Chapitre 7

Applications linéaires

Prérequis :

- Ensembles et applications : image d'un ensemble, injectivité, surjectivité, bijectivité
- Systèmes linéaires
- Matrices
- Polynômes
- Espaces vectoriels
- Espaces vectoriels de dimension finie

Objectifs :

- Définir les applications linéaires (des fonctions particulières qui vont d'un espace vectoriel à un autre)
- Lien entre applications linéaires et matrice

Table des matières

Dans tout ce chapitre, sauf indication contraire, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E et F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1 Généralités

Définition d'une application linéaire

1. Une fonction $u\colon E \longrightarrow F$ est dite **linéaire** si $\quad \forall (x, x', \lambda) \in E^2 \times \lambda \in \mathbb{K} \quad u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x')$
2. On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
3. Si $E = F$ et $f \in \mathscr{L}(E, E)$, f est appelée **endomorphisme** de E. On note $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, E)$.

Exemples 1.

1. Soit $f\colon x \longmapsto 3x$, f est linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. $f\colon (x, y) \longmapsto (x, x+y, x-y)$ est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\Phi\colon f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ est linéaire de $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$
4. $\Delta\colon \begin{cases} \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) & \longrightarrow \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto f' \end{cases}$ est linéaire.
5. $f\colon A \longmapsto A^\top$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
6. $f\colon (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^n x_k$ est linéaire de $\mathbb{C}^n$ vers $\mathbb{C}$.

Remarques 1. Pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$, on a :

- $u(0_E) = 0_F$
- Pour tout $(x, x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $u(x + x') = u(x) + u(x')$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$
- Pour tout $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in E^n$, et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $u\left(\displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^n \lambda_k u(e_k)$.

Proposition n° 1 : opérations sur les applications linéaires

1. Si $(f, g, \lambda) \in \mathscr{L}(E, F)^2 \times \mathbb{K}$, alors $\lambda f + g \in \mathscr{L}(E, F)$
2. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$

Proposition n° 2 : propriétés des endomorphismes

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$
2. $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$
3. $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \in \mathscr{L}(E)$ par convention, $f^0 = \mathrm{Id}_E$

Définition d'un isomorphisme et deux espaces vectoriels isomorphes

- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective, on dit que f est un **isomorphisme de E sur F**.
- On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E vers F.
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est bijective, on dit que f est un **automorphisme** de E.

Proposition n° 3 : composition et inverse d'isomorphismes

Soient $f \in \mathscr{L}(E, F)$ et $g \in \mathscr{L}(F, G)$ deux isomorphismes :

1. $f^{-1}\colon F \to E$ est un isomorphisme
2. $g \circ f\colon E \to G$ est un isomorphisme et $\quad (g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Définition du noyau et de l'image

Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

1. On appelle **noyau** de f : $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
2. On appelle **image** de f : $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E \quad y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in E\}$

Proposition n° 4 : le noyau et l'image sont des espaces vectoriels
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un SEV de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un SEV de F.

Exemple 2. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto (x+y, -2x-2y, t-z) \end{cases}$. Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $\dim(\mathrm{Im}(f))$.

Remarque 2. La proposition 4 fournit une nouvelle méthode pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Exemples 3. $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\}$ sont des espaces vectoriels.

Proposition n° 5 : caractérisation de l'injectivité/surjectivité des applications linéaires
Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.
1. f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$.
2. f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Exemple 4. La fonction $u : \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P & \longmapsto P' \end{cases}$, est-elle injective ? Déterminer $\mathrm{Im}(u)$, en déduire que u est surjective.

2 Applications linéaires en dimension finie

2.1 Bases et applications linéaires

On suppose maintenant que E est de dimension finie n et on fixe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E.

Définition de l'image d'une famille finie de vecteurs
On appelle **image** de $\mathscr{F} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ par $u \in \mathscr{L}(E,F)$ la famille de vecteurs de F : $u(\mathscr{F}) = (u(f_1), \dots, u(f_p))$.

Théorème n° 1 : un isomorphisme transforme une base en base et préserve les dimensions
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors, u est un isomorphisme ssi $u(\mathscr{B})$ est une base de F.
Dans ce cas, F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.

Remarque 3. Ce résultat sert à déterminer la dimension d'un espace vectoriel.

Théorème n° 2 : une fonction linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base
Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et $\mathscr{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une famille de F, alors il existe un unique $u \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.

