

Correction de l'exercice 1. a) Notons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E, f \text{ continue en } 0\}$.

- $F \subset E$
- La fonction nulle : $\theta: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{cases}$ est bien continue en 0 (en effet, $\theta(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 = \theta(0)$). Donc $\theta \in F$
- Soit $(f, g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est continue en 0, en effet :

$$(f + \lambda g)(x) = f(x) + \lambda g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} f(0) + \lambda g(0) = (\lambda f + g)(0)$$

donc $f + \lambda g \in F$

Conclusion : F est un sous-espace vectoriel de E .

b) Notons $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et $F = \{f \in E, f \text{ monotone sur } \mathbb{R}\}$.

On va montrer que F n'est pas un sous-espace vectoriel de E . Prenons $f: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 \end{cases}$ et $g: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto -3x \end{cases}$,

alors f et g sont monotones donc $f \in F$ et $g \in F$. Posons $h = f + g: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x^3 - 3x \end{cases}$ Remarquons que

$0 \leq 1$ et que $h(0) = 0 > h(1) = -2$ donc h n'est pas croissante, remarquons aussi que $1 \leq 2$ et que $h(1) = -1 < h(2) = 2$, donc h n'est pas décroissante. Ainsi, $h = f + g \notin F$. Par conséquent, F n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

c) Notons $E = \mathcal{F}([1; 2], \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{[1; 2]}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $[1; 2]$ et $F = \{f \in E, f(1) = 1\}$. Alors, posons la fonction nulle $\theta: \begin{cases} [1; 2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{cases}$, comme $\theta(1) = 0$, $\theta \notin F$. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

d) Notons $F = \{(u_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6 = 0\}$, posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$, $(u_n)_n$ est la suite nulle, pour $n = 28 \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 5u_{n+1} + 6 = 6 \neq 0$, donc la suite nulle n'est pas dans F , donc F n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

e) Notons

$$F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, (u_n)_n \text{ est arithmétique}\} = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \exists r \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + r\}$$

- $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$, $(u_n)_n$ est la suite nulle. Posons également $r = 0$, de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 0 = u_n + r$. Donc la suite nulle est dans F .
- Soient (u_n) et $(v_n) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons r la raison de $(u_n)_n$ et r' la raison de $(v_n)_n$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda u_{n+1} + v_{n+1} = \lambda(u_n + r) + v_n + r' = (\lambda u_n + v_n) + (\lambda r + r')$$

Ainsi, la suite $(\lambda u_n + v_n)_n$ est une suite arithmétique (de raison $\lambda r + r'$). Dès lors, $(\lambda u_n + v_n)_n \in F$.

Ainsi, l'ensemble des suites arithmétiques réelles est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites réelles.

f) Notons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des suites réelles et $F = \{(u_n)_n, u_n \text{ soit géométrique}\}$. Prenons $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ deux suites définies par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1^n$ et $v_n = 2^n$, alors $(u_n)_n \in F$ et $(v_n)_n \in F$. Notons $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n = 1 + 2^n$. Remarquons que $w_0 = 2$ et $w_1 = 3$ ne sont pas nuls, on peut donc calculer $\frac{w_1}{w_0} = \frac{3}{2}$ et $\frac{w_2}{w_1} = \frac{5}{3}$, donc $\frac{w_1}{w_0} \neq \frac{w_2}{w_1}$, ainsi la suite $(w_n)_n$ n'est pas géométrique. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin F$. F n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E .

g) $\{f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), f(a) = f(b)\}$

h) Posons $E = \mathcal{F}([a; b], \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $[a; b]$. Et $F = \{f \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), \int_a^b f(t) dt = 0\}$:

- $F \subset E$.

- La fonction nulle $\theta: \begin{cases} [a; b] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto 0 \end{cases}$ est continue sur $[a; b]$ et $\int_a^b \theta(t) dt = \int_a^b 0 dt = 0$. Donc $\theta \in F$.
- Soit $(f, g) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est continue sur $[a; b]$ (opérations sur les fonctions continues), donc $f + \lambda g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R})$. De plus, par linéarité de l'intégrale :

$$\int_a^b (f + \lambda g)(t) dt = \int_a^b f(t) + \lambda g(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \lambda \int_a^b g(t) dt = 0 + \lambda 0 = 0$$

Donc $f + \lambda g \in F$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E .

