

Correction du Devoir surveillé de mathématiques 4

Exercice 1

1. $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 3 \times 3 = 9$.
2. Fixons $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
 - $T^{(1)}(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ (ensemble défini par compréhension).
 - Remarquons que si $M = 0_3$, alors $AM = A0_3 = 0_3 = M$. Donc, $0_3 \in T^{(1)}(A)$.
 - Soient $(M, N) \in T^{(1)}(A)^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors par distributivité, $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda M + N$. Donc, $\lambda M + N \in T^{(1)}(A)$.

Par conséquent, $T^{(1)}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

3. Soit $M \in T^{(1)}(A)$, alors $AM = M$, dès lors, $A^2M = A(AM) = AM$. Ceci montre que $M \in T^{(2)}(A)$. Par conséquent, $T^{(1)}(A) \subset T^{(2)}(A)$.
4. Supposons A inversible. Soit $M \in T^{(2)}(A)$, alors $A^2M = AM$, en multipliant à gauche par A^{-1} , alors $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$, soit $I_3AM = I_3M$ donc $AM = M$, donc $M \in T^{(1)}(A)$, on a montré que $T^{(2)}(A) \subset T^{(1)}(A)$ et d'après la question précédente, $T^{(1)}(A) \subset T^{(2)}(A)$. Par double inclusion, $T^{(1)}(A) = T^{(2)}(A)$.
5. Supposons $A - I_3$ inversible. Soit $M \in T^{(1)}(A)$, alors $AM = M$, donc $AM - I_3M = 0_3$, par distributivité, il en découle que $(A - I_3)M = 0_3$, en multipliant par $(A - I_3)^{-1}$, il vient

$$(A - I_3)^{-1}(A - I_3)M = (A - I_3)^{-1}0_3$$

D'où, $M = 0_3$. On a donc montré que, $T^{(1)}(A) \subset \{0_3\}$. Comme $T^{(1)}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'inclusion réciproque est vérifiée. Ainsi, $T^{(1)}(A) = \{0_3\}$.

6. Remarquons que $B - I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls. Ainsi, $B - I_3$ est inversible. D'après la question précédente, $T^{(1)}(B) = \{0_3\}$. De plus, B est une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont non nuls, donc B est inversible. D'après la question 4, $T^{(2)}(B) = T^{(1)}(B) = \{0_3\}$.

7.

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{c} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} & \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 & L_2 \leftrightarrow L_3 & \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & \begin{array}{c} L_2 \leftrightarrow -L_2 \\ L_3 \leftrightarrow -L_3 \end{array} & \\
 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\
 & L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 & \\
 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Ainsi, P est inversible et $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

8.

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \left[\begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

9. On montre par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $C^n = PD^nP^{-1}$. C'est vrai au rang 0 car $C^0 = I_3 = PD^0P^{-1}$. Soit $n \in \mathbb{N}$, si on suppose que c'est vrai pour au rang n , alors $C^{n+1} = CC^n = CPD^nP^{-1} = (PDP^{-1})PD^nP^{-1} = PDD^nP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

Comme D est diagonale on calcule facilement ses puissances, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$D^n = \begin{pmatrix} 0^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à multiplier par P à gauche et P^{-1} à droite.

$$C^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2^n & -2^n & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2^n & -2^n & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $n = 0$, $C^0 = I_3$

10. Soit $N = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Alors $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 2d & 2e & 2f \end{pmatrix}$. Par conséquent,

$$N \in T^{(1)}(D) \iff DN = N \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ a = a \\ b = b \\ c = c \\ d = 2d \\ e = 2e \\ f = 2f \end{cases} \iff x = y = z = d = e = f = 0 \iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, pour $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $N \in T^{(1)}(D)$ ssi il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11. D'après la question précédente :

$$T^{(1)}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \{aE_{2,1} + bE_{2,2} + cE_{2,3} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\} = \text{vect}(E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$$

Par conséquent, $\mathcal{B}_D = (E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3})$ est une famille génératrice de $T^{(1)}(D)$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons

$aE_{2,1} + bE_{2,2} + cE_{2,3} = 0_3$, alors $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$, par unicité des coefficients d'une matrice $a = b = c = 0$,

donc $\mathcal{B}_D$ est une famille libre. Donc, $\mathcal{B}_D$ est une base de $T^{(1)}(D)$. Donc, $\dim(T^{(1)}(D)) = \text{Card}\mathcal{B}_D = 3$.

12. Remarquons que comme $D = P^{-1}CP$, on a aussi $PDP^{-1} = C$

• Supposons que $M \in T^{(1)}(C)$, alors $DN = P^1CPP^{-1}M = P^{-1}CM = P^{-1}M = N$, donc $N \in T^{(1)}(D)$.

