Chapitre 7

Applications linéaires

Prérequis :

- Ensembles et applications : image d'un ensemble, injectivité, surjectivité, bijectivité
- Systèmes linéaires
- Matrices
- Polynômes
- Espaces vectoriels
- Espaces vectoriels de dimension finie

Objectifs :

- Définir les applications linéaires (des fonctions particulières qui vont d'un espace vectoriel à un autre)
- Lien entre applications linéaires et matrice

Table des matières

Dans tout ce chapitre, sauf indication contraire, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et E et F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

1 Généralités

Définition d'une application linéaire

1. Une fonction $u\colon E \longrightarrow F$ est dite **linéaire** si $\forall (x, x', \lambda) \in E^2 \times \lambda \in \mathbb{K} \qquad u(\lambda x + x') = \lambda u(x) + u(x')$
2. On note $\mathscr{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F.
3. Si $E = F$ et $f \in \mathscr{L}(E, E)$, f est appelée **endomorphisme** de E. On note $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E, E)$.

Exemples 1.

1. Soit $f\colon x \longmapsto 3x$, f est linéaire de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. $f\colon (x, y) \longmapsto (x, x+y, x-y)$ est linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$.
3. $\Phi\colon f \mapsto \displaystyle\int_a^b f$ est linéaire de $\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,], \mathbb{R})$ sur $\mathbb{R}$
4. $\Delta\colon \begin{cases} \mathscr{C}^1([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}([\,0\,;1\,], \mathbb{R}) \\ \qquad f \qquad\longmapsto f' \end{cases}$ est linéaire.
5. $f\colon A \longmapsto A^\top$ est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
6. $f\colon (x_1, \dots, x_n) \longmapsto \sum\limits_{k=1}^n x_k$ est linéaire de $\mathbb{C}^n$ vers $\mathbb{C}$.

Remarques 1. Pour $u \in \mathscr{L}(E, F)$, on a :

- $u(0_E) = 0_F$
- Pour tout $(x, x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $u(x + x') = u(x) + u(x')$, $u(\lambda x) = \lambda u(x)$
- Pour tout $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in E^n$, et $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $u\left(\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k u(e_k)$.

Justification des remarques 1 :

- $u(0_E) = u(1 \cdot 0_E + 0_E) = 1 \cdot u(0_E) + u(0_E) = 2u(0_E)$, en retranchant $u(0_E)$ des deux côtés, on obtient $0_F = u(0_E)$.
- Soit $(x, x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $u(x + x') = u(1 \cdot x + x') = 1 \cdot u(x) + u(x') = u(x) + u(x')$ et $u(\lambda x) = u(\lambda x + 0_E) = \lambda u(x) + u(0_E) = \lambda u(x) + 0_F = \lambda u(x)$.
- Posons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: «pour tout $(e_1, e_2, \dots, e_n) \in E^n$ et pour tout $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, $u\left(\sum\limits_{k=1}^n \lambda_k e_k\right) = \sum\limits_{k=1}^n \lambda_k u(e_k)$». Pour $n = 1$, soit $e_1 \in E$ et $\lambda_1 \in \mathbb{K}$, alors $u(\lambda_1 e_1) = \lambda_1 u(e_1)$ par le point précédent, donc $\mathscr{P}(1)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $\mathscr{P}(n)$ vraie. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$,
$$u\left(\sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k e_k\right) = u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k + \lambda_{n+1} e_{n+1}\right) = u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) + \lambda_{n+1} u(e_{n+1}) \underset{\mathscr{P}(n)}{=} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(e_k) + \lambda_{n+1} e_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k u(e_k)$$
Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$ est vraie.

Proposition n° 1 : opérations sur les applications linéaires

1. Si $(f, g, \lambda) \in \mathscr{L}(E, F)^2 \times \mathbb{K}$, alors $\lambda f + g \in \mathscr{L}(E, F)$
2. Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, $g \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathscr{L}(E, G)$

Proposition n° 2 : propriétés des endomorphismes

Soient $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. $\mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$
2. $f \circ \mathrm{Id}_E = \mathrm{Id}_E \circ f = f$
3. $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}} \in \mathscr{L}(E)$ par convention, $f^0 = \mathrm{Id}_E$

Définition d'un isomorphisme et deux espaces vectoriels isomorphes

- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$ est bijective, on dit que f est un **isomorphisme de E sur F**.
- On dit que E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme de E vers F.
- Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est bijective, on dit que f est un **automorphisme** de E.

Proposition n° 3 : composition et inverse d'isomorphismes

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$ deux isomorphismes :

1. $f^{-1}\colon F \to E$ est un isomorphisme
2. $g \circ f\colon E \to G$ est un isomorphisme et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

Démonstration de la proposition n° 3 :

- Comme $f \in \mathscr{L}(E,F)$ est bijective, on sait déjà que $f^{-1}\colon F \to E$ est une bijection, montrons donc que f^{-1} est linéaire. Soit $(x,x') \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, montrons que $f^{-1}(\lambda x + x') = \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(x')$. Pour ça, calculons l'image de f de ces deux vecteurs, on a :

$$f(f^{-1}(\lambda x + x')) = \lambda x + x' \qquad \text{et} \qquad f(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(x')) \underset{f \text{ linéaire}}{=} \lambda f(f^{-1}(x)) + f(f^{-1}(x')) = \lambda x + x'$$

Ainsi, $f(f^{-1}(\lambda x + x')) = f(\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(x'))$. Or f est injective (car bijective), on en déduit $f^{-1}(\lambda x + x') = \lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(x')$. Alors, f^{-1} est linéaire et bijective, donc un isomorphisme de F vers E.

- Tout d'abord, on sait d'après la proposition 1 que $g \circ f \in \mathscr{L}(E,G)$. De plus :

$$f^{-1} \circ g^{-1} \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_F \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$$
$$(g \circ f) \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ (f \circ f^{-1}) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_G$$

Ce qui prouve que $g \circ f$ est bijective et que $(g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1}$ ■

Définition du noyau et de l'image

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. On appelle **noyau** de f : $\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}$
2. On appelle **image** de f : $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E \quad y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in E\}$

Proposition n° 4 : le noyau et l'image sont des espaces vectoriels

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathrm{Ker}(f)$ est un SEV de E et $\mathrm{Im}(f)$ est un SEV de F.

Exemple 2. Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \longmapsto (x+y, -2x-2y, t-z) \end{cases}$. Déterminer $\dim(\mathrm{Ker}(f))$ et $\dim(\mathrm{Im}(f))$.

Remarque 2. La proposition 4 fournit une nouvelle méthode pour montrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Exemples 3. $F = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 0\}$ et $G = \{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid f'' + f = 0\}$ sont des espaces vectoriels.

Solution des exemples 3 : En effet, posons $\varphi\colon P \mapsto P(0)$, alors, pour tout $(P,Q,\lambda) \in \mathbb{K}[X]^2 \times \mathbb{K}$, par définition de la somme de deux fonctions et du produit d'une fonction par un scalaire : $\varphi(\lambda P + Q) = (\lambda P + Q)(0) = \lambda P(0) + Q(0) = \lambda\varphi(P) + \varphi(Q)$. Ainsi, φ est une application linéaire de $\mathbb{K}[X]$ vers $\mathbb{K}$. De plus, $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \varphi(P) = 0\} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(0) = 0\} = F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$.