- $\{f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f(1) = f'(1) = 0\}$
- Notons le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M \text{ est inversible}\}$. La matrice nulle 0_n n'est pas inversible (en effet, pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $0_n \times B = 0_n \neq I_n$). Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de E .
- Notons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles. Et $F = \{(u_n) \in E, (u_n) \text{ converge}\}$.
 - $F \subset E$
 - Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 0$, $(z_n)_n$ est la suite nulle dans E , de plus, $z_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, donc $(z_n)_n \in F$.
 - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$, notons ℓ la limite de $(u_n)_n$ et ℓ' la limite de $(v_n)_n$, alors d'après le cours $u_n + \lambda v_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell + \lambda \ell'$, ainsi, $\lambda(u_n)_n + \lambda(v_n)_n$ est une suite convergente. Donc $(u_n)_n + \lambda(v_n)_n \in F$.

Donc F est un sous-espace vectoriel de E .

- Notons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles et $F = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid (u_n)_n \text{ bornée}\}$.
 - $F \subset E$
 - Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = 0$ de sorte que $(z_n)_n$ soit la suite nulle, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z_n| \leq 42$, de sorte que la suite nulle soit bien bornée. Donc $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$.
 - Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons $(w_n)_n = (u_n)_n + \lambda(v_n)_n$. Il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq M$. De même, il existe $M' \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|v_n| \leq M'$. Alors, d'après l'inégalité triangulaire, on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |w_n| = |u_n + \lambda v_n| \leq |u_n| + |\lambda v_n| \leq |u_n| + |\lambda| \times |v_n| \leq M + |\lambda| M'$$

Ce qui prouve que la suite $(w_n)_n \in F$.

Ainsi, F est un sous-espace vectoriel de E .

- Notons le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $F = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), M = M^2\}$. Comme $I_n^2 = I_n$, on a que $I_n \in F$. Pourtant $(2I_n)^2 = 4I_n \neq 2I_n$, donc $2I_n \notin F$. F n'est donc pas un sous-espace vectoriel de E .
- Notons $E = \mathbb{R}^2$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 0\}$.
 - $F \subset E$.
 - $0_E = (0, 0)$, or $0 + 0 = 0$, donc $0_E \in F$.
 - Soit $u \in F$ et $v \in F$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$ tel que $u = (x, y)$ avec $x + y = 0$. De même il existe $x' \in \mathbb{R}$ et $y' \in \mathbb{R}$ tel que $v = (x', y')$ avec $x' + y' = 0$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Notons $w = u + \lambda v = (x + \lambda x', y + \lambda y')$. Calculons

$$(x + \lambda x') + (y + \lambda y') = (x + y) + \lambda(x' + y') = 0 + \lambda 0$$

Donc $w = u + \lambda v \in F$.

F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

- Notons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x + y = 1\}$. Remarquons que $0_E = (0, 0) \notin F$, car $0 + 0 \neq 1$. Donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.
- Notons $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 0\}$, remarquons que $(1, 0) \in F$ et $(0, 1) \in F$, mais $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$ avec $1 \times 1 \neq 0$, donc $(1, 0) + (0, 1) \notin F$. Ainsi, F n'est pas un SEV de $\mathbb{R}^2$.
- Notons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy \geq 0\}$. Remarquons que $u = (10, 1) \in F$ (car $10 \times 1 \geq 0$) que $v = (-1, -10) \in F$, car $(-1) \times (-10) \geq 0$, pourtant $u + v = (9, -9)$ et $9 \times -9 < 0$, donc $u + v \notin F$. F n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

r) Notons l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y\}$. Prenons le vecteur $u = (1, 2)$, alors comme $1 \leq 2$, on a que $u \in F$. Considérons $v = (-1)u = (-1, -2)$, alors comme $-1 > -2$, $v \notin F$, donc F n'est pas un sous-espace vectoriel de E .

s)

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3. Tout d'abord, si $F \subset G$, alors $F \cup G = G$ est bien un sous-espace vectoriel de E . De même, si $G \subset F$ alors $F \cup G = F$ est bien un sous-espace vectoriel de E , ainsi si $F \subset G$ ou $G \subset F$, $F \cup G$ est bien un sous-espace vectoriel de E . Ainsi, l'implication réciproque est vérifiée.

