Exemples d'applications linéaires

Exercice 1 ($\star$ YT)**.** Les applications suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P(X) \longmapsto P(X)+1 \end{cases}$
2. $g\colon \begin{cases} \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto M^2 \end{cases}$
3. $h\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x, xy) \end{cases}$

Exercice 2 ($\star$ Cou, Cal ©)**.** On considère dans $\mathbb{R}^2$ les trois vecteurs $u=(1,1)$, $v=(2,-1)$ et $w=(1,4)$.

1. Démontrer que (u,v) est une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour quelle(s) valeur(s) du réel a existe-t-il une application linéaire $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(u)=(2,1)$, $f(v)=(1,-1)$ et $f(w)=(5,a)$?

Exercice 3 ($\star$ Cal ©)**.** Soit $f\colon \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x+2y, x-y) \end{cases}$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
2. Soit (e_1,e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $(f(e_1),f(e_2))$ est libre.
3. Montrer que $(f(e_1),f(e_2))$ est une base de $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 4 ($\star$ Cal ©)**.** Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $f_d\colon \begin{cases} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto AM \end{cases}$ et $f_g\colon \begin{cases} \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \\ M \longmapsto MA \end{cases}$

1. Montrer que f_d et f_g sont des endomorphismes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer $\operatorname{Ker}(f_d)$ et $\operatorname{Ker}(f_g)$.
3. Déterminer $\operatorname{Im}(f_d)$ et $\operatorname{Im}(f_g)$.

Exercice 5 ($\star$ Rai ©)**.** Soit $\Phi\colon \begin{cases} \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ f \longmapsto f''-2f'+f \end{cases}$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$.
2. Déterminer son noyau.

Exercice 6 ($\star$ Cou, YT)**.** Montrer qu'il existe une unique application linéaire $f\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(1,0,0)=(0,1)$, $f(1,1,0)=(1,0)$ et $f(1,1,1)=(1,1)$. Déterminer $f(x,y,z)$, $\operatorname{Ker}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$.

Exercice 7 ($\mathcal{S}\star\star$ Rai ©)**.** Soit $\Delta\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto P(X+1)-P(X) \end{cases}$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme.
2. Trouver $\operatorname{Ker}(\Delta)$
3. Trouver $\operatorname{Im}(\Delta)$

Exercice 8 ($\star$ Cal)**.** Soit $f\colon (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$, montrer que f est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$ et déterminer f^{-1}.

Exercice 9 ($\star\star$ Rai)**.** Soit $E=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, posons

$$\Psi\colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}} \end{cases} \quad\text{et}\quad \Phi\colon \begin{cases} E \longrightarrow E \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (0,u_0,u_1,u_2,\dots) \end{cases}$$

1. Montrer que Φ et Ψ sont des endomorphismes de E (appelés les tapis roulants).
2. Vérifier que $\Psi\circ\Phi = \operatorname{Id}_E$, alors que $\Phi\circ\Psi \neq \operatorname{Id}_E$.
3. Ψ est-elle injective ? surjective ? même question pour Φ.

Exercice 10 ($\star$ Rai, YT)**.** Soit $(a_0,a_1,\dots,a_n)$ des réels deux à deux distincts. Montrer que $\Phi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P \longmapsto (P(a_0),P(a_1),\dots,P(a_n)) \end{cases}$ est un isomorphisme.
$\star\star$ Retrouver l'isomorphisme réciproque.

Exercice 11 ($\star$ Rai)**.** Soit $(a_1,a_2,\dots,a_n)$ des réels deux à deux distincts. Montrer que $\Phi\colon \begin{cases} \mathbb{R}_{2n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ P \longmapsto (P(a_1),P'(a_1),P(a_2),P'(a_2),\dots,P(a_n),P'(a_n)) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Exercice 12 ($\star$ Rai YT)**.** Soit $E=\mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3. On définit u l'application de E par $u(P)=P+(1-X)P'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E.
2. Déterminer une base de $\operatorname{Im}(u)$.
3. Que vaut $\operatorname{rg}(u)$?
4. Déterminer une base de $\operatorname{Ker}(u)$.