Posons maintenant $\psi\colon \begin{cases} \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \longrightarrow \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto f'' + f \end{cases}$. Tout d'abord, vérifions l'ensemble d'arrivée, si $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors $f'' \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tout comme f, ainsi $f'' + f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$. De plus, si $(f,g) \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, alors

$$\psi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)'' + (\lambda f + g) = \lambda(f'' + f) + (g'' + g) = \lambda\psi(f) + \psi(g)$$

Par conséquent, $\psi \in \mathscr{L}(\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}), \mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}))$. De plus,

$$\mathrm{Ker}(\psi) = \left\{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad \psi(f) = 0\right\} = \left\{f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R}) \quad f'' + f = 0\right\} = G$$

est donc un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Proposition n° 5 : caractérisation de l'injectivité/surjectivité des applications linéaires

Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$.

1. f est surjective ssi $\mathrm{Im}(f) = F$.
2. f est injective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Démonstration de la proposition n° 5 :

1. Supposons f surjective et montrons $\mathrm{Im}(f) = F$. Par définition de l'image, $\mathrm{Im}(f) \subset F$. Soit $y \in F$, alors comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. D'où $y \in \mathrm{Im}(f)$, donc $F \subset \mathrm{Im}(f)$. Dès lors, $\mathrm{Im}(f) = F$.
Réciproquement, supposons $\mathrm{Im}(f) = F$, et montrons f surjective. Soit $y \in F = \mathrm{Im}(f)$, donc il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, et ce pour tout $y \in F$, donc f est surjective.
2. Supposons f injective. Comme $\mathrm{Ker}(f)$ est un SEV de E, $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, alors $f(x) = 0_F$, comme $f(0_E) = 0_F$, on a $f(x) = f(0_E)$. Or, f est injective, donc $x = 0_E \in \{0_E\}$, et ce pour tout $x \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$. Par double inclusion, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Réciproquement, supposons $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Montrons f injective. Soit $(x, x') \in E^2$. Supposons $f(x) = f(x')$. Montrons $x = x'$, on a alors $f(x) - f(x') = 0_F$. En notant $\lambda = -1$, on a $f(x) + \lambda f(x') = 0_F$, soit $f(x + \lambda x') = 0_F$. Donc $x + \lambda x' \in \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Soit $x - x' \in \{0_E\}$, d'où, $x = x'$. Ainsi, f est injective. ∎

Exemple 4. La fonction $u\colon \begin{cases} \mathbb{K}_n[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P \longmapsto P' \end{cases}$, est-elle injective ? Déterminer $\mathrm{Im}(u)$, en déduire que u est surjective.

Solution de l'exemple 4 : Remarquons que si $P \in \mathbb{K}_n[X]$, alors $d^\circ P' \leqslant d^\circ P - 1 \leqslant n - 1$, ainsi $P' \in \mathbb{K}_n[X]$, ainsi, on a bien $u\colon \mathbb{K}_n[X] \to \mathbb{K}_{n-1}[X]$. De plus, u est linéaire (par linéarité de la dérivation). Comme $u(42) = 0$, donc $42 \in \mathrm{Ker}(u)$ et 42 est non nul, donc u n'est pas injective. Soit $Q = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, posons $P = \sum_{k=0}^{d} \frac{a_k}{k+1} X^{k+1} \in \mathbb{K}[X]$, alors $u(P) = P' = Q$. Donc u est surjective.

2 Applications linéaires en dimension finie

2.1 Bases et applications linéaires

On suppose maintenant que E est de dimension finie n et on fixe $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E.

Définition de l'image d'une famille finie de vecteurs

On appelle **image** de $\mathscr{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ par $u \in \mathscr{L}(E, F)$ la famille de vecteurs de F : $u(\mathscr{F}) = (u(f_1), \ldots, u(f_p))$.

Théorème n° 1 : un isomorphisme transforme une base en base et préserve les dimensions

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{B}$ une base de E. Alors, u est un isomorphisme ssi $u(\mathscr{B})$ est une base de F.
Dans ce cas, F est de dimension finie et $\dim(F) = \dim(E)$.

Démonstration du théorème n° 1 : Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$. Supposons que u soit un isomorphisme. Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Supposons que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(e_k) = 0_E$, alors par linéarité de u, on obtient, $u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = 0_E$. Ainsi, $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k \in \mathrm{Ker}(u)$. Or, u est injective, donc, $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, ce qui montre que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k = 0_E$. Or, $\mathscr{B}$ est libre, donc pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$, $\lambda_k = 0$. On a ainsi, montré que $u(\mathscr{B})$ est libre. Soit $y \in F$, comme u est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Or, $x \in E$ et $\mathscr{B}$ engendre E, donc il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, comme u est linéaire, $y = u(x) = u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(e_k)$. Ceci montre que y est une combinaison linéaire des vecteurs de $u(\mathscr{B})$. Ainsi, $u(\mathscr{B})$ est une famille génératrice de F. Ainsi, $u(\mathscr{B})$ est une base de F, F admet une base donc une famille génératrice donc est de dimension finie. De plus,

$$\dim(F) = \mathrm{Card}\, u(\mathscr{B}) = \mathrm{Card}(u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n)) = n = \mathrm{Card}(e_1, e_2, \ldots, e_n) = \dim(E)$$

Supposons que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ soit une base de E telle que $u(\mathscr{B})$ soit une base de F. Et montrons que u est un isomorphisme. Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$, comme $\mathscr{B}$ engendre E, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k$, et $u(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(e_k) = 0_E$. Or $u(\mathscr{B}) = (u(e_1), u(e_2), \ldots, u(e_n))$ est libre (car c'est une base), donc pour tout $k \in [\![1\,; n]\!]$, $\lambda_k = 0$. Ainsi, $x = 0_E$, donc $\mathrm{Ker}(u) \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque étant vraie, car u est linéaire. Par conséquent, $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, ainsi u est injective. Soit $y \in F$, comme $u(\mathscr{B})$ engendre F, il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k u(e_k)$, par linéarité, $y = u\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k e_k\right)$, ainsi, u est surjective. u est injective surjective et linéaire, donc u est un isomorphisme. ∎

Remarque 3. Ce résultat sert à déterminer la dimension d'un espace vectoriel.

Théorème n° 2 : une fonction linéaire est entièrement caractérisée par l'image d'une base

Si $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E et $\mathscr{F} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une famille de F, alors il existe un unique $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $u(e_i) = f_i$.

Démonstration du théorème n° 2 : Par analyse-synthèse.

- Analyse : Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $u(e_i) = f_i$. Soit $x \in E$, le but est de calculer $u(x)$ pour connaître u. Comme $x \in E$, alors il existe $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ Alors $u(x) = u\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k$.