Pour l'implication directe, supposons que $F \cup G$ soit un espace vectoriel et procédons par l'absurde. Supposons donc que F ne soit pas inclus dans G et que G ne soit pas inclus dans F ¹. Cela veut dire qu'il existe $f \in F$ avec $f \notin G$. De même, cela veut dire qu'il existe $g \in G$ avec $g \notin F$. Dans tous les cas, $f \in F \cup G$ et $g \in F \cup G$. Comme $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E , il vient que $f + g \in F \cup G$. Par définition de l'union, $f + g \in F$ ou $f + g \in G$.

- Dans le premier cas $f + g = f' \in F$ et donc $g = f' - f \in F$ (car F est un sous-espace vectoriel de E), donc $g \in F$ ce qui est impossible.
- Dans le second cas, $f + g = g' \in G$ et donc $f = g' - g \in G$ (car G est un sous-espace vectoriel de E), donc $f \in G$ ce qui est impossible.

On obtient donc une contradiction dans tous les cas. Donc notre hypothèse était fausse. Ainsi $F \subset G$ ou $G \subset F$.

Correction de l'exercice 4.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10. • Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, posons $f_i: x \mapsto |x - \alpha_i|$. Supposons la liée. D'après le cours, on sait donc qu'il existe $j \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que f_j s'écrit comme une combinaison linéaire des autres f_i :

$$\exists (\lambda_i)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} \in \mathbb{K}^{n-1} \quad f_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \lambda_i f_i$$

Remarquons que si $j \neq i$, alors $x \mapsto |x - \alpha_i|$ est dérivable en α_j , par combinaison linéaire de fonctions dérivables en α_j , on en déduit que f_j est dérivable en α_j . Ce qui est absurde. La famille $(f_j)_{1 \leq j \leq n}$ est donc libre.

- Posons $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Soient $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n$, posons $f_i: x \mapsto e^{\alpha_i x} \in E$. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0_E$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^n \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$. Montrons que tous les λ_i sont nuls.

Proposons pour cela trois méthodes plus ou moins courtes, plus ou moins rigoureuses.

Méthode 1 Divisons par la plus grande exponentielle, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda_n + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e^{(\alpha_i - \alpha_n)x} = 0$$

Comme $\alpha_i - \alpha_n < 0$ pour $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on en déduit que $\lambda_n = 0$, puis on recommence avec λ_{n-1} etc.²

1. De l'intérêt de savoir nier les ou.

2. Court mais pas très rigoureux.

Méthode 2 Posons pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$, « $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ est libre».

- Initialisation : pour $n = 1$, si on a $\lambda_1 f_1 = 0$, alors comme f_1 n'est pas la fonction nulle, on a $\lambda_1 = 0$: $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
- Hérédité : soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie et montrons $\mathcal{P}(k+1)$ vraie. Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq k+1} \in \mathbb{R}^{k+1}$ tel que

$$\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i f_i = 0_E \quad (1)$$

On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^{k+1} \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0$. Montrons que tous les λ_i sont nuls. Divisons par la plus grande exponentielle, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda_{k+1} + \sum_{i=1}^k \lambda_i e^{(\alpha_i - \alpha_{k+1})x} = 0$$

Comme $\alpha_i - \alpha_{k+1} < 0$ pour $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on en déduit que $\lambda_{k+1} = 0$, en reportant cette information dans (1), on a donc $\sum_{i=1}^k \lambda_i f_i = 0$, en appliquant l'hypothèse de récurrence, $(f_1, f_2, \dots, f_k)$ est libre, on a donc, pour tout $i \in \llbracket 1; k \rrbracket$, $\lambda_i = 0$. De plus, $\lambda_{k+1} = 0$. Ce qui montre la liberté de $(f_1, f_2, \dots, f_{k+1})$. Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion : par récurrence finie, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Donc $\mathcal{P}(n)$ est vraie ainsi, la famille est libre³.

Méthode 3 Soit $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_i = 0$. Supposons qu'il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $\lambda_i \neq 0$, notons $p = \max\{i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \lambda_i \neq 0\}$, p est bien défini car on a pris le maximum d'un ensemble fini non vide d'entiers. Alors $\sum_{i=1}^p \lambda_i f_i = 0$. On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sum_{i=1}^p \lambda_i e^{\alpha_i x} = 0_E$. Divisons par la plus grande exponentielle, on a

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lambda_p + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i e^{(\alpha_i - \alpha_p)x} = 0$$

Comme $\alpha_i - \alpha_p < 0$ pour $i \in \llbracket 1; p-1 \rrbracket$, par passage à la limite quand $x \rightarrow +\infty$, on en déduit que $\lambda_p = 0$, ce qui est absurde. Donc pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_i = 0$, la famille $(f_i)_{1 \leq i \leq n}$ est libre⁴.