- Supposons que $N \in T^{(1)}(D)$, alors $CM = PDP^{-1}PN = PDN = PN = M$ donc $M \in T^{(1)}(C)$.
Par double implication, $M \in T^{(1)}(C)$ ssi $N = P^{-1}M \in T^{(1)}(D)$

13. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $M \in T^{(1)}(C)$ ssi $P^{-1}M \in T^{(1)}(D)$ ssi il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P^{-1}M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

ssi il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dès lors,

$$\begin{aligned} T^{(1)}(C) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} \\ &= \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, posons $\mathcal{B}_C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $\mathcal{B}_C$ est une famille génératrice de $T^{(1)}(C)$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$$

Donc $\begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$, comme deux matrices sont égales ssi elles ont les mêmes coefficients, on obtient $a = b = c = 0$, donc $\mathcal{B}_C$ est une famille libre. Par conséquent, $\mathcal{B}_C$ est une base de $T^{(1)}(C)$. Dès lors, $\dim(T^{(1)}(C)) = \text{Card}\mathcal{B}_C = 3$

14. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $M \in T^{(2)}(C)$ ssi $C^2M = CM$ ssi $(PDP^{-1})^2M = PDP^{-1}M$ ssi $PDP^{-1}PDP^{-1}M = PDP^{-1}M$ ssi $PD^2P^{-1}M = PDP^{-1}M$ ssi $D^2N = DN$ Où on a noté $N = P^{-1}M$ la dernière équivalence étant obtenue en multipliant à gauche par P ou P^{-1} . Soit $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$. Alors, $N \in T^{(2)}(D)$ ssi

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \text{ ssi } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 2g & 2h & 2i \end{pmatrix} \text{ ssi } g = h = i = 0.$$

Ainsi, $T^{(2)}(D) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} T^{(2)}(C) &= \left\{ P \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix} \mid (a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6 \right\} \\ &= \text{vect} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\mathcal{B}'_C} \right) \end{aligned}$$

On obtient ainsi, $\mathcal{B}'_C$ une famille génératrice de $T^{(2)}(C)$. Soit $(a, b, c, d, e, f) \in \mathbb{R}^6$. Supposons que la combinaison linéaire de ces six matrices avec les scalaires a, b, c, d, e et f est la matrice nulle. On a alors $\begin{pmatrix} a+d & b+e & c+f \\ a+d & b+e & c+f \\ a & b & c \end{pmatrix} = 0_3$. Alors, grâce à la dernière ligne, on obtient $a = b = c = 0$, en utilisant la première ligne, on obtient $d = e = f = 0$. Par conséquent, $\mathcal{B}'_C$ est une famille libre de $T^{(2)}(C)$. Dès lors, $\mathcal{B}'_C$ est une

base de $T^{(2)}(C)$. Donc, $\dim(T^{(2)}(C)) = \text{Card}\mathcal{B}'_C = 6$. Comme $\dim(T^{(1)}(C)) \neq \dim(T^{(2)}(C))$ on en conclut que $T^{(1)}(C) \neq T^{(2)}(C)$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on pose $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$.

1. • Si $k = 0$, $B_{n,k} = (1-X)^n = (-1)^n (X-1)^n$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $(-1)^n$ et 1 est la seule racine et sa multiplicité vaut n .
- Si $k = n$, $B_{n,k} = X^n$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant 1, 0 est sa seule racine et sa multiplicité vaut n .
- Si $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, alors

$$d^\circ B_{n,k} = d^\circ X^k (1-X)^{n-k} = d^\circ X^k + d^\circ (1-X)^{n-k} = k + (n-k) = n$$

De plus,

$$B_{n,k} = \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X-0)^k (X-1)^{n-k}$$

Le coefficient dominant vaut $\binom{n}{k} (-1)^{n-k}$, $B_{n,k}$ a deux racines 0 de multiplicité k et 1 de multiplicité $n-k$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la formule du binôme de Newton

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n = 1^n = 1$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$, $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et $x \in [0; 1]$, ainsi, $1-x \geq 0$, dès lors, $B_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ est le produit de trois nombres positifs, donc $B_{n,k}(x) \geq 0$. De plus, comme pour tout j , $B_{n,j}(x) \geq 0$, $B_{n,k}(x) \leq \sum_{j=0}^n B_{n,j}(x) = 1$. Ainsi, on a montré que $0 \leq B_{n,k}(x) \leq 1$.

4. Soit on reconnaît directement la formule du maire, soit on recalcule :

$$k \binom{n}{k} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = n \binom{n-1}{k-1}$$

5. En retirant le terme pour $k = 0$ (qui est nul), en utilisant la question précédente, puis un changement d'indice, on reconnaît une formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k B_{n,k} &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\ &\stackrel{i=k-1}{=} n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} X^{i+1} (1-X)^{n-1-i} = nX \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} X^i (1-X)^{n-1-i} \\ &= nX (X + (1-X))^{n-1} = nX \end{aligned}$$

6. Soit $k \in \llbracket 2; n \rrbracket$, alors ¹

$$\begin{aligned} k(k-1) \binom{n}{k} &= k(k-1) \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-2)!(n-k)} = n(n-1) \frac{(n-2)!}{(k-2)!(n-2-(k-2))!} \\ &= n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \end{aligned}$$

Ainsi, en procédant de même qu'à la question 5, on retire les deux premiers termes qui sont nuls, on utilise la formule que l'on vient d'établir, on effectue un changement d'indice pour reconnaître la formule du binôme de