  Ainsi, on a prouvé que si u existe, alors u: $\begin{cases} E & \longrightarrow F \\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k & \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_k f_k \end{cases}$.
- Synthèse : posons u: $\begin{cases} E & \longrightarrow F \\ x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k & \longmapsto \sum_{k=1}^{n} x_k f_k \end{cases}$, vérifions que u convienne *i.e.* que u est linéaire et que, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $u(e_i) = f_i$. Soit $(x, y) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors il existe un unique $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ et un unique $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$. Posons $z = \lambda x + y = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k e_k + \sum_{k=1}^{n} y_k e_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + y_k) e_k$. Ainsi,

$$u(\lambda x + y) = u(z) = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k + y_k) f_k = \sum_{k=1}^{n} (\lambda x_k f_k) + (y_k f_k) = \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k f_k + \sum_{k=1}^{n} y_k f_k = \lambda u(x) + u(y)$$

  Donc $u \in \mathscr{L}(E, F)$. Soit $j \in [\![1 ; n]\!]$, comme $e_j = \sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k} e_k$, $u(e_j) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k} f_k = f_j$. Ainsi, pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, $u(e_j) = f_j$. Donc u répond bien au problème.

Ainsi, u existe bien par la synthèse et est unique par l'analyse. ■

Remarques 4.
- Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors E et F sont isomorphes. En particulier, E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.
- Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{vect}(f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_n))$ donc $\operatorname{Im}(f)$ est un SEV de F de dimension finie.

Justification des remarques 4 :
- Supposons $\dim(E) = \dim(F) = n$, soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base de F. En particulier, $\mathscr{B}$ est une base de E et $\mathscr{C}$ est une famille de F. D'après le théorème 2, il existe $u \in \mathscr{L}(E, F)$ tel que pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $u(e_i) = f_i$, dit autrement, $u(\mathscr{B}) = \mathscr{C}$. Comme $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des bases, on en déduit que u transforme une base de E en une base de F, d'après le théorème 1, u est donc un isomorphisme, ainsi il existe un isomorphisme de E vers F, on peut donc en conclure que E et F sont isomorphes. En particulier, on peut appliquer ce résultat à $F = \mathbb{K}^n$, car $\dim(\mathbb{K}^n) = n$, ainsi, E est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ lorsque $n = \dim(E)$.
- En utilisant la définition de l'image et en décomposant $x \in E$ dans la base $\mathscr{B}$, on obtient en utilisant le fait que f soit linéaire :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(f) &= \{f(x) \mid x \in E\} \\ &= \left\{ f\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \right\} \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{n} x_k f(e_k) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in E \right\} \\ &= \operatorname{vect}(f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)) \end{aligned}$$

2.2 Rang d'une application linéaire et théorème du rang

Définition du rang d'une application linéaire

On appelle **rang** de $u \in \mathscr{L}(E, F)$ la dimension de son image, on note $\operatorname{rg}(u) = \dim(\operatorname{Im}(u))$.

Proposition n° 6 : lien entre rang d'une application linéaire et rang de l'image d'une base

Soient $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E alors $\operatorname{rg}(u) = \operatorname{rg}(u(\mathscr{B})) = \operatorname{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$.

Démonstration de la proposition n° 6 : En utilisant la remarque 4, il vient : $\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{vect}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \mathrm{rg}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \mathrm{rg}(u(\mathscr{B}))$

■

Exemple 5. Soit $u\colon \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, \dots, x_n) & \longmapsto (x_1, x_1) \end{cases}$. Que vaut $\mathrm{rg}(u)$?

Solution des exemples 5 : On sait que $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1), u(e_2), \dots, u(e_n))$ où $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Or $u(e_1) = (1,1)$, et pour tout $k \in [\![2 ; n]\!]$, $u(e_i) = (0,0)$. Donc $\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}((1,1), (0,0), \dots, (0,0)) = \mathrm{rg}((1,1))$. Or $((1,1))$ est une famille libre. Ainsi, $((1,1))$ est libre, donc $\mathrm{rg}(u) = 1$.

Théorème n° 3 du rang *(admis)*

Soient E de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$

Démonstration du théorème n° 3 : Notons $k = \dim \mathrm{Ker}(f)$. Considérons, $\mathscr{B}_K = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ une base du noyau de f. Comme c'est une famille libre de E, on peut la compléter en une base de E. En notant $n = \dim(E)$, il existe $(e_{k+1}, \dots, e_n) \in E^{n-k}$ tel que $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ soit une base de E. Notons $S = \mathrm{vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$, S est un sous-espace vectoriel de E. Montrons que $\tilde{f}\colon \begin{cases} S \longrightarrow \mathrm{Im}(f) \\ x \longmapsto f(x) \end{cases}$ est un isomorphisme :

- Pour tout $x \in S$, $\tilde{f}(x) = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, ainsi $\tilde{f}\colon S \to \mathrm{Im}(f)$ est bien définie.
- Par linéarité de f, on a :
$$\forall (x, x', \lambda) \in S^2 \times \mathbb{K} \qquad \tilde{f}(\lambda x + x') = f(\lambda x + x') = \lambda f(x) + f(x') = \lambda \tilde{f}(x) + \tilde{f}(x')$$
Ainsi, $\tilde{f} \in \mathscr{L}(S, \mathrm{Im}(f))$.
- Soit $x \in \mathrm{Ker}(\tilde{f})$, donc $x \in S$ et $\tilde{f}(x) = f(x) = 0_E$. Comme $x \in S$, il existe $(\lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n-k}$ tel que $x = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i$. De plus, $f(x) = 0_E$ donc $x \in \mathrm{Ker}(f)$, ainsi, il existe $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que $x = \sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i$. Ainsi, $\sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i$. En rajoutant des zéros, on obtient :
$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i e_i + \sum_{i=k+1}^{n} 0 e_i = \sum_{i=1}^{k} 0 e_i + \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i$$
Par unicité, de l'écriture d'un vecteur dans une famille libre, on en déduit que pour tout $i \in [\![1 ; k]\!]$, $\mu_i = 0$ et pour tout $i \in [\![k+1 ; n]\!]$, $\lambda_i = 0$. Ainsi, $x = \sum_{i=1}^{k} 0 e_i = 0_E$, ainsi $\mathrm{Ker}(\tilde{f}) \subset \{0_E\}$, l'inclusion réciproque étant toujours vraie, ainsi $\tilde{f}$ est injective.
- Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, par définition de l'image de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in E$, alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$. Alors, par linéarité de f et du fait que $e_i \in \mathrm{Ker}(f)$ pour $i \in [\![1 ; k]\!]$:
$$y = f(x) = f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(e_i) + \sum_{k+1}^{n} \lambda_i f(e_i)\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(e_i) + f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i\right) = f\left(\sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i\right)$$
Remarquons que $s = \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i e_i \in S$, ainsi $y = \tilde{f}(s)$, ce qui montre que y admet un antécédent par $\tilde{f}$, $\tilde{f}\colon S \to \mathrm{Im}(f)$ est surjective.

Ainsi, $\tilde{f}$ est bien un isomorphisme. On peut donc en conclure que
$$\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(S) = n - k = \dim(E) - \dim(\mathrm{Ker}(f))$$
Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(E)$. ■

Exemple 6. En reprenant la fonction u de l'exemple 5, quelle est la dimension du noyau de $\mathrm{Ker}(u)$?

Théorème n° 4 : caractérisation de la bijectivité en même dimension finie

Soient E et F deux EV de dimension finie avec $\dim(E) = \dim(F)$ et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Sont équivalents :

1. f est injective de E dans F.
2. f est surjective de E dans F.
3. f est bijective de E dans F.