Exercice 13 ($\star\star\star$ Mod, Rec, Rai)**.** Soit $n\in\mathbb{N}^\star$, montrer que pour tout $P\in\mathbb{R}_n[X]$ il existe un unique $Q\in\mathbb{R}_n[X]$ tel que $P=\sum_{k=0}^{n} Q^{(k)}$.

Résultats théoriques

Exercice 14 ($\star$ Rai ©)**.** Soient E,F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soient $f \in \mathscr{L}(E,F)$ et $g \in \mathscr{L}(F,G)$. Démontrer que $g \circ f = 0 \Longleftrightarrow \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$.

Exercice 15 ($\star$ Rai ©)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$, et $(a,b) \in \mathbb{K}^2$ avec $a \neq b$, montrer que l'intersection de $\mathrm{Ker}(f - a\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(f - b\mathrm{Id}_E)$ vaut $\{0_E\}$.

Exercice 16 (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.** Soit E un espace vectoriel et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que, pour tout $x \in E$, la famille $(x, f(x))$ est liée.

1. Démontrer que pour tout $x \in E$ non nul, il existe un unique scalaire λ_x tel que $f(x) = \lambda_x x$
2. Comparer λ_x et λ_y lorsque (x,y) est liée.
3. Comparer λ_x et λ_y lorsque (x,y) est libre (on pourra considérer $x+y$).
4. En déduire que f est une homothétie (ie $f = \lambda\mathrm{Id}_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$)
5. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 17 (𝄞$\star\star\star$)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie, on prend f dans le centre de $\mathscr{L}(E)$, c'est-à-dire que $f \in \mathscr{L}(E)$ commute avec tous les endomorphismes de E. On suppose que f n'est pas une homothétie, à l'aide de l'exercice 16, trouver une contradiction. Conclure

Exercice 18 (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.** Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f^r = 0_{\mathscr{L}(E)}$ et que $f^{r-1} \neq 0_{\mathscr{L}(E)}$ (on dit que f est nilpotente d'indice r) : il existe $x_0 \in E$ tel que $f^{r-1}(x_0) \neq 0_E$.

1. Montrer que $(x_0, f(x_0), \ldots, f^{r-1}(x_0))$ est une famille libre de E.
2. Comparer r et n et calculer f^n

Exercice 19 ($\star\star\star$ Mod, Rec)**.** Soient $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ des réels. On note F l'ensemble f des fonctions continues sur $[\, a_1 \,;a_n \,]$ telles que f soit affine sur $[\, a_i \,; a_{i+1} \,]$ pour tout $i \in [\![1\,; n-1]\!]$. Montrer que F est de dimension finie et que $\dim(F) = n$.

Noyau, image, rang

Exercice 20 ($\star$ Cou)**.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$, montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et que $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

Exercice 21 ($\star\star$ Rai ©)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$, montrer que $\mathrm{rg}(f+g) \leqslant \mathrm{rg}(f) + \mathrm{rg}(g)$ puis que $|\mathrm{rg}(f) - \mathrm{rg}(g)| \leqslant \mathrm{rg}(f-g)$.

Exercice 22 ($\star\star$ Cou, Rai, Rec ©)**.** Soient E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E de dimensions finies,

1. On pose $H = \{x \in E \mid \exists (f,g) \in F \times G \quad x = f + g\}$, démontrer que H est un SEV de E
2. Déterminer la dimension de H en appliquant le théorème du rang à $\begin{cases} F \times G \longrightarrow E \\ (f,g) \longmapsto f+g \end{cases}$.

Exercice 23 (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$, E étant un espace vectoriel de dimension $2n$. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. $u^2 = 0$ et $n = \mathrm{rg}(u)$
2. $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$.

Exercice 24 ($\star\star$ Rai, Cou)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ où E est un EV de dimension finie et F un SEV de E. Montrer que $\dim(u(F)) = \dim(F) - \dim(F \bigcap \mathrm{Ker}(u))$.

Exercice 25 ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit E un $\mathbb{K}$-EV de dimension finie, $f \in \mathscr{L}(E)$. On suppose que $f^2 - 5f + 6\mathrm{Id}_E = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$, il existe $a \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $b \in \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$ tel que $x = a + b$.
2. Soit $\mathscr{B}_2$ une base de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $\mathscr{B}_3$ une base de $\mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$, montrer que la concaténation de $\mathscr{B}_2$ et de $\mathscr{B}_3$ est une base de E et donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 26 ($\star$ Cou)**.** Si $f : \begin{cases} \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) \longmapsto (x-y+z, t-y, x+z-t) \end{cases}$, déterminer $\mathrm{rg}(f)$.