Correction de l'exercice 11. Corrigé sur Youtube : <https://youtu.be/nokX87Jcx1Q>

Correction de l'exercice 12. Corrigé sur Youtube : <https://youtu.be/lyCsBIAZMJ0> Notons $u = (1)_{n \in \mathbb{N}}$, $v = (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $w = (3^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $au + bv + cw = 0$ (suite nulle), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a1 + b2^n + w3^n = 0$. Ainsi, pour $n \in \{0, 1, 2\}$, on obtient

$$\begin{cases} a + b + c &= 0 \\ a + 2b + 3c &= 0 \\ a + 4b + 9c &= 0 \end{cases}$$

Ce système de trois équations à trois inconnus se résout en faisant des opérations sur les équations et après résolution, on obtient $a = b = c = 0$.

Ainsi, (u, v, w) est une famille libre.

Correction de l'exercice 13.

3. Plus rigoureux, mais long long.

4. Plus courte que la méthode 2, mais plus rigoureuse que la méthode 1. De plus, c'est la même méthode qu'on avait utilisé pour montré qu'une famille de polynômes échelonnées en degré était libre.

Correction de l'exercice 14. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Supposons que $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 = 0_E$ (la fonction nulle). On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad a \cos(x) + b \sin(x) + cx \cos(x) + dx \sin(x) = 0$$

Si on prend $x = 0$, on obtient $af_1(0) + bf_2(0) + cf_3(0) + df_4(0) = 0$ soit $a + 0 + 0 + 0 = 0$. Donc $a = 0$. En prenant $x = \pi$, on obtient, $c \times (-\pi) = 0$. Donc $c = 0$. En considérant $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient, $b + d\frac{\pi}{2} = 0$, en prenant $x = 3\frac{\pi}{2}$, on obtient $-b - d\frac{3\pi}{2} = 0$. En résolvant ce système de deux équations à deux inconnues, il vient $c = b = 0$. Ainsi $a = b = c = d = 0$. La famille (f_1, f_2, f_3, f_4) est donc libre.

Correction de l'exercice 15. Corrigé sur Youtube : <https://youtu.be/FTBwAY10bMg>

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17. Corrigé sur Youtube : <https://youtu.be/M8Jpf6bvW-Y>

Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9. • Matrices triangulaires supérieures : Corrigé sur Youtube : <https://youtu.be/-1x001EgYPI>
- $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$ (cas particulier plus simple à comprendre avant) : Corrigé sur Youtube : <https://youtu.be/CVt-ryAmokw>
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$: Corrigé sur Youtube : <https://youtu.be/zWRQ1lyYLsk>
- Pour $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, on montre $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$, puis que son cardinal est $\frac{n(n-1)}{2}$.

Correction de l'exercice 20. 1. Posons $g_1 = (1, 0, 0)$, $g_2 = (0, 1, 0)$, $g_3 = (0, 0, 1)$ et $g_4 = (1/2, 3/2, 5/2)$. Alors, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) = xg_1 + yg_2 + zg_3 + 0g_4$. Ainsi, (g_1, g_2, g_3, g_4) est une famille génératrice⁵ de $\mathbb{R}^3$. Cependant, comme $g_4 = \frac{1}{2}g_1 + \frac{3}{2}g_2 + \frac{5}{2}g_3$, la famille (g_1, g_2, g_3, g_4) n'est pas libre⁶

2. Posons $\ell_1 = (1, 0, 0)$ et $\ell_2 = (0, 1, 0)$, alors (ℓ_1, ℓ_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$ (car il s'agit d'une famille de deux vecteurs non colinéaires) mais $(0, 0, 1) \notin \text{vect}(\ell_1, \ell_2)$, en effet toute combinaison linéaire de ℓ_1 et ℓ_2 est de la forme $x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) = (x, y, 0)$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Donc (ℓ_1, ℓ_2) n'est pas une famille génératrice⁷ de $\mathbb{R}^3$.
3. Posons $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (1, 1, 0)$ les vecteurs e_1 , e_2 et e_3 ne sont pas deux à deux colinéaires. Cependant comme $e_3 = e_1 + e_2$, la famille (e_1, e_2, e_3) n'est pas libre.