Démonstration du théorème n° 4 :

- Si f est bijective alors elle est injective et surjective. D'où $3 \Longrightarrow 1$ et $3 \Longrightarrow 2$.
- Supposons f injective, alors d'après le théorème du rang, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$. Or comme f est injective $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$. Donc $\mathrm{rg}(f) = \dim(E) = \dim(F)$. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) \subset \dim(F)$ et ces deux espaces vectoriels ont même dimension, donc $\mathrm{Im}(f) = F$. Ainsi, f est surjective. Donc f est bijective. D'où $1 \Longrightarrow 2$ et $1 \Longrightarrow 3$
- Si f est surjective, alors $\mathrm{Im}(f) = F$. D'après le théorème du rang $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f))$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(E) - \dim(F) = 0$. Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$, ainsi f est injective. D'où $2 \Longrightarrow 1$ et $2 \Longrightarrow 3$. ■

Exemples 7.

- Montrer que $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto (y+z, z+x, x+y) \end{cases}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^3$.
- Montrer que $\Phi\colon P \mapsto P'$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ surjectif mais non injectif.
- Montrer que $\Psi\colon f \mapsto (x \mapsto \displaystyle\int_0^x f)$ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ injectif mais non surjectif.

3 Matrice d'une application linéaire

On fixe E et F, G trois $\mathbb{K}$-EV de dimension finie de dimensions respectives n, p et q, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ deux bases de E, $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ une base de F, $\mathscr{D}$ est une base de G.

Définition de la matrice d'une application linéaire dans des bases données

On appelle **matrice** de $u \in \mathscr{L}(E,F)$ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ la matrice de $u(\mathscr{B})$ dans la base $\mathscr{C}$ notée :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} u(e_1) & \cdots & u(e_j) & \cdots & u(e_n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{p,1} & \cdots & a_{p,j} & \cdots & a_{p,n} \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_p \end{array} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \qquad \text{où} \qquad u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$$

$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$ a $\dim(E) = n$ colonnes et $\dim(F) = p$ lignes. Si $E = F$ et $\mathscr{B} = \mathscr{C}$, on pose $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(u)$.

Exemples 8.

- Écrire la matrice de $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto P' + XP'' \end{cases}$ dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Soit $g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X], \mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathscr{C}$ celle de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Que valent $g(X)$, $g(X^2)$ et $g(2X - 3X^2)$?

Théorème n° 5 : calcul de la matrice de $u(x)$ en fonction de la matrice de u et celle de x

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $x \in E$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$.

Démonstration du théorème n° 5 : Rappelons que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$. Or, $x \in E$, il existe un unique n-uplet $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ donc $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u(x))$.

$$y = u(x) = u\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{i=1}^{n} x_k u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \left(\sum_{i=1}^{p} a_{i,k} f_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{p} x_k a_{i,k} f_i = \sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k\right) f_i$$

On obtient $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y) = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} a_{1,k} x_k \\ \sum_{k=1}^{n} a_{2,k} x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} a_{p,k} x_k \end{pmatrix} = AX$ (en effet, on reconnaît, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, que la i-ième de Y est égal au coefficient à la i-ième ligne du produit $A \times X$). ■

Exemple 9. En reprenant l'exemple 8, calculer $Y = A\tilde{X}$ où $\tilde{X} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, $P \in \mathbb{R}_3[X]$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{C}$ celle de $\mathbb{R}_2[X]$.

Proposition n° 7 : matrice d'une combinaison linéaire d'applications linéaires

Soient $(u,v) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + v) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v)$

Démonstration de la proposition n° 7 : Posons $\Phi \colon \begin{cases} \mathscr{L}(E,F) \longrightarrow \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ \quad u \qquad \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \end{cases}$

- Démontrons que Φ est linéaire. Soit $(u,v) \in \mathscr{L}(E,F)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, rappelons que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$. Notons $A = \Phi(u)$, $B = \Phi(v)$ et $C = \Phi(\lambda u + v)$. Montrons que $C = \lambda A + B$.
  - $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Ainsi, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $u(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$.
  - $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(v) = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Ainsi, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $v(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{p} b_{i,j} f_i$.
  - $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u + v) = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Ainsi, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $(\lambda u + v)(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{p} c_{i,j} f_i$.

  Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$, calculons $(\lambda u + v)(e_j)$ d'une autre façon :
  $$(\lambda u + v)(e_j) = \lambda u(e_j) + v(e_j) = \lambda \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i + \sum_{i=1}^{p} b_{i,j} f_i = \sum_{i=1}^{p} (\lambda a_{i,j} + b_{i,j}) f_i$$
  Par unicité de la décomposition de $(\lambda u+v)(e_j)$, dans la base $\mathscr{C}$, on en déduit que, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, $c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + b_{i,j}$. Et ce pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$. Dès lors, $C = \lambda A + B$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\lambda u+v) = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$, ainsi, $\Phi(\lambda u+v) = \lambda \Phi(u) + \Phi(v)$.
- Montrons que Φ est injective, soit $u \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = 0_{p,n}$, ainsi chaque colonne de A est nulle, donc $u(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i = \sum\limits_{i=1}^{p} 0 f_i = 0_F$. Donc u et $0_{\mathscr{L}(E,F)}$ sont deux applications linéaires qui coïncident sur une base de E, d'après le théorème 2, $u = 0_{\mathscr{L}(E,F)}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset \{0_{\mathscr{L}(E,F)}\}$. Comme $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un espace vectoriel, l'inclusion réciproque est toujours vraie, ainsi Φ est injective.
- Soit $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Notons $g_j = \sum\limits_{i=1}^{p} m_{i,j} f_i$. D'après le théorème 2, il existe $u \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $u(e_j) = g_j$. Ainsi, $u(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{p} m_{i,j} f_i$. Dès lors, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = M$. Donc $M = \Phi(u)$, et ce pour tout $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. D'où Φ est surjective.

Ainsi, Φ est un isomorphisme, comme $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, on en déduit, d'après le théorème 1, que $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et que $\dim(\mathscr{L}(E,F)) = \dim(\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})) = pn = \dim(F) \times \dim(E)$. ■

Théorème n° 6 : matrice d'une composée d'applications linéaires

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$

$$\begin{tikzcd} G & F \arrow[l, "v"'] & E \arrow[l, "u"'] \arrow[ll, bend right, "v \circ u"'] \\ \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} & \rotatebox{90}{$\in$} \\ v(u(x)) & u(x) & x \\ \mathscr{D} & \mathscr{C} & \mathscr{B} \end{tikzcd}$$

Démonstration du théorème n° 6 : Rappelons que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \dots, f_p)$ et $\mathscr{D} = (g_1, g_2, \dots, g_q)$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Le but est de montrer que $C = AB$

- $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v) = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. Ainsi, pour tout $k \in [\![1\,;p]\!]$, $v(f_k) = \sum\limits_{i=1}^{q} a_{i,k} g_i$.
- $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Ainsi, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $u(e_j) = \sum\limits_{k=1}^{p} b_{k,j} f_k$.
- $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u) = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant q \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$. Ainsi, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $(v \circ u)(e_j) = \sum\limits_{i=1}^{q} c_{i,j} g_i$.

Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$, calculons $(v \circ u)(e_j)$ d'une autre façon :
$$\begin{aligned} (v \circ u)(e_j) &= v(u(e_j)) = v\left(\sum_{k=1}^{p} b_{k,j} f_k\right) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} v(f_k) = \sum_{k=1}^{p} b_{k,j} \left(\sum_{i=1}^{q} a_{i,k} g_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{q} (a_{i,k} b_{k,j} g_i) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{k=1}^{p} (a_{i,k} b_{k,j} g_i) = \sum_{i=1}^{q} \left(\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}\right) g_i \end{aligned}$$

Par unicité de la décomposition de $(v \circ u)(e_j)$ dans la base $\mathscr{D}$, on en déduit que

$$\forall i \in [\![1\,;q]\!] \qquad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Ceci étant valable pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, on en déduit par la formule du produit matriciel que $C = AB$. ■

Remarques 5.
- Le produit matriciel a, en fait, été défini ainsi pour avoir cette propriété.
- Le produit matriciel comme la composée ne sont pas commutatifs donc l'ordre est important.
- Si on notait $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}(f)$ au lieu de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$, la formule deviendrait : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{B}}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{D}\leftarrow\mathscr{C}}(v)\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}(u)$, ce qui serait plus «logique», mais cette notation n'est pas usuelle et donc non conseillée.

Proposition n° 8 : matrice d'un automorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors u est bijective ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est inversible. Dans ce cas, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1})$.

Démonstration de la proposition n° 8 : Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
- Supposons que u soit bijective. Alors $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \mathrm{Id}_E$. Donc
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u \circ u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1} \circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$$
En utilisant le théorème 6, on obtient
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1})\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$$
$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$ est une matrice carrée de taille n. Soit $j \in [\![1\,;n]\!]$. Dans la j-ième colonne de cette matrice, on met les coordonnées de $\mathrm{Id}_E(e_j) = e_j$ dans la base $\mathscr{B}$. Or, $e_j = 0e_1 + \ldots + 0e_{j-1} + 1e_j + 0e_{j+1} + \ldots + e_n$. Ainsi, la j-ième collen de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$ ne contient que des zéros, sauf à 1 à la j-ième ligne. Et ce pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = I_n$. On en déduit que $A\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1})A = I_n$. Ceci montre que A est inversible et que $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1})$.
- Supposons A inversible, alors $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. D'après la démonstration de la proposition 7, $\Psi\colon \begin{cases} \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \\ v \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) \end{cases}$ est un isomorphisme. Comme $A^{-1} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, par surjectivité de Ψ, A^{-1} admet un antécédent, il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $A^{-1} = \Phi(v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$. Donc $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$. En utilisant la proposition 6, on obtient $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u\circ v) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v\circ u) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$, donc $\Psi(u\circ v) = \Psi(v\circ u) = \Psi(\mathrm{Id}_E)$, par injectivité de Ψ, $u\circ v = v\circ u = \mathrm{Id}_E$, ce qui démontre que u est bijective. ■

Définition du noyau, image et rang d'une matrice

On appelle **noyau**, **image** et **rang** de la matrice $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$:
- $\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$ (SEV de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$)
- $\mathrm{Im}(A) = \{Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \quad Y = AX\} = \{AX \mid X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$ (SEV de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$)
- $\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$

Proposition n° 9 : lien entre image (resp. noyau) de f et image (resp. noyau) de A

Soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$, $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $x \in E$ et $y \in F$.
1. $x \in \mathrm{Ker}(f) \iff X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in \mathrm{Ker}(A)$
2. $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathrm{Ker}(A))$
3. $y \in \mathrm{Im}(f) \iff Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y) \in \mathrm{Im}(A)$
4. $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$
5. $n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$ où n est le **nombre de colonnes** de A (théorème du rang version matricielle)

Démonstration de la proposition n° 9 : Montrons que $\varphi\colon \begin{cases} E \longrightarrow \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ x \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \end{cases}$ est un isomorphisme. Soit $(x,x,\lambda) \in E^2 \times \mathbb{K}$, alors il existe un unique $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et un unique $\left(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n\right) \in \mathbb{K}^n$ tel que $x' = \sum_{i=1}^{n} x'_i e_i$. De sorte que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x') = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. De plus, $\lambda x + x' = \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i e_i + \sum_{i=1}^{n} x'_i e_i = \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + x'_i) e_i$ de sorte que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\lambda x + x') = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + x'_n \\ \vdots \\ \lambda x_n + x'_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ xn \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = \lambda \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) + \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x')$$

En d'autres termes, $\varphi(\lambda x + x') = \lambda\varphi(x) + \varphi(x')$. Ainsi, φ est linéaire. Soit $x \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, alors les coordonnées de x dans $\mathscr{B}$ sont toutes nulles, donc $x = \sum_{i=1}^{n} 0_i = 0_E$. Donc, $\mathrm{Ker}(\varphi) \subset \{0_E\}$, comme l'inclusion réciproque est toujours vraie, on en déduit que φ est injective. Comme $\dim(E) = n = \dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))$, d'après le théorème 4, on en déduit que φ est un isomorphisme. De même, $\tilde{\varphi}\colon \begin{cases} F \longrightarrow \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \\ y \longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y) \end{cases}$ est isomorphisme et que si $y = f(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y)$, alors $Y = AX$ (théorème 5).

- $x \in \mathrm{Ker}(f)$ ssi $f(x) = 0_F$ ssi $AX = 0_{p,1}$ ssi $X \in \mathrm{Ker}(A)$.
  Ceci prouve que $\mathrm{Ker}(A) = \varphi(\mathrm{Ker}(f))$ avec φ est isomorphisme, ainsi $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(f))$.
- $y \in \mathrm{Im}(f)$ ssi il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ ssi il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = AX$ ssi $Y \in \mathrm{Im}(A)$.
  Ainsi $\tilde{\varphi}(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{Im}(A)$ avec $\tilde{\varphi}$ un isomorphisme, ainsi $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Im}(A))$. Soit $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$.
- En appliquant le théorème du rang à $f\colon E \to F$, $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f)$. Par ce qui précède, $n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$.
  ■

Péril imminent : théorème du rang (version matricielle)

Pour toute matrice A, $\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$ est égal au nombre de **colonnes** de A.

Remarque 6. Si on connaît $\mathrm{Ker}A/\mathrm{Im}A$, alors en passant des coordonnées aux vecteurs, on connaît $\mathrm{Ker}f/\mathrm{Im}f$.

Exemple 10. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_1[X])$ tel que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ avec $\mathscr{B} = (1, X)$. Calculer $\mathrm{Ker}A$, $\mathrm{Ker}f$, $\mathrm{Im}A$ et $\mathrm{Im}f$.

Attention soyez homogène !

Si $f \in \mathscr{L}(E, F)$, une base de $\mathrm{Ker}(f)/\mathrm{Im}(f)$ contient des vecteurs de E/F et non des matrices colonnes.

Proposition n° 10 : propriétés du rang et de l'image d'une matrice

Soient $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $C_1, \ldots, C_n$ les n colonnes de A, $L_1, \ldots, L_p$ les p lignes de A.