1. Cette formule peut être appelée formule du maire et de son adjoint.

Newton :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k(k-1)B_{n,k} &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} X^k (1-X)^{n-k} \\
&\stackrel{i=k-2}{=} n(n-1) \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} X^{i+2} (1-X)^{n-2-i} \\
&= n(n-1) X^2 \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-2}{i} X^i (1-X)^{n-2-i} \\
&= n(n-1) X^2 (X + (1-X))^{n-2} = n(n-1) X^2
\end{aligned}$$

7. Par linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k} = \sum_{k=0}^n (k(k-1)B_{n,k} + kB_{n,k}) = \sum_{k=0}^n k(k-1)B_{n,k} + \sum_{k=0}^n kB_{n,k} = n(n-1)X^2 + nX = nx((n-1)X + 1)$$

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ par dérivation d'un produit et en utilisant la formule du maire,

$$\begin{aligned}
B'_{n,k} &= \binom{n}{k} k X^{k-1} (1-X)^{n-k} - \binom{n}{n-k} (n-k) X^k (1-X)^{n-k-1} \\
&= n \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{n-k} - n \binom{n-1}{n-1-k} X^k (1-X)^{n-k-1} \\
&= nB_{n-1,k-1} - nB_{n-1,k}
\end{aligned}$$

9. On raisonne par l'absurde : on suppose qu'il existe $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ tel que $\alpha_k \neq 0$. Ainsi, en définissant un ensemble par $E = \{k \in \llbracket 0; n \rrbracket \mid \alpha_k \neq 0\}$, E est un ensemble fini non vide. Par conséquent, E admet un minimum.

10. Comme $k_0 = \min(E)$, pour tout $k \in \llbracket 0; k_0 - 1 \rrbracket$, $\alpha_k = 0$, ainsi comme $\sum_{k=0}^n \alpha_k B_{n,k} = 0$, on en déduit que

$$\sum_{k=k_0}^n \alpha_k B_{n,k} = 0, \text{ en isolant le premier terme et en divisant par } \alpha_{k_0} \neq 0, \text{ on obtient}$$

$$\begin{aligned}
B_{n,k_0} &= \frac{-1}{\alpha_{k_0}} \sum_{k=k_0+1}^n \alpha_k B_{n,k} = \frac{-1}{\alpha_{k_0}} \sum_{k=k_0+1}^n \alpha_k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} \\
&= \frac{-(X-0)^{k_0+1}}{\alpha_{k_0}} \sum_{k=k_0+1}^n \alpha_k \binom{n}{k} (X-0)^{k-k_0-1} (1-X)^{n-k}
\end{aligned}$$

Ceci prouve que la multiplicité de 0 dans B_{n,k_0} est supérieure ou égale à $k_0 + 1$. Or, elle vaut k_0 d'après la question 1. On obtient donc une contradiction. Par conséquent, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $\alpha_k = 0$.

11. On vient de montrer que $(B_{n,0}, B_{n,1}, \dots, B_{n,n})$ est libre or c'est une famille de cardinalité $n+1$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$: c'en est une base !

12. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, supposons $\Phi(P) = \Phi(Q)$, alors par linéarité de la somme,

$$\sum_{k=0}^n \left(P\left(\frac{k}{n}\right) - Q\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k} = 0$$

Comme la famille $(B_{n,0}, \dots, B_{n,n})$ est libre, on en déduit que, pour tout $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, $P(k/n) - Q(k/n) = 0$. Ainsi, $P - Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et admet $n+1$ racines distinctes (tous les nombres k/n pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$), donc $P - Q = 0$, il s'ensuit que $P = Q$. Par conséquent, Φ est injective.

Remarque 1. Φ étant un endomorphisme (linéarité facile à montrer) en dimension finie, on peut même en conclure que Φ est un isomorphisme.

Exercice 3

```
1. def somme(t,i,j):
    S = 0
    for k in range(i,j): #  $i \leq k < j$ 
        S = S + t[k]
    return S
```

Ou en bouclant directement sur la liste :

```
def somme(t,i,j):
    S = 0
    for x in t[i:j]:
        S += x
    return S
```

```
2. def somme_min(t):
    n = len(t)
    Smin = t[0] # Somme de la coupe  $t[0:1]$ 
    for i in range(n-1):
        for j in range(i+1,n+1): #  $0 \leq i < j \leq n$ 
            S = somme(t,i,j)
            if S < Smin:
                Smin = S
    return Smin
```

```
3. def coupe_min(t,i,j):
    n = len(t)
    Smin = somme_min(t)
    for i in range(n-1):
        for j in range(i+1,n+1): #  $0 \leq i < j \leq n$ 
            if Smin == somme(t,i,j):
                return (i,j)
```

On peut aussi modifier la fonction de la deuxième question :

```
def coupe_min(t):
    n = len(t)
    Smin = t[0] # Somme de la coupe  $t[0:1]$ 
    for i in range(n-1):
        for j in range(i+1,n+1): #  $0 \leq i < j \leq n$ 
            S = somme(t,i,j)
            if S <= Smin:
                Smin = S
                a,b = i,j
    return a,b
```