Remarques 4.
- Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors E et F sont isomorphes. En particulier, E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ donc $\mathrm{Im}(f)$ est un SEV de F de dimension finie.

2.2 Rang d'une application linéaire et théorème du rang

Définition du rang d'une application linéaire
On appelle **rang** de $u \in \mathscr{L}(E,F)$ la dimension de son image, on note $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$.

Proposition n° 6 : lien entre rang d'une application linéaire et rang de l'image d'une base
Soient $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(\mathscr{B})) = \mathrm{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.

Exemple 5. Soit $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto (x_1, x_1) \end{cases}$. Que vaut $\operatorname{rg}(u)$?

Théorème n° 3 du rang *(admis)*
Soient E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors $\dim(E) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \dim(\operatorname{Im}(f))$

Exemple 6. En reprenant la fonction u de l'exemple 5, quelle est la dimension du noyau de $\operatorname{Ker}(u)$?

Théorème n° 4 : caractérisation de la bijectivité en même dimension finie
Soient E et F deux EV de dimension finie avec $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Sont équivalents :
1. f est injective de E dans F.
2. f est surjective de E dans F.
3. f est bijective de E dans F.

Exemples 7.
- Montrer que $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (y+z, z+x, x+y) \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $\Phi\colon P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ surjectif mais non injectif.
- Montrer que $\Psi\colon f \mapsto (x \mapsto \int_0^x f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ injectif mais non surjectif.

3 Matrice d'une application linéaire

On fixe E et F, G trois $\mathbb{K}$-EV de dimension finie de dimensions respectives n, p et q, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E, $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F, $\mathscr{D}$ est une base de G.

Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases données

On appelle **matrice** de $u \in \mathscr{L}(E,F)$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ la matrice de $u(\mathscr{B})$ dans la base $\mathscr{C}$ notée :

$$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,j} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{array} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \qquad \text{où} \qquad u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$$

$\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ a $\dim(E) = n$ colonnes et $\dim(F) = p$ lignes. Si $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on pose $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$.

Exemples 8.
- Écrire la matrice de $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto P' + XP'' \end{cases}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ telle que $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{C}$ celle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Que valent $g(X)$, $g(X^2)$ et $g(2X - 3X^2)$?

Théorème n° 5 : calcul de la matrice de $u(x)$ en fonction de la matrice de u et celle de x
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$ alors $\operatorname{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x)) = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

Exemple 9. En reprenant l'exemple 8, calculer $Y = A\tilde{X}$ où $\tilde{X} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{C}$ celle de $\mathbb{R}_2[X]$.

Proposition n° 7 : matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires

Soient $(u,v) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + v) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v)$

Théorème n° 6 : matrice d'une composée d'applications linéaires

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$

$$\begin{tikzcd}
G & F \arrow[l, "v"] & E \arrow[l, "u"] \arrow[ll, bend right, "v\circ u"'] \\
v(u(x)) \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & u(x) \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] & x \arrow[u, phantom, "\rotatebox{90}{$\in$}"] \\
\mathscr{D} & \mathscr{C} & \mathscr{B}
\end{tikzcd}$$

Remarques 5.
- Le produit matriciel a, en fait, été défini ainsi pour avoir cette propriété.
- Le produit matriciel comme la composée ne sont pas commutatifs donc l'ordre est important.
- Si on notait $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, la formule deviendrait : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{B}}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{C}}(v)\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}(u)$, ce qui serait plus «logique», mais cette notation n'est pas usuelle et donc non conseillée.

Proposition n° 8 : matrice d'un automorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors u est bijective ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est inversible. Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1})$.

Définition du noyau, image et rang d'une matrice

On appelle **noyau**, **image** et **rang** de la matrice $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$:
- $\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$ (SEV de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$)
- $\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad Y = AX\} = \{AX \mid X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$ (SEV de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$)
- $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$

Proposition n° 9 : lien entre image (resp. noyau) de f et image (resp. noyau) de A

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $x \in E$ et $y \in F$.
1. $x \in \mathrm{Ker}(f) \iff X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in \mathrm{Ker}(A)$
2. $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$
3. $y \in \mathrm{Im}(f) \iff Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y) \in \mathrm{Im}(A)$
4. $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$
5. $n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$ où n est le **nombre de colonnes** de A (théorème du rang version matricielle)

Péril imminent : théorème du rang (version matricielle)

Pour toute matrice A, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$ est égal au nombre de **colonnes** de A.

