

Devoir surveillé de mathématiques 4

Samedi 6 décembre 2025, durée : 2h

Exercice 1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des matrices carrées ayant trois lignes et trois colonnes, I_3 la matrice identité et 0_3 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Pour $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ composée de 0 partout sauf en position (i, j) où il y a un 1. On rappelle que les $E_{i,j}$, pour $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, forment une base, dite canonique, de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $T^{(1)}(A)$ et $T^{(2)}(A)$ suivants :

$$T^{(1)}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid AM = M\}$$

$$T^{(2)}(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \mid A^2M = AM\}.$$

1. Rappeler sans preuve la dimension de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $T^{(1)}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On admet que $T^{(2)}(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (se montre de la même façon).
3. Établir que $T^{(1)}(A) \subset T^{(2)}(A)$.
4. Montrer que si A est inversible, alors $T^{(1)}(A) = T^{(2)}(A)$.
5. Établir que si $A - I_3$ est inversible, alors $T^{(1)}(A) = \{0_3\}$.

6. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Dédurre de ce qui précède les ensembles $T^{(1)}(B)$ et $T^{(2)}(B)$.

On considère $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Démontrer que P est inversible et calculer P^{-1} .
8. On pose $D = P^{-1}CP$, calculer D .
9. En déduire une expression pour C^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrer que $N \in T^{(1)}(D)$ si et seulement si il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

11. En déduire une base de $T^{(1)}(D)$ puis sa dimension.
12. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$. Montrer que $M \in T^{(1)}(C)$ si et seulement si $N \in T^{(1)}(D)$.
13. En déduire l'expression générale des matrices de $T^{(1)}(C)$ et déterminer une base et la dimension de $T^{(1)}(C)$.
14. Donner l'expression générale des matrices de $T^{(2)}(C)$ et déterminer une base et la dimension de $T^{(2)}(C)$.
Est-ce que $T^{(1)}(C) = T^{(2)}(C)$?

Exercice 2

Dans tout l'exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose

$$B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}.$$

1. Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, déterminer le degré du polynôme $B_{n,k}$ son coefficient dominant ainsi que les racines de $B_{n,k}$ dont on donnera les multiplicités. Traiter les cas $k = 0$ et $k = n$ à part.
2. Calculer $\sum_{k=0}^n B_{n,k}$.
3. En déduire que pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $x \in [0; 1]$ on a $0 \leq B_{n,k}(x) \leq 1$.
4. Pour $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, exprimer $k \binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$.
5. En déduire un calcul de $\sum_{k=0}^n k B_{n,k}$.
6. Généraliser en calculant $k(k-1) \binom{n}{k}$ pour $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$ puis $\sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k}$.
7. De même, calculer $\sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k}$.
8. Soit $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Exprimer la dérivée $B_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1,k-1}$ et $B_{n-1,k}$.

On voudrait maintenant montrer que la famille $(B_{n,k})_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket} = (B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n})$ est libre. Soit donc $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. On suppose que

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k B_{n,k} = 0$$

et on cherche à montrer que pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ on a $\alpha_k = 0$. On raisonne par l'absurde.

9. Montrer que $\{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mid \alpha_k \neq 0\}$ admet bien un minimum. On note k_0 ce minimum.
10. Trouver une contradiction. On pourra utiliser la multiplicité d'une racine de B_{n,k_0} .
11. En déduire que $(B_{n,k})_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
12. Montrer que la fonction suivante est injective :

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P \longmapsto \sum_{k=0}^n P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}. \end{cases}$$

Exercice 3

Dans tout l'exercice, on s'intéresse aux **listes dont les éléments sont des entiers relatifs**.

Pour une telle liste $\mathbf{t} = [t_0, \dots, t_{n-1}]$, on appelle **coupe** (ou tranche) de $\mathbf{t}$ toute sous-liste non vide d'éléments consécutifs de $\mathbf{t}$. Toute coupe d'une liste $\mathbf{t}$ est donc une liste de la forme $\mathbf{t}[i : j] = [t_i, \dots, t_{j-1}]$ où $0 \leq i < j \leq n$.

À toute coupe $\mathbf{t}[i : j]$, on associe la somme $s_{i,j} = \sum_{k=i}^{j-1} t_k$ de ses éléments. Le but de l'exercice est de construire un algorithme pour déterminer la valeur minimale des sommes des coupes d'une liste $\mathbf{t}$.

Par exemple, si $\mathbf{t} = [4, -1, -9, -10, 9, -2, 8, -9]$, la valeur minimale des sommes des coupes de cette liste est -20 , atteinte pour la coupe $\mathbf{t}[1:4]$.

L'utilisation des fonction `sum` et `min` prédéfinies dans Python sont proscrites.

1. Écrire une fonction `somme` prenant en argument une liste $\mathbf{t}$, ainsi que deux entiers i et j , et qui renvoie la somme $s_{i,j}$ de la coupe $\mathbf{t}[i : j]$. On ne vérifiera pas dans le code de la fonction que les indices i et j sont valides : on supposera qu'ils vérifieront toujours la propriété $0 \leq i < j \leq n$, où n est la longueur de la liste $\mathbf{t}$.
2. Écrire une fonction `somme_min` prenant en argument une liste $\mathbf{t}$ et qui renvoie la valeur minimale des sommes des coupes de la liste passée en argument.
3. En déduire le code d'une fonction `coupe_min` qui prend en argument une liste $\mathbf{t}$ et qui renvoie les indices i et j d'une coupe $\mathbf{t}[i : j]$ de somme minimale.