5. C'est normal, (g_1, g_2, g_3) est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

6. On peut aussi dire que le cardinal d'une famille libre est inférieure ou égale à $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc une famille de quatre vecteurs de $\mathbb{R}^3$ est nécessairement liée.

7. On peut aussi dire que le cardinal d'une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$ est supérieure ou égale à $3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc une famille de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ ne peut pas être génératrice.

Correction de l'exercice 21. 1. Montrons que H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$:

- $H \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- Si $A = 0_n$, alors $\sum_{k=1}^n a_{k,k} = \sum_{k=1}^n 0 = 0$ donc $0_n \in H$.
- Soit $(A, B, \lambda) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \times \mathbb{R}$. Notons $C = \lambda A + B$, alors par linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^n c_{k,k} = \sum_{k=1}^n (\lambda a_{k,k} + b_{k,k}) = \lambda \sum_{k=1}^n a_{k,k} + \sum_{k=1}^n b_{k,k} = \lambda 0 + 0 = 0$$

Ainsi, $\lambda A + B \in H$

Ainsi, H est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Trouvons une base de H . Soit $M \in H$, alors $m_{n,n} = -\sum_{k=1}^{n-1} m_{k,k}$. Ainsi, en décomposant M dans la base canonique et en remplaçant $m_{n,n}$ par sa valeur, il vient :

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{i,j} E_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i} E_{i,i} + m_{n,n} E_{n,n} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} m_{i,j} E_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i} E_{i,i} - \left(\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i} \right) E_{n,n} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} m_{i,j} E_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i} (E_{i,i} - E_{n,n}) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} m_{i,j} E_{i,j} \in \text{vect}(\mathcal{B}) \end{aligned}$$

Où on a posé, $\mathcal{B} = (E_{i,i} - E_{n,n})_{1 \leq i \leq n-1} \cup (E_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n}$. Ainsi, $H \subset \text{vect}(\mathcal{B})$. De plus, toutes les matrices de $\mathcal{B}$ sont dans H (en effet, les matrices $E_{i,i} - E_{n,n}$, pour $1 \leq i \leq n-1$, ont un -1 , un 1 et $n-2$ zéros sur leur diagonale et les matrices $E_{i,j}$, pour $i \neq j$, n'ont que des 0 sur leur diagonale) et que H est un sous-espace vectoriel, $\text{vect}(\mathcal{B}) \subset H$, ainsi $H = \text{vect}(\mathcal{B})$. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de H .

Montrons que $\mathcal{B}$ est libre. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $(\mu_{i,j})_{1 \leq i \neq j \leq n} \in \mathbb{R}^{n^2-n}$. Supposons

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i (E_{i,i} - E_{n,n}) + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \mu_{i,j} E_{i,j} = 0_n$$

Alors, en développant par λ_i et en utilisant la linéarité de la somme :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i E_{i,i} + \left(-\sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \right) E_{n,n} + \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} \mu_{i,j} E_{i,j} = 0_n$$

Or, la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}$ est libre (c'est la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$), donc pour tout $i \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$,

$\lambda_i = 0$ et pour tout (i, j) avec $i \neq j$, $\mu_{i,j} = 0$. Ceci montre que $\mathcal{B}$ est libre.

Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de H .

3. Dès lors, $\dim(H) = \text{Card}(\mathcal{B}) = (n-1) + (n^2-n) = n^2-1$.

Correction de l'exercice 22.**Correction de l'exercice 23.** Soit $P \in E$:

$$\begin{aligned}
P \in F &\iff P(a) = P(b) = 0 \iff \exists Q \in \mathbb{R}[x] \quad P = (X - a)(X - b)Q \\
&\iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X] \quad P = (X - a)(X - b)Q \iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad P = (X - a)(X - b)(\alpha X^2 + \beta X + \gamma) \\
&\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad P = \alpha X^2(X - a)(X - b) + \beta X(X - a)(X - b) + \gamma(X - a)(X - b) \\
&\iff P \in \text{vect}(X^2(X - a)(X - 2), X(X - a)(X - b), (X - a)(X - b))
\end{aligned}$$

Dès lors, $F = \text{vect}(X^2(X - a)(X - 2), X(X - a)(X - b), (X - a)(X - b))$. Ainsi, F est sous-espace vectoriel de E et $\mathcal{B} = (X^2(X - a)(X - 2), X(X - a)(X - b), (X - a)(X - b))$ en est une famille génératrice. De plus, $\mathcal{B}$ est une famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts, ainsi, $\mathcal{B}$ est libre. Dès lors, $\mathcal{B}$ est une base de F , et donc $\dim(F) = |\mathcal{B}| = 3$.