1. $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$
2. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$
3. Si $B \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est inversible alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(A)$
4. Si $A \in \mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est inversible alors $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$
5. $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A)$ *(admis)*
6. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(L_1, \ldots, L_p)$
7. $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$ pour $\mathscr{F} = (f_1, f_2, \ldots, f_q)$ une famille de vecteurs de E.

Démonstration de la proposition n° 10 :

1. Par définition, $\mathrm{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$ En décomposant X dans $(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on obtient $\mathrm{Im}(A) = \left\{A \sum_{i=1}^{n} x_i E_i \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n\right\}$, en développant par A, on reconnaît un espace vectoriel engendré : $\mathrm{Im}(A) = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i A E_i \mid (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n\right\} = \mathrm{vect}(AE_1, AE_2, \ldots, AE_n)$. Or, un calcul matriciel, montre que pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $AE_j = C_j$, ainsi, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}\,(C_1, C_2, \ldots, C_n)$.
2. En passant à la dimension, le résultat précédent, on obtient $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(C_1, C_2, \ldots, C_n)$
3. Supposons B inversible. Soit $Y \in \mathrm{Im}(AB)$, alors il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = ABX$, en posant $\tilde{X} = BX \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ on obtient $Y = A\tilde{X} \in \mathrm{Im}(A)$, ainsi, $\mathrm{Im}(AB) \subset \mathrm{Im}(A)$. Soit $Y \in \mathrm{Im}(A)$, il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = AX$, alors $Y = ABB^{-1}X$, en posant $\tilde{X} = B^{-1}X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $Y = AB\tilde{X} \in \mathrm{Im}(AB)$, donc $\mathrm{Im}(A) \subset \mathrm{Im}(AB)$, par double inclusion, $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(AB)$, donc $\dim(\mathrm{Im}(A)) = \dim(\mathrm{Im}(AB))$, soit $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(AB)$.
4. Soit $Y \in \mathrm{Im}(AB)$, alors il existe $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $Y = ABX$, ainsi, $A^{-1}Y = BX \in \mathrm{Im}(B)$. On pose $\phi \begin{cases} \mathrm{Im}(AB) \longrightarrow \mathrm{Im}(B) \\ Y \longmapsto A^{-1}Y \end{cases}$, par ce qui précède ϕ est bien définie. Pour tout $(Y, Y', \lambda) \in \mathrm{Im}(AB)^2 \times \mathbb{K}$, par distributivité,
$$\phi(\lambda Y + Y') = A^{-1}(\lambda Y + Y') = \lambda A^{-1}Y + A^{-1}Y = \lambda\phi(Y) + \phi(Y')$$
Ainsi, ϕ est linéaire. Soit $Y \in \mathrm{Ker}(\phi)$, donc $A^{-1}Y = 0_{n,1}$, en multipliant par A, on obtient $Y = A0_{n,1} = 0_{n,1}$, ainsi, $\mathrm{Ker}(\phi) \subset \{0_{n,1}\}$, l'inclusion réciproque étant toujours vérifiée, ϕ est injective. Soit $Z \in \mathrm{Im}(B)$, alors il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $Z = BX$ et donc $Z = A^{-1}ABX$, on pose $\tilde{X} = ABX \in \mathrm{Im}(AB)$, on obtient que $Z = A^{-1}\tilde{X} = \phi(\tilde{X})$, ainsi, ϕ est surjective. On en conclut que ϕ est un isomorphisme, ainsi $\dim(\mathrm{Im}(AB)) = \dim(\mathrm{Im}(B))$, donc $\mathrm{rg}(AB) = \mathrm{rg}(B)$.
5. Voir exercice de TD.

6. D'après le point précédent, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\top)$, or d'après le point 2, le rang de $A^\top$ est égal au rang des colonnes de $A^\top$, or les colonnes de $A^\top$ sont les lignes de A, on obtient donc que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(L_1, \dots, L_p)$.
7. Notons $\mathscr{F} = (e_1, e_2, \dots, e_r)$ et pour tout $i \in [\![1 ; r]\!]$, $C_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e_i)$ Posons $F = \mathrm{vect}(\mathscr{F})$ de sorte que $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \dim(F)$, et $G = \mathrm{vect}(C_1, C_2, \dots, C_n)$ de sorte que $\mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})) = \dim(G)$. Posons $\varphi\colon x \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, alors φ réalise un isomorphisme de F vers G. Ce qui prouve que $\dim(F) = \dim(G)$, ainsi $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F}))$

Remarque 7. Le rang d'une matrice est invariant par opérations sur les lignes et colonnes. C'est pourquoi on peut calculer le rang d'une matrice en l'échelonnant.

Justification de la remarque 7 : Si $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Notons $(E_{i,j})$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(\tilde{E}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ la base canonique de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Posons, pour $i \neq j$, $\lambda \neq 0$, alors certaines matrices inversibles permettent de faire les opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes en effectuant un produit à droite ou à gauche :

- Faire l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$ sur A correspond à faire le produit $AP_{i,j}$ où $P_{i,j} = I_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
- $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_i$ correspond à $AT_{i,j}(\lambda)$ où $T_{i,j}(\lambda) = I_n + \lambda E_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
- $C_i \leftarrow \lambda C_i$ correspond à $AD_i(\lambda)$ où $D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{i,i} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
- $L_i \leftrightarrow L_j$ correspond à $P_{i,j}A$ où $\tilde{P}_{i,j} = I_p - \tilde{E}_{i,i} - \tilde{E}_{j,j} + \tilde{E}_{i,j} + \tilde{E}_{j,i} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$
- $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ correspond à $\tilde{T}_{i,j}(\lambda)A$ où $\tilde{T}_{i,j}(\lambda) = I_p + \lambda\tilde{E}_{i,j} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$
- $L_i \leftarrow \lambda L_i$ correspond à $\tilde{D}_i(\lambda)A$ où $\tilde{D}_i(\lambda) = I_p + (\lambda - 1)\tilde{E}_{i,i} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$

Ainsi, toutes ces opérations, reviennent à multiplier à droite ou à gauche A par une matrice inversible et donc la nouvelle matrice obtenue aura le même rang que A par la proposition 10.

Exemples 11. Calculer le rang des matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Solution de l'exemple 11 :

- $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right) \underset{C_2=C_3+C_1}{=} \mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right) = 2$. En effet, les deux vecteurs sont linéairement indépendants (deux vecteurs non colinéaires).
- $\mathrm{rg}(B) \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & -8 & -5 \end{pmatrix} \underset{C_2\leftrightarrow C_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -2 \\ 0 & -8 & -5 & -5 \end{pmatrix}$
$\underset{C_2\leftarrow -C_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 8 & -5 & -5 \end{pmatrix} \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+3L_2\\ L_3\leftarrow L_3-8L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -10 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 27 & 11 \end{pmatrix} \underset{\substack{C_3\leftarrow C_3+10C_1+4C_2\\ C_4\leftarrow C_4+5C_1+2C_2}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 27 & 11 \end{pmatrix}$
$\underset{\substack{C_3\leftarrow \frac{1}{27}C_3\\ C_4\leftarrow \frac{1}{11}C_4}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{C_4\leftarrow C_4-C_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$

Comment déterminer sans calcul le rang, l'image et le noyau d'une matrice A ?

