Calculer

$$\int_0^{2\pi} \cos(px) \cos(qx) \, dx$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $f_i: x \mapsto \cos(ix)$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$. En déduire que $(f_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une famille libre.

Exercice 14 (★ Rai, Cal ©). Dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}([0; 2\pi], \mathbb{R})$ on note

$$f_1 = \cos, f_2 = \sin \quad \forall x \in [0; 2\pi], f_3(x) = x \cos(x), f_4(x) = x \sin(x)$$

Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est une famille libre de E .

Bases d'un espace vectoriel

Exercice 15 (★ Cal, Cou YT). Dans $\mathbb{R}^3$, on pose

$$e_1 = (1, 1, 1), e_2 = (1, 1, 0), e_3 = (0, 1, 1)$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ un vecteur exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Quelles sont ses coordonnées dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$?

Exercice 16 (★ Cal, Cou). Dans $\mathbb{R}_2[X]$, on pose

$$P_1 = X^2 + 1 \quad P_2 = X^2 + X - 1 \quad \text{et} \quad P_3 = X^2 + X$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Soit $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 \in \mathbb{R}_2[X]$ un vecteur exprimé dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Quelles sont ses coordonnées dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$?

Exercice 17 (★ Cal, Rai YT). Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. On note $\mathcal{C}$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec M . Montrer que $\mathcal{C}$ est un espace vectoriel. En donner une base.

Exercice 18 (★ Cal, Cou). Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E . On pose

$$f_1 = e_1 + 2e_3, f_2 = e_3 - e_1, f_3 = e_1 + 2e_2.$$

1. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de E .
2. Soit $x \in E$ un vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ sont connues. Quelles sont ses coordonnées dans la nouvelle base $\mathcal{B}'$?

Dimensions

Exercice 19 (★ Cal, Rai). Pour chacun des sous-espaces vectoriels E considérés ci-dessous, déterminer une base de E et donner sa dimension.

1. $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2y + z - t = 0\}$
2. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0 \text{ et } x + 3y + 2z = 0\}$
3. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3z = 2x = y\}$
4. $E = \text{vect}(\text{ch}, \text{sh}, \exp, \exp \circ (-\text{Id}_{\mathbb{R}}))$
5. (YT) $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M^T = M\}$
6. L'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
7. L'ensemble des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.
8. $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid m_{11} + m_{22} = 0\}$.
9. (★★ YT) $T_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ (ensembles des matrices triangulaires supérieures, antisymétriques ou symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$)
10. $\mathbb{C}^n$ vu comme un $\mathbb{R}$ -ev.

Exercice 20 (★ Rai ©). On se place dans $E = \mathbb{R}^3$

1. Donner un exemple d'une famille génératrice de E non libre.
2. Donner un exemple d'une famille libre de E non génératrice.
3. Donner un exemple d'une famille non libre de E de trois vecteurs non colinéaires deux à deux.

Exercice 21 (★★ Rai, Rec ©). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $H = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid \sum_{k=1}^n m_{k,k} = 0\}$. Démontrer que H est un sous-espace vectoriel et en trouver une base puis la dimension.

Exercice 22 (★ Cal). Soit $\mathcal{B} = ((0, 1, x), (0, x, 1), (x, 5x, x))$. Déterminer les $x \in \mathbb{R}$ tels que $\mathcal{B}$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 23 (★ Cal ©). Soit $E = \mathbb{R}_4[X]$ et a et b deux réels distincts.

1. On désigne par F le SEV de E constitué des polynômes dont a et b sont racines. Déterminer la dimension de F .
2. On pose G l'ensemble des polynômes de E tel que a soit une racine multiple, démontrer que G est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

Exercice 24 (★ Cal ©). On considère les familles de $E = \mathbb{R}^4$ suivantes $\mathcal{F}_1 = ((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 0, 0, 0))$, et $\mathcal{F}_2 = ((1, 1, 1, 1), (1, 2, 3, 4), (1, 4, 7, 10))$ dire si $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ peuvent être complétées en des bases de E et si oui, complétez-les.

Exercice 25 (★★★ Rec, Rai). Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe une base de F dont tous les éléments ont des degrés différents. Montrer qu'il existe une base de F dont tous les éléments sont de même degré.

Exercice 26 (★★ Rec ©). Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que la famille $(I_n, M, M^2, \dots, M^d)$ soit forcément liée.

Exercice 27 (★★★ Rai, Rec). Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n .

1. Justifier que E peut aussi être considéré comme un $\mathbb{R}$ -EV.
2. Donner une relation entre $\dim_{\mathbb{R}}(E)$ et $\dim_{\mathbb{C}}(E)$. À partir d'une $\mathbb{C}$ -base de E , donner une $\mathbb{R}$ -base de E .
3. La réciproque est-elle vraie : tout $\mathbb{R}$ -espace vectoriel peut-il être vu comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel ? Sinon, quels sont ceux qui le peuvent ?