Exercice 27 ($\star\star$ Rec, Rai)**.** Trouver un isomorphisme entre $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (ensemble des matrices symétriques carrées de tailles n) et $\mathbb{R}^N$ pour un certain entier N, en déduire $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}))$

Applications linéaires à valeurs dans $\mathbb{K}$ et trace d'une matrice

Exercice 28 ($\star$ Cal)**.** Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on définit la trace de la matrice A par $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$, montrer que $\operatorname{tr} \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ et que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$.

Dans les exercices qui suivent, on pourra utiliser librement les notations et les résultats de l'exercice 28.

Exercice 29 ($\star$ Cou ©)**.** Déterminer la dimension du noyau de la trace.

Exercice 30 ($\star$ Cal)**.** Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Exercice 31 (𝄞$\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, pour $A \in E$, on définit $\varphi_A : M \in E \mapsto \operatorname{tr}(AM)$.

1. Montrer que $\varphi_A \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$.
2. Montrer que $A \in E \mapsto \varphi_A \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ est linéaire et injective.

Exercice 32 ($\star\star\star$ Rec ©)**.** Soit $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \mathbb{K})$ telle que pour tous A, $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\varphi(AB) = \varphi(BA)$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \alpha \operatorname{tr}$.

Exercice 33 ($\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n, soit $(\psi, \varphi) \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})^2$ telles que $\operatorname{Ker}(\psi) = \operatorname{Ker}(\varphi) \neq E$. Montrer que ψ et φ sont proportionnelles.

Matrices d'une application linéaire

Exercice 34 ($\star$ Cal ©)**.** Dans les bases canoniques respectives, donner les matrices des applications linéaires suivantes :

1. $\begin{cases} \mathbb{C}_4[X] \longrightarrow \mathbb{C}_3[X] \\ P \longmapsto P' \end{cases}$
2. $\begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} \\ P \longmapsto \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x \end{cases}$
3. $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_4[X] \\ (x, y, z) \longmapsto xX^4 + (y+z)X + z \end{cases}$
4. $\begin{cases} \mathbb{R}_4[X] \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ P \longmapsto (P(0), P''(2) - P'(4)) \end{cases}$
5. $\begin{cases} \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{C}) \\ (x, y, z) \longmapsto \begin{pmatrix} x & y - 8x \\ 2y + z & x \\ x + y & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

Exercice 35 ($\star$ Cal ©)**.** Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $h \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est A.

1. Exprimer $h(x, y, z)$ pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Sans calcul matriciel, calculer $h^2(e_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
3. Sans calcul matriciel, calculer $h^3(e_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.
4. Que peut-on en déduire sur h^3 ?
5. À l'aide d'un produit matriciel, calculer h^3.

Exercice 36 ($\star$ Cal, YT)**.** Soient $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique (e_1, e_2, e_3) est A. Soit $f_1 = e_1 - e_2 - e_3$, $f_2 = -e_1 + e_2 + 2e_3$ et $f_3 = e_1 - e_3$.

1. Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de u dans cette base.
3. En déduire les puissances successives de A.

Exercice 37 ($\star\star$ YT)**.** Soit $(\alpha, \beta) \in [\,0\,;1\,]^2$ tel que $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$. On note

$$A(\alpha, \beta) = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & \alpha \\ \beta & 1 - \beta \end{pmatrix}$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker}(A(\alpha, \beta) - I_2)$ et en déterminer une base.
2. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $Q(x) = \det(A(\alpha, \beta) - xI_2)$. Montrer que Q est une fonction polynomiale, déterminer ses racines.
3. Déterminer une matrice P telle que

$$A(\alpha, \beta) = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - \alpha - \beta \end{pmatrix} P^{-1}$$

4. En déduire les puissances successives de $A(\alpha,\beta)$. Que pouvez-vous dire de la suite $(A(\alpha,\beta)^n)_{n\geqslant 0}$?

Exercice 38 ($\star\star$ Cal ©)**.** Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $f_k\colon x \mapsto \mathrm{e}^{kx}$.