Correction de l'exercice 24. • Montrons que $\mathcal{F}_1$ est libre. soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que

$$a(1, 1, 1, 1) + b(1, 2, 3, 4) + c(1, 0, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

On obtient :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b = 0 \\ a + 3b = 0 \\ a + 4b = 0 \end{cases}$$

Alors, si on fait $L_4 - L_3$, on a que $b = 0$, en remplaçant dans L_4 , on obtient que $a = 0$, puis en remplaçant dans L_1 , on obtient que $c = 0$. Ainsi, $\mathcal{F}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut donc la compléter en une base en rajoutant des vecteurs de la base canonique (tant que la famille reste libre). Prenons alors $(0, 1, 0, 0)$ et montrons que $\mathcal{B} = \mathcal{F}_1 \cup ((0, 1, 0, 0))$ est libre. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. Supposons

$$a(1, 1, 1, 1) + b(1, 2, 3, 4) + c(1, 0, 0, 0) + d(0, 1, 0, 0) = (0, 0, 0, 0)$$

alors, on obtient le système :

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ a + 2b + d = 0 \\ a + 3b = 0 \\ a + 4b = 0 \end{cases}$$

Alors, si on fait $L_4 - L_3$, on a que $b = 0$, en remplaçant dans L_4 , on obtient que $a = 0$, puis en remplaçant dans L_1 et dans L_2 , on obtient que $c = 0$ et $d = 0$. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathbb{R}^4$ et comme $\dim(\mathbb{R}^4) = 4 = |\mathcal{B}|$, $\mathcal{B}$ est une famille base de $\mathbb{R}^4$.

- $\mathcal{F}_2$ est liée, en effet, $3(1, 2, 3, 4) - 2(1, 1, 1, 1) = (1, 4, 7, 10)$. Ainsi, on ne peut compléter $\mathcal{F}_2$ en une base, car si on rajoute des vecteurs à $\mathcal{F}_2$, on aura toujours $(1, 4, 7, 10)$ qui s'écrit comme combinaison linéaire des autres vecteurs de la famille.

Correction de l'exercice 25.**Correction de l'exercice 26.** On sait que $\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R})) = n^2$. Donc toute famille de vecteurs de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n^2 + 1$ est forcément liée. En particulier $(I_n, M, M^2, \dots, M^{n^2})$ est liée.**Correction de l'exercice 27.****Correction de l'exercice 28.** Soit $P \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
P \in H &\iff P(1) = 0 \\
&\iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X] \quad P = (X - 1)Q \\
&\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad P = (X - 1)(aX^2 + bX + c) \\
&\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad P = aX^2(X - 1) + bX(X - 1) + c(X - 1) \\
&\iff P \in \text{vect}(X^2(X - 1), X(X - 1), X)
\end{aligned}$$

On a donc montré que $H = \text{vect}(X^2(X-1), X(X-1), X)$. Ainsi H est un espace vectoriel, et $\mathcal{B} = (X^2(X-1), X(X-1), X)$ en est une partie génératrice. Comme $\mathcal{B}$ est échelonnée en degré, $\mathcal{B}$ est libre. Ainsi, $\mathcal{B}$ est une base de H , on en déduit que $\dim(H) = |\mathcal{B}| = 3$ (ainsi, $\dim(H) = \dim(E) - 1$, donc H est un hyperplan de E).

Correction de l'exercice 29.