1. Trouver $\mathscr{F}$, une famille de colonnes de A, telle que tout autre colonne de A est combinaison linéaire de $\mathscr{F}$.
2. Démontrer/affirmer que $\mathscr{F}$ est libre, ainsi, $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{Card}\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}$ est une base de $\mathrm{Im}(A)$.
3. Si C_j est une colonne de A qui n'est pas dans $\mathscr{F}$, alors $C_j \in \mathrm{vect}(\mathscr{F})$, ainsi le vecteur colonne des coefficients de liaison est un vecteur du noyau. Grâce au théorème du rang, on obtient assez de vecteurs.

Exemples 12. Déterminer, sans calcul, le rang, l'image et le noyau des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 11 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Proposition n° 11 : caractérisation des matrices inversibles

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Sont équivalents :

1. A est inversible
2. $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$
3. $\mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
4. $\mathrm{rg}(A) = n$
5. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad BA = I_n$ (et alors $B = A^{-1}$)
6. $\exists B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad AB = I_n$ (et alors $B = A^{-1}$)

Démonstration de la proposition n° 11 :

- Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = A$. Comme f est un endomorphisme en dimension finie, on sait que f est bijective ssi f injective ssi f surjective. Ainsi, f est bijective ssi $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ ssi $\mathrm{Im}(f) = E$ ssi $\mathrm{rg}(f) = E$. Or, f est bijective ssi A inversible, $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$, $\mathrm{rg}(f) = n$ ssi $\mathrm{rg}(A) = n$ $\mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ssi $\mathrm{Im}(f) = E$. En rassemblant toutes ces équivalences, on obtient que A est inversible ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$ ssi $\mathrm{rg}(A) = n$ ssi $\mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Ainsi, 1. $\iff$ 2. $\iff$ 3. $\iff$ 4..
- Si A est inversible, alors, par définition, $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$, donc 1. $\implies$ 5 et 1. $\implies$ 6.
- Supposons qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $BA = I_n$, soit $X \in \mathrm{Ker}(A)$, alors $AX = 0_{n,1}$, en multipliant par B à gauche, on obtient $BAX = B0_{n,1}$, donc $X = 0_{n,1}$, ainsi, $\mathrm{Ker}(A) \subset \{0_{n,1}\}$, l'inclusion réciproque étant toujours vérifier, on obtient que $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$, ainsi comme 2. $\implies$ 1., on en déduit que A est inversible, ainsi, en multipliant par A^{-1} à droite, on obtient $BAA^{-1} = A^{-1}$ soit $B = A^{-1}$. Ainsi, 5. $\implies$ 1.
- Supposons maintenant qu'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$. Soit $Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors $Y = I_nY = ABY$, en posant $X = BY \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on obtient $Y = AX$ donc $Y \in \mathrm{Im}(A)$, donc $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \subset \mathrm{Im}(A)$, l'inclusion réciproque étant vraie, on obtient que $\mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, comme 3. $\implies$ 1, on en déduit que A est inversible, en multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient $A^{-1}AB = A^{-1}$ donc $B = A^{-1}$, ainsi 6. $\implies$ 1..

Exemple 13. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

4 Changement de bases

La matrice d'une application linéaire dépend *a priori* des bases choisies. Que se passe-t-il si on change de base ?

Définition de la matrice de passage

On appelle **matrice de passage** de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$. On note cette matrice $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$.

Exemple 14. Soient $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ et $\mathscr{B}' = (5, 2X-3, 5X^2-2)$ deux bases de $\mathbb{R}_2[X]$. Donner $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Remarque 8. Notons que $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$

Justification de la remarque 8 : En effet, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E(e'_1), \mathrm{Id}_E(e'_2), \dots, \mathrm{Id}_E(e'_n)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(e'_1, e'_2, \dots, e'_n) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$.

Proposition n° 12 : inversibilité et inverse la matrice de passage

Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases de E, alors $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est inversible et $(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'})^{-1} = P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Démonstration de la proposition n° 12 : En utilisant la remarque8, il vient :

$$P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \times P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{Id}_E) \underset{\text{théorème } 6}{=} \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E \circ \mathrm{Id}_E) = I_n$$

De même, $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} \times P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = I_n$. Ceci prouve que $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est inversible que son inverse est $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$. ∎

Proposition n° 13 : formule de changement de bases pour un vecteur

Si $x \in E$, notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ et $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ ie $X = PX'$

Démonstration de la proposition n° 13 : Proposons deux méthodes :

- Posons $y = \mathrm{Id}_E(x)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)$, alors, d'après le théorème 5, $Y = AX'$. De plus, $y = x$, donc $Y = X$, et $A = P$, donc $X = PX'$.
- Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$, $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. Comme $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = (p_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}}$, on sait que $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$. On a $x = \sum_{j=1}^{n} x'_j e'_j = \sum_{j=1}^{n} x'_j \left(\sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j\right) e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$. Par unicité des coordonnées dans la base $\mathscr{B}$: pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $x_i = \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} x'_j$. Ainsi, $X = PX'$. ∎

Moyen mnémotechnique pour la formule de changement de base pour un vecteur

Pour ne pas se tromper de formule, retenir «**pépé**» : les «p» sont du même côté de la formule $\boldsymbol{P}$ et X**p**rime.

Exemples 15. Déterminer $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(Q)$ et $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(Q)$ où $Q = 1 + 2(X-1) + 2(X-1)^2 \in \mathbb{R}_2[X]$, $\mathscr{B}' = (1, X-1, (X-1)^2)$ et $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$?

Théorème n° 7 : formule de changement de base pour un endomorphisme

Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$, $D = \text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ et $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, alors $A = PDP^{-1}$.
Autrement dit $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Démonstration du théorème n° 7 : En utilisant la remarque 8, ainsi que le théorème 6 :

$$\begin{aligned}
P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}} &= \text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\text{Id}_E)\text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}'}(f)\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\text{Id}_E)\\
&= \text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\text{Id}_E \circ f)\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\text{Id}_E)\\
&= \text{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f)\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\text{Id}_E)\\
&= \text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}}(f \circ Id_E) = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)
\end{aligned}$$

Moyen mnémotechnique pour retenir la formule de changement de base d'un endomorphisme

On peut retenir : «**A**lice = **P**ensionnaire **D**u **PMU**» où **PMU** encode P^{-1} (**P** **M**oins **U**n)

Remarque 9. Souvent, la base $\mathscr{B}$ sera la base canonique de E, la matrice $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ s'obtient alors facilement contrairement à $P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$. La base $\mathscr{B}'$ rendra souvent $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ agréable (matrice diagonale ou triangulaire par exemple).

Exemple 16. Considérons l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ noté $f\colon (x,y) \mapsto (5x+y, x+5y)$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. Donner A la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
2. Justifier que $\mathscr{B}' = ((1,1),(1,-1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Donner D la matrice de f dans cette base.
3. Calculer D^n, puis grâce à la formule de changement de base, calculer A^n. En déduire f^n.