Remarque 6. Si on connaît $\mathrm{Ker}A/\mathrm{Im}A$, alors en passant des coordonnées aux vecteurs, on connaît $\mathrm{Ker}f/\mathrm{Im}f$.

Exemple 10. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_1[X])$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ avec $\mathscr{B} = (1, X)$. Calculer $\mathrm{Ker}A$, $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}A$ et $\mathrm{Im}f$.

Attention soyez homogène !

Si $f \in \mathscr{L}(E,F)$, une base de $\mathrm{Ker}(f)/\mathrm{Im}(f)$ contient des vecteurs de E/F et non des matrices colonnes.

Proposition n° 10 : propriétés du rang et de l'image d'une matrice

Soient $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $C_1, \dots, C_n$ les n colonnes de A, $L_1, \dots, L_p$ les p lignes de A.

1. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(C_1, C_2, \dots, C_n)$
2. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, \dots, C_n)$
3. Si $B \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est inversible alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$
4. Si $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est inversible alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$
5. $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A)$ *(admis)*
6. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(L_1, \dots, L_p)$
7. $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(\mathscr{F}))$ pour $\mathscr{F} = (f_1, f_2, \dots, f_q)$ une famille de vecteurs de E.

Remarque 7. Le rang d'une matrice est invariant par opérations sur les lignes et colonnes. C'est pourquoi on peut calculer le rang d'une matrice en l'échelonnant.

Exemples 11. Calculer le rang des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Comment déterminer sans calcul le rang, l'image et le noyau d'une matrice A ?

1. Trouver $\mathscr{F}$, une famille de colonnes de A, telle que tout autre colonne de A est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$.
2. Démontrer/affirmer que $\mathscr{F}$ est libre, ainsi, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Card}\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$.
3. Si C_j est une colonne de A qui n'est pas dans $\mathscr{F}$, alors $C_j \in \mathrm{vect}(\mathscr{F})$, ainsi le vecteur colonne des coefficients de liaison est un vecteur du noyau. Grâce au théorème du rang, on obtient assez de vecteurs.

Exemples 12. Déterminer, sans calcul, le rang, l'image et le noyau des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 11 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition n° 11 : caractérisation des matrices inversibles

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Sont équivalents :

1. A est inversible
2. $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
3. $\mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
4. $\mathrm{rg}(A) = n$
5. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad BA = I_n$ (et alors $B = A^{-1}$)
6. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = I_n$ (et alors $B = A^{-1}$)

Exemple 13. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

4 Changement de bases

La matrice d'une application linéaire dépend *a priori* des bases choisies. Que se passe-t-il si on change de base ?

Définition de la matrice de passage

On appelle **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$. On note cette matrice $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_\mathscr{B}(\mathscr{B}')$.

Exemple 14. Soient $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathscr{B}' = (5, 2X - 3, 5X^2 - 2)$ deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Remarque 8. Notons que $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$

Proposition n° 12 : inversibilité et inverse la matrice de passage

Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Proposition n° 13 : formule de changement de bases pour un vecteur

Si $x \in E$, notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ et $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ ie $X = PX'$

Moyen mnémotechnique pour la formule de changement de base pour un vecteur

Pour ne pas se tromper de formule, retenir «**pépé**» : les «p» sont du même côté de la formule $\boldsymbol{P}$ et X**prime**.

Exemples 15. Déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(Q)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q)$ où $Q = 1 + 2(X-1) + 2(X-1)^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, $\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2)$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$?

Théorème n° 7 : formule de changement de base pour un endomorphisme

Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, alors $A = PDP^{-1}$.
Autrement dit $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Moyen mnémotechnique pour retenir la formule de changement de base d'un endomorphisme

On peut retenir : «**A**lice = **P**ensionnaire **D**u **PMU**» où **PMU** encode P^{-1} (**P** **M**oins **U**n)

Remarque 9. Souvent, la base $\mathscr{B}$ sera la base canonique de E, la matrice $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ s'obtient alors facilement contrairement à $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$. La base $\mathscr{B}'$ rendra souvent $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ agréable (matrice diagonale ou triangulaire par exemple).