Correction de l'exercice 30. 1. • F étant l'espace engendré par une famille finie de polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$ (ici un vecteur $X-1$), on sait, d'après le cours, que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

- Tout d'abord $G \subset E$. 0_E , le polynôme nul, vérifie bien $0_E(2) = 0$. Donc $0_E \in G$. Soit $(P, Q) \in G^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors $(P + \lambda Q)(2) = P(2) + \lambda Q(2) = 0 + \lambda 0 = 0$. Donc $P + \lambda Q \in G$. Donc G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
- 2. • $(X-1)$ est une famille génératrice de E . Comme il s'agit d'un vecteur non nul, cette famille est une libre. $(X-1)$ est une base de F . Donc $\dim(F) = 1$.
- On va d'abord décrire G ; pour tout $P \in E$:

$$\begin{aligned} P \in G &\iff P(2) = 0 \\ &\iff X-2 \mid P \\ &\iff \exists Q \in \mathbb{R}_2[X] \quad P = (X-2)Q \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad P = (X-2)(aX^2 + bX + c) \\ &\iff \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \quad P = aX^2(X-2) + bX(X-2) + c(X-2) \\ &\iff P \in \text{vect}(X^2(X-2), X(X-2), X-2) \end{aligned}$$

Par équivalence, on a donc montré que $G = \text{vect}(X-2, X(X-2), X^2(X-2))$. On a donc trouvé que $\mathcal{B} = (X-2, X(X-2), X^2(X-2))$ est une partie génératrice de G . De plus, cette famille étant échelonnée en degré, elle est libre. $\mathcal{B}$ est donc une base de G et donc $\dim(G) = \text{Card}\mathcal{B} = 3$.

Correction de l'exercice 31.

Correction de l'exercice 32.

Correction de l'exercice 33. 1. Soit $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant pour tout $(i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Montrons que cette famille est libre. Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Supposons que $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(X) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Soit $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, évaluons en a_j . On a donc $\sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(a_j) = 0$.

Soit $\sum_{i=0}^n \lambda_i \delta_{i,j} = 0$. Dans cette somme tous les termes sont nulles sauf celui pour $i = j$, on a donc $\lambda_j = 0$. Et ce pour tout les $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Prouvant que la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est libre. De plus $|(L_0, L_1, \dots, L_n)| = n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$. Donc la famille $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Prouvons d'abord l'existence puis l'unicité :

- Pour $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, posons $P_i(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - a_k) \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}$. On a $P_i(a_k) = 0$. Alors

que $P_i(a_i) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k)$. Il n'y a donc aucune raison pour que $P_i(a_i) = 1$. Par contre divisons P_i par

$P_i(a_i)$ et dans ce cas on aura une chance que ça vaille 1. Pour cela il faudrait que $P_i(a_i) \neq 0$. Or c'est le cas, car pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket \setminus \{i\}$, $a_i - a_k \neq 0$ (par hypothèse). Posons donc :

$$\forall i \in \llbracket 0; n \rrbracket \quad L_i(X) = \frac{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (X - a_k)}{\prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n (a_i - a_k)} = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{X - a_k}{a_i - a_k} \in \mathbb{R}_n[X]$$

Alors on a bien pour tout $(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$.

- Soit $(L_0, L_1, \dots, L_n)$ et $(L'_1, L'_2, \dots, L'_n)$ deux familles de polynômes vérifiant pour tout $(i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2$, $L_i(a_j) = L'_i(a_j) = \delta_{i,j}$. Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, posons $P = L_i - L'_i$, alors pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(a_j) = L_i(a_j) - L'_i(a_j) = \delta_{i,j} - \delta_{i,j} = 0$. Ainsi tous les a_j sont racines de P , or $d^\circ P \leq n$, avec P qui a $n+1$ racines distinctes. Donc $P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$, prouvant que $L_i = L'_i$. Et donc l'unicité de ces polynômes.

3. Raisonnons par analyse-synthèse :

- Analyse : Soit P un polynôme tel que $P(a_i) = b_i$. Décomposons ce polynôme dans la base $(L_0, L_1, \dots, L_n)$:

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad P = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i$$

Soit $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, évaluons ce polynôme en a_j , alors $b_j = P(a_j) = \sum_{i=0}^n \lambda_i L_i(a_j) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \delta_{i,j} = \lambda_j$. Donc si

un tel polynôme existe, nécessairement $P = \sum_{i=0}^n b_i L_i$.

- Synthèse : posons $P = \sum_{i=0}^n b_i L_i$. Alors pour tout $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(a_j) = \sum_{i=0}^n b_i L_i(a_j) = \sum_{i=0}^n b_i \delta_{i,j} = b_j$.

Donc ce polynôme P convient.

Par analyse synthèse un tel polynôme existe et est unique.