Solution de l'exemple 16 :

1. $f(1,0) = (5,1) = 5(1,0) + 1(0,1)$ et $f(0,1) = (1,5) = 1(1,0) + 5(0,1)$, ainsi $\text{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
2. $\mathscr{B}'$ est une famille de deux vecteurs et ils sont non colinéaires donc $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$, de plus, $\text{Card}(\mathscr{B}') = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, ainsi, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^2$. De plus, $f(1,1) = (6,6) = 6(1,1) + 0(1,1)$ et $f(1,-1) = (4,-4) = 0(1,1) + 4(1,-1)$, ainsi, $D = \text{Mat}_{Bs'}(f) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$
3. $D^n = \begin{pmatrix} 6^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$ (car D est diagonale). Or, d'après le théorème 7, $A = PDP^{-1}$ avec $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$, or $(1,1) = 1(1,0) + 1(0,1)$ et $(1,-1) = 1(1,0) + -1(0,1)$ de sorte que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Péril imminent décomposer dans la bonne base

Pour calculer $\text{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, il faut décomposer $f(e'_j)$ dans $\mathscr{B}'$ et non dans $\mathscr{B}$.

Définition de deux matrices semblables

On dit que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe $P \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = PBP^{-1}$.

Remarque 10. Si $u \in \mathscr{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, alors A et B sont semblables ssi il existe $\mathscr{B}'$ base de E telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$.

Justification de la remarque 10 : S'il existe $\mathscr{B}'$ base de telle que $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$, comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, d'après le théorème 7, $A = PBP^{-1}$ avec $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$. Ainsi, A et B sont semblables. Réciproquement, supposons A et B semblables, alors, il existe P une matrice inversible telle que $A = PBP^{-1}$. Pour $j \in [\![1 ; n]\!]$, posons $e'_j = \sum\limits_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$, alors $\mathscr{B}' = \left(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n\right)$ est une famille de vecteurs, telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = P$. Ainsi, $\mathrm{rg}(\mathscr{B}') = \mathrm{rg}(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')) = \mathrm{rg}(P) = n$ (car P est inversible), ainsi, $\mathscr{B}'$ est une famille libre (son rang est égale à son cardinal), comme $\mathrm{Card}\mathscr{B}' = \dim(E)$, $\mathscr{B}'$ est une base de E. De plus, $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} = P$. Notons $C = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, alors, d'après le théorème 7, $A = PCP^{-1}$, ainsi, $C = P^{-1}AP = P^{-1}PAP^{-1} = B$, dès lors $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

loic.devilliers@proton.me

Résumé du chapitre sous forme de tableaux

Lien entre espaces vectoriels et matrices

Soient E et F, G sont trois EV de dimension finie, $\dim(E) = n$ et $\dim(F) = p$. $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$ sont des bases de E, $\mathscr{C} = (f_1, f_2, \ldots, f_p)$ est une base de F, $\mathscr{D}$ est une base de G.

Concept	**Monde : EV/fonction linéaire**	**Monde : Matrices**	**Lien entre les deux mondes**
Vecteur au départ	$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E$	$X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$	$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$
Vecteur à l'arrivée	$y = \sum_{j=1}^{p} y_i f_i \in F$	$Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$	$Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$
Image des vecteurs de la base	$u \in \mathscr{L}(E,F)$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{i,j} f_i$	$A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$	$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u) = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$
Image d'un vecteur	$y = u(x)$	$Y = AX$	
Définition de l'image	$\mathrm{Im}(u) = \{u(x) \mid x \in E\}$	$\mathrm{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\}$	$y \in \mathrm{Im}(u)$ ssi $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(y) \in \mathrm{Im}(A)$
Famille génératrice de l'image	$\mathrm{Im}(u) = \mathrm{vect}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$	$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{vect}(C_1, \ldots, C_n)$ où $C_j = j$-ième colonne de A.	
Rang	$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}(u))$	$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}(A))$	$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u)$
Noyau	$\mathrm{Ker}(u) = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\}$	$\mathrm{Ker}(A) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$	$x \in \mathrm{Ker}(u)$ ssi $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in \mathrm{Ker}(A)$ $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = \dim(\mathrm{Ker}(u))$
Théorème du rang	$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \mathrm{rg}(u)$	$n = \dim(\mathrm{Ker}(A)) + \mathrm{rg}(A)$	WARNING : n est le nombre de colonnes de A
Composition/ Produit	$v \in \mathscr{L}(F,G)$ alors $v \circ u \in \mathscr{L}(E,G)$	$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C},\mathscr{D}}(v)$ et $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(u)$	$AB = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{D}}(v \circ u)$
Changement de base	$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ bases de E où $e'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{i,j} e_i$	$P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$	$P = (p_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$
Changement de base pour un vecteur	$\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ bases de E et $x \in E$	$X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, $X' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$ $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$	$X = PX'$

Cas particuliers des endomorphismes

Objets	**Endomorphisme** $u \in \mathscr{L}(E)$	**Matrice carrée** $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$	Lien $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$
Changement de base	$u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ bases de E	$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$, $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$	$A = PDP^{-1}$
Inversibilité bijectivité	Il existe $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ v = \mathrm{Id}_E$	Il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB = I_n$	u est bijective SI ET SEULEMENT SI A est inversible et $A^{-1} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1})$
Vecteur propre	$x \in E$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ avec $x \neq 0$	$X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $AX = \lambda X$ avec $X \neq 0$	X vecteur propre de A pour λ SI ET SEULEMENT SI x vecteur propre de u pour λ
Valeur propre	$\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $x \in E$ non nul tel que $u(x) = \lambda x$	$\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = \lambda X$	λ valeur propre de A ssi λ valeur propre de u
Spectre	ensemble des valeurs propres de u : $\mathrm{Sp}(u)$	ensemble des valeurs propres de A : $\mathrm{Sp}(A)$	$\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u)$
Diagonalisabilité	u est diagonalisable s'il existe $\mathscr{B}'$ base de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ soit diagonale	A est diagonalisable s'il existe P inversible et D diagonale telle que $A = PDP^{-1}$	u est diagonalisable ssi $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est diagonalisable.

Opérations sur les lignes/colonnes

But	**Méthode**
Résoudre un système linéaire $AX = Y$ où $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$	Opérations **SEULEMENT** sur les lignes du système.
Savoir si une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible et déterminer son inverse	Opérations **SEULEMENT** sur les lignes sur A et I_n jusqu'à obtenir I_n et B, A étant inversibe ssi c'est possible possible. Dans ce cas, $A^{-1} = B$. **Ou** Résoudre le système $Y = AX$: A est inversible ssi s'il $Y = AX$ admet toujours une solution, sous la forme $X = BY$. Dans ce cas, $A^{-1} = B$.
Trouver le rang de $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$	Effectuer des opérations sur les lignes **ET** les colonnes jusqu'à trouver une matrice échelonnée.
Trouver le rang de $f \in \mathscr{L}(E,F)$	Poser $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et calculer $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A)$ par la méthode précédente.
Trouver le rang de $\mathscr{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E	Soit $\mathscr{B}$ une base de E, prendre $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{F})$ et calculer $\mathrm{rg}(\mathscr{F}) = \mathrm{rg}(A)$.