Exemple 16. Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ noté $f\colon (x,y) \mapsto (5x+y, x+5y)$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que $\mathscr{B}' = ((1,1),(1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner D la matrice de f dans cette base.
3. Calculer D^n, puis grâce à la formule de changement de base, calculer A^n. En déduire f^n.

Péril imminent décomposer dans la bonne base

Pour calculer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, il faut décomposer $f(e'_j)$ dans $\mathscr{B}'$ et non dans $\mathscr{B}$.

Définition de deux matrices semblables

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Remarque 10. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, alors A et B sont semblables ssi il existe $\mathscr{B}'$ base de E telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.

loic.devilliers@proton.me

Résumé du chapitre sous forme de tableaux

Lien entre espaces vectoriels et matrices

Soient E et F, G sont trois EV de dimension finie, $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$. $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ sont des bases de E, $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ est une base de F, $\mathscr{D}$ est une base de G.

Concept	**Monde : EV/fonction linéaire**	**Monde : Matrices**	**Lien entre les deux mondes**
Vecteur au départ	$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$	$X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$	$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
Vecteur à l'arrivée	$y = \sum_{j=1}^{p} y_i f_i \in F$	$Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$	$Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$
Image des vecteurs de la base	$u \in \mathscr{L}(E,F)$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$	$A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$	$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$
Image d'un vecteur	$y = u(x)$	$Y = AX$	
Définition de l'image	$\mathrm{Im}(u) = \{u(x) \mid x \in E\}$	$\mathrm{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$	$y \in \mathrm{Im}(u)$ ssi $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y) \in \mathrm{Im}(A)$
Famille génératrice de l'image	$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))$	$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(C_1, \dots, C_n)$ où $C_j = j$-ième colonne de A.	
Rang	$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$	$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$	$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u)$
Noyau	$\mathrm{Ker}(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$	$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$	$x \in \mathrm{Ker}(u)$ ssi $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in \mathrm{Ker}(A)$ $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(u))$
Théorème du rang	$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$	$n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$	WARNING : n est le nombre de colonnes de A
Composition/ Produit	$v \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$	$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$	$AB = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u)$
Changement de base	$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ bases de E où $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$	$P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$	$P = (p_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$
Changement de base pour un vecteur	$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ bases de E et $x \in E$	$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$	$X = PX'$

Cas particuliers des endomorphismes

Objets	**Endomorphisme** $u \in \mathscr{L}(E)$	**Matrice carrée** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$	Lien $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$
Changement de base	$u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ bases de E	$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$, $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$	$A = PDP^{-1}$
Inversibilité bijectivité	Il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$	Il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$	u est bijective SI ET SEULEMENT SI A est inversible et $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1})$
Vecteur propre	$x \in E$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$	$X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$	X vecteur propre de A pour λ SI ET SEULEMENT SI x vecteur propre de u pour λ
Valeur propre	$\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$	$\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = \lambda X$	λ valeur propre de A ssi λ valeur propre de u
Spectre	ensemble des valeurs propres de u : $\mathrm{Sp}(u)$	ensemble des valeurs propres de A : $\mathrm{Sp}(A)$	$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u)$
Diagonalisabilité	u est diagonalisable s'il existe $\mathscr{B}'$ base de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ soit diagonale	A est diagonalisable s'il existe P inversible et D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$	u est diagonalisable ssi $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonalisable.

Opérations sur les lignes/colonnes

But	**Méthode**
Résoudre un système linéaire $AX = Y$ où $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$	Opérations **SEULEMENT** sur les lignes du système.
Savoir si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et déterminer son inverse	Opérations **SEULEMENT** sur les lignes sur A et I_n jusqu'à obtenir I_n et B, A étant inversibe ssi c'est possible possible. Dans ce cas, $A^{-1} = B$. **Ou** Résoudre le système $Y = AX$: A est inversible ssi s'il $Y = AX$ admet toujours une solution, sous la forme $X = BY$. Dans ce cas, $A^{-1} = B$.
Trouver le rang de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	Effectuer des opérations sur les lignes **ET** les colonnes jusqu'à trouver une matrice échelonnée.
Trouver le rang de $f \in \mathscr{L}(E,F)$	Poser $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et calculer $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$ par la méthode précédente.
Trouver le rang de $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E	Soit $\mathscr{B}$ une base de E, prendre $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ et calculer $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(A)$.