Exercice 28 (★ Rai, Rec ©). Dans $E = \mathbb{C}_3[X]$, posons $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$. Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E en en donnant une base. En déduire sa dimension.

Exercice 29 (★ Cal). Soit $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + 2z = 0\}$ et $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid t + z = 0 \text{ et } x + y - t = 0\}$. Déterminer $\dim(F)$, $\dim(G)$, $\dim(F \cap G)$.

Exercice 30 (★ Rai ©). Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, on pose $F = \text{vect}(X - 1)$ et $G = \{P \in E \mid P(2) = 0\}$.

1. Justifier que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E .
2. Déterminer leur dimension.
3. Montrer que la concaténation d'une base de F et d'une de G est une base de E et que tout élément de E s'écrit comme somme d'un élément de F et d'un élément de G et ce d'une unique manière.

Exercice 31 (★ Rai ©). Soient $n \in \mathbb{N}^*$, et $E = \mathbb{R}^n$, posons :

$$A = \{(\lambda, \dots, \lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad \text{et} \quad B = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

1. Déterminer $\dim(A)$.
2. Montrer que B est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
3. Déterminer la dimension de B puis une base de B .

Exercice 32 (★★★ Rai, Cou ©). Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces-vectoriels de dimension finie. Montrer que $E \times F$ est un espace-vectoriel, puis qu'il est de dimension finie et calculer $\dim(E \times F)$.

Exercice 33 (§★★ Rai, Rec ©). Soit $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de $n + 1$ réels deux à deux distincts.

1. On suppose qu'il existe $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Montrer qu'alors $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Montrer qu'une telle famille existe et est unique.
3. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ donner les coordonnées de P dans cette base.
4. Soit $(b_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$, montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(a_i) = b_i$.

Rang

Exercice 34 (★ Cal). Calculer le rang des familles suivantes :

- $\mathcal{F} = ((1, 1, 1), (0, 1, 2), (-1, 0, 1), (0, 1, 2))$
- $\mathcal{F} = (I_n, J, J^2, J^3)$ avec $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice contenant que des 1.
- $\mathcal{F} = (\cos, \sin, x \mapsto \sin(2x))$.
- $\mathcal{F} = ((1, j, j^2), (j, j^2, 1), (j^2, 1, j))$ dans $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{C}$ -EV. puis dans $\mathbb{C}^3$ vu comme un $\mathbb{R}$ -EV où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
- $\mathcal{F} = ((1, 2, 3, 4), (2, 2, 2, 2), (-3, 0, 1, 2), (1, 1, -8, 5), (2, 1, 1, 1))$

Sujet de concours

Exercice 35 (★ Rai). Posons $E = \mathbb{R}_4[X]$, $A = X^4 + 4X + 3$. et

$$F = \{\alpha X^4 + (\alpha + \beta)X + \beta \mid (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{et} \quad G = \{P \in E \mid P'(1) = 0\}$$

1. Montrer que si $Q \in F$, alors $X + 1 \mid Q$.
2. Décomposer A en produit d'irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ puis de $\mathbb{C}[X]$.
3. Montrer que F est un SEV de $\mathbb{R}_4[X]$. Déterminer une base de F et $\dim(F)$.
4. Montrer que G est un SEV de $\mathbb{R}_4[X]$ et que $\dim(G) \leq 4$. Montrer que la famille $(1, (X-1)^2, (X-1)^3, (X-1)^4)$ est une famille libre de polynômes de G . Puis que c'en est une base. Que vaut $\dim(G)$?
5. Déterminer une base de $F \cap G$ et déterminer $\dim(F \cap G)$.

Inclassable

Exercice 36 (★★ Rec, Rai, Mod). Dans cet exercice on considère le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, et on y définit une multiplication par :

$$\star: \begin{cases} \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ ((a, b), (a', b')) & \longmapsto (aa' - bb', ab' + a'b) \end{cases}$$

1. Vérifier que pour tout $(a, b), (a', b'), (a'', b'') \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} (a, b) * (a', b') &= (a', b') * (a, b) \\ ((a, b) * (a', b')) * (a'', b'') &= (a, b) * ((a', b') * (a'', b'')) \\ (a, b) * [(a', b') + (a'', b'')] &= (a, b) * (a', b') + (a, b) * (a'', b'') \end{aligned}$$

2. On pose $\vec{1} = (1, 0)$ vérifier $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{1} * (a, b) = (a, b)$
3. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, montrer qu'il existe $(a', b') \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a, b) * (a', b') = \vec{1}$.
4. On pose $\vec{i} = (0, 1)$, calculer $\vec{i} * \vec{i}$
5. Montrer que $\mathbb{R}^2 = \text{vect}(\vec{1}, \vec{i})$.
6. À votre avis, que venons nous de faire ?