1. Que vaut $\dim(F)$ avec $F = \mathrm{vect}(f_1, f_2, f_3)$?
2. Soit $\varphi\colon f \mapsto f'' + f' + 2f$, montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(F)$.
3. Donner la matrice de φ dans la base (f_1, f_2, f_3).
4. Montrer que φ est bijective et donner la matrice de φ^{-1} dans F.
5. Trouver une solution de l'équation différentielle $f''(x) + f'(x) + 2f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3x}$.

Exercice 39 ($\star$ Cal ©)**.** Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$, on pose $\mathscr{B}' = ((0,0,0,1),(0,0,1,1),(0,1,1,1),(1,1,1,1))$ et $x = (1,2,3,4)$. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^4$. En utilisant une formule de changement de base donner $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(x)$.

Exercice 40 (𝄞$\star\star$ Rec, Rai ©)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ de rang r, le but est de montrer que $A = QJ_rP^{-1}$ où $J_r = \sum\limits_{k=1}^{r} E_{k,k} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et P et Q deux matrices inversibles.

1. Soit $\mathscr{B}$ base de E ($\dim(E) = n$) et $\mathscr{C}$ base de F ($\dim(F) = p$). Justifier qu'il existe $f \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = A$.
2. Considérer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et complétez là en une base de E notée $\mathscr{B}'$. Comment prendre $\mathscr{C}'$ base de F telle que $J_r = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$?
3. Démontrer que $A = QJ_rP^{-1}$ où $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{C}'}$, on pourra pour cela utiliser le fait que $f = \mathrm{Id}_F \circ f \circ \mathrm{Id}_E$.
4. En déduire que $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}(A)$.

Exercice 41 ($\star$ Cou, YT)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $E = \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = A$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Donner l'expression de $u(x,y,z)$
2. Trouver une base de $\mathrm{Ker}(u - \mathrm{Id}_E)$, de $\mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E)$ puis de $\mathrm{Ker}(u + 4\mathrm{Id}_E)$.
3. Montrer que la juxtaposition de ces bases est une base de E.
4. Trouver D la matrice de u dans cette base.
5. Quel est le lien entre A et D ?
6. Calculer A^n où $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 42 ($\star\star$ Rec)**.** Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ une matrice non nulle telle que $M^2 = 0_2$. Montrer que M est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 43 ($\star\star$ Rec)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 100 & 27 \\ -363 & -98 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que A et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.
2. En déduire une valeur explicite de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 44 ($\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4 et $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 = -\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que f est un automorphisme de E.
2. Soit $x \in E$ non nul, montrer que $(x, f(x))$ est une famille libre.
3. Soit $e_1 \in E$ non nul. Montrer que $F = \mathrm{vect}(e_1, f(e_1))$ est stable par f (i.e. $f(F) \subset F$).
4. Soit $e_2 \in E\backslash F$. Montrer que $\mathscr{B}' = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de E et déterminer $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$
5. En déduire que toute matrice $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{K})$ telle que $A^2 = -I_4$ est semblable à
$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Rang, noyau et image

Exercice 45 ($\star$ Cal)**.** Soit $e_1 = (1,1,1,4)$, $e_2 = (2,-1,0,1)$, $e_3 = (2,0,1,4)$, $e_4 = (2,2,3,-2)$ et $e_5 = (2,2,3,-2)$, déterminer le rang de $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.

Exercice 46 ($\star$ Rai, Cal)**.** Considérons $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A - \lambda I_2$ ne soit pas inversible.

2. Pour chaque λ déterminé à la question précédente, trouver une base de $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_2)$.
3. Notons $\mathscr{B}'$ la concaténation de ces bases. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.
4. Soit u l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = A$ où $\mathscr{B}$ est la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice de u dans la base $\tilde{\mathscr{B}}'$, où $\tilde{\mathscr{B}}'$ est la base de $\mathbb{R}^2$ correspondant à $\mathscr{B}'$.
5. En déduire que A est semblable à une matrice diagonale.
6. En déduire un calcul explicite de A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 47 (𝄞⋆⋆ Rai ©)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ telle que pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{i,j}| < |a_{i,i}|$. Montrer que $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ puis que A est inversible.