Exemple : fixons $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ et $a_3 = -2$, $b_0 = b_1 = 1$ et $b_2 = b_3 = 2$. Trouver un polynôme de degré au plus 3 valant 1 en 0 et en 2 et valant 2 en 4 et -1 n'est pas a priori un problème facile. Si on pose $P = c_3 X^3 + c_2 X^2 + c_1 X + c_0$, (décomposition de P dans la base canonique), trouver les coefficients c_i pour que ça marche serait compliqué. Alors que si on pose L_0 , L_1 , L_2 et L_3 comme avant, on sait directement que $P = L_0 + L_1 + 2L_2 + 2L_3$. Et donc on peut dessiner P .

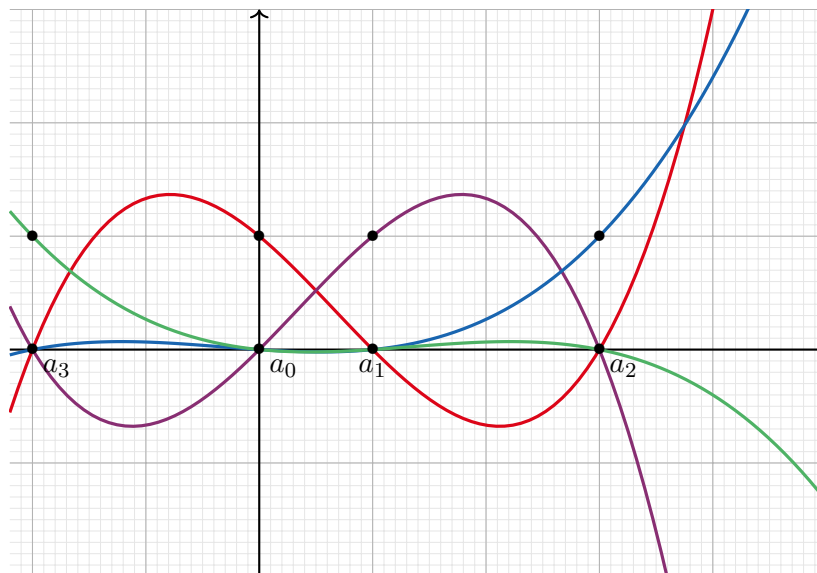


FIGURE 1 – En rouge, on a L_0 , en violet, on a L_1 , en bleu, on a L_2 et en vert, on a L_3 . Ces quatre polynômes forment une base de $\mathbb{R}_3[X]$ (espace vectoriel de dimension 4).

Correction de l'exercice 34.

Correction de l'exercice 35.

Correction de l'exercice 36.

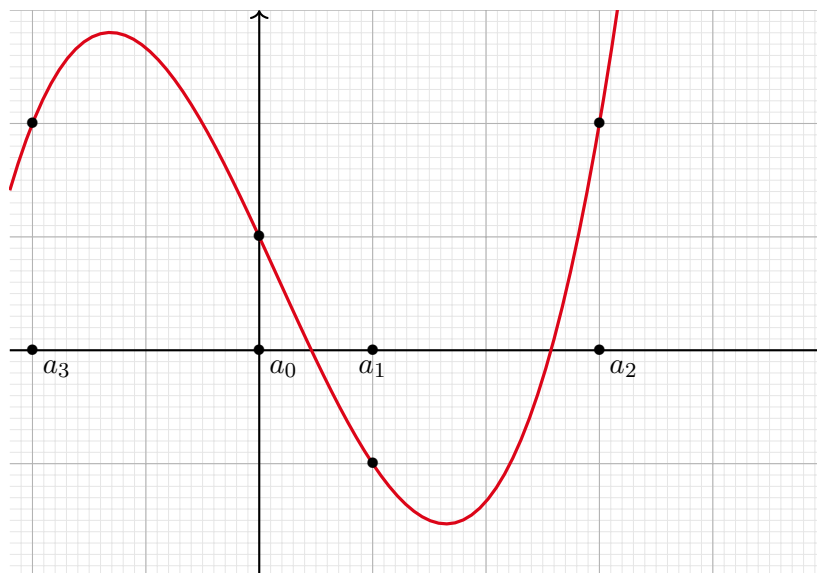


FIGURE 2 – Le polynôme passe par les points prescrits : pour trouver P il suffit de faire une combinaison linéaire des L_i dont les coefficients sont les b_i .