Exercice 48 (⋆ Cal ©)**.** Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R}_3[X] \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ P \longmapsto (P(1), P(2), P(3)) \end{cases}$. Donner la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathbb{R}^3$. Que vaut $\mathrm{rg}(f)$?

Exercice 49 (⋆⋆ Rai)**.** On pose, pour $P \in E = \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi(P) = P(X+1)$.

1. Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et trouver φ^{-1}.
2. On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ trouver $A_n = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$.
3. Pour $n = 3$, calculer ${A_3}^{-1}$ et ${A_3}^5$.

Exercice 50 (⋆⋆ Cou ©)**.** Soit $E = \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour $X \in E$, on pose $f(X) = AX$. Montrer que $f \in \mathscr{L}(E)$.
2. Expliciter la matrice de f dans la base canonique de E.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Exercice 51 (𝄞⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit $M \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(M) = 1$.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telles que $M = CL$.
2. Si $A \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{R})$ sont non nulles avec $q \neq 1$ est-ce que AB est non nulle ?
3. Soient $C \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ non nulles, prouver que CL est de rang 1.

Ainsi, les matrices de rang 1 de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ sont exactement les matrices CL où $C \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ et $L \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$.

Exercice 52 (⋆ Cal)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, trouver le rang de A.

Exercice 53 (⋆⋆ Rai ©)**.** Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ tel que $AB = A + B$. Montrer que A et B commutent

Divers

Exercice 54 (⋆ Cal ©)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension n. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on appelle trace de A la somme des coefficients diagonaux de A : $\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$.

1. Déterminer la trace de I_n.
2. Montrer que $tr \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.
3. Déterminer une base de son image puis de son noyau.
4. Montrer que pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2$, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que toutes les matrices de u ont la même trace, on note $\mathrm{tr}(u)$ cette valeur.
6. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Exprimer le polynôme $P = \det(XI_2 - A)$ en fonction de $\mathrm{tr}(A)$ et de $\det(A)$.
7. Est-ce que $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$ pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$?

Exercice 55 (⋆⋆ Cou, Cal, Rai ©)**.** Soit l'application ϕ définie, par pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\phi(P) = XP'' + (1-X)P'$

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner A, la matrice de ϕ dans la base $(1, X, \cdots, X^n)$.
3. Que vaut le rang de ϕ ?

On fixe un entier $k \in [\![0\,; n]\!]$.

4. Montrer que $\phi + k\mathrm{Id}_E$ est non injective. Que vaut $\dim(\ker(\phi + k\mathrm{Id}_E))$?
5. En déduire qu'il existe un unique polynôme unitaire $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $\phi(P_k) = -kP_k$.
6. Justifier que P_k est de degré k.

7. Déterminer P_0 et P_1. Vérifier que $P_2 = X^2 - 4X + 2$.
8. Montrer que $\mathscr{B}' = (P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
9. Donner, D, la matrice de ϕ dans la base $\mathscr{B}'$?
10. Donner une relation entre A et D ?

Exercice 56 ($\star\star\star$ Rec, Rai ©)**.** Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On appelle hyperplan de E un SEV de E de dimension $n-1$.

1. Soit F un SEV de E, montrer que F est un hyperplan de E si et seulement si il existe $f \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ non nulle telle que $F = \mathrm{Ker}(f)$.
2. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension p, montrer qu'il existe $H_1,\ H_2, \dots, H_{n-p}$ des hyperplans de E tels que $F = \cap_{i=1}^{n-p} H_i$.
3. Soit maintenant $H_1,\ H_2,\ \dots, H_p$ des hyperplans de E, montrer que $\dim(\cap_{i=1}^{p} H_i) \geqslant n-p$.

Exercice 57 ($\star\star$ Rai, Rec)**.** On note

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix},\ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

1. Montrer que F est un espace vectoriel de dimension finie.
2. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, calculer A^2 et A^3
3. Trouver une base de F ainsi que $\dim(F)$.
4. On note f l'application qui à $M \in F$ associe AM. Montrer que f est un endomorphisme de F.
5. Calculer f^3.
6. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
7. f est-elle bijective ? injective ? surjective ?
8. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
9. Résoudre l'équation $f(M) = I_3 + A^2$ d'inconnue $M \in F$.
10. Résoudre l'équation $f(M) = A + A^2$ d'inconnue $M \in F$.