

Où vont les racines ?

1. Si $n = 1$, alors $d^\circ P_n = 2$. Pour tout entier $n \geq 2$, $d^\circ P_n = n$.
2. `def Pn(x,n):`
 `return x**n + 9*x*x - 4`
3. $P_n(0) = -4$ et $P_n(1) = 6$, ainsi, $P_n(0) \leq 0 \leq P_n(1)$, en tant que polynôme, P_n est continue sur $[0; 1]$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0; 1]$ tel que $P_n(c) = 0$.

4. `def Dichotomie(eps,n):`
 `a = 0` *#a tel que $P_n(a) < 0$*
 `b = 1` *#b tel que $P_n(b) > 0$*
 `while b - a > eps:`
 `c = (a + b)/2`
 `if Pn(c,n) > 0:` *#Donc $P_n(a) \leq 0 \leq P_n(c)$*
 `b = c`
 `else:` *#Donc $P_n(c) \leq 0 \leq P_n(b)$*
 `a = c`
 `return a`

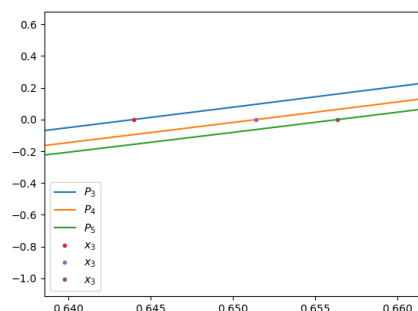
5. On propose le code suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt

n = 100
X = [k/n for k in range(n+1)]
Y3 = [Pn(x,3) for x in X]
Y4 = [Pn(x,4) for x in X]
Y5 = [Pn(x,5) for x in X]
eps = 10**(-4)
x3 = Dichotomie(eps,3)
x4 = Dichotomie(eps,4)
x5 = Dichotomie(eps,5)

plt.figure()
plt.plot(X,Y3,label="$P_3$")
plt.plot(X,Y4,label="$P_4$")
plt.plot(X,Y5,label="$P_5$")
plt.plot(x3,0,".",label="$x_3$")
plt.plot(x4,0,".",label="$x_4$")
plt.plot(x5,0,".",label="$x_5$")
plt.legend()
plt.show()
```

En zoomant sur la partie intéressante, on obtient l'image suivante :



6. $P'_n = nX^{n-1} + 18X$, ainsi pour tout $x \geq 0$, $P'_n(x) = nx^{n-1} + 18x \geq 0$, de plus, $P'_n(x) = 0$ ssi $x = 0$. Ainsi, P'_n est une fonction positive ou nulle qui ne s'annule qu'une seule fois, ainsi P_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par conséquent, P_n est injective, donc il existe un unique $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $P_n(c) = 0$.
7. • Soit $x \in \mathbb{R}$, $x + 9x^2 - 4 = 0$ ssi $x = \frac{-1 - \sqrt{145}}{18}$ ou $x = \frac{-1 + \sqrt{145}}{18}$. Comme $x_1 \geq 0$, nécessairement
- $$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{145}}{18}$$
- Soit $x \in \mathbb{R}$, $x^2 + 9x^2 - 4 = 0$ ssi $10x^2 - 4 = 0$ ssi $x = \pm\sqrt{\frac{2}{5}}$. Comme $x_2 \geq 0$, nécessairement
- $$x_2 = \sqrt{\frac{2}{5}}$$
8. Soit $x \in]0; 1[$,

$$P_n(x) - P_{n+1}(x) = x^n + 9x^2 - 4 - (x^{n+1} + 9x^2 - 4) = x^n - x^{n+1} = x^n(1 - x)$$

Or, $x > 0$ et $1 - x > 0$, par produit, $P_n(x) - P_{n+1}(x) > 0$, dès lors, $P_{n+1}(x) < P_n(x)$.

9. D'après la question 3, on sait que $x_n \in [0; 1]$. Or $P_n(0) \neq 0$ et $P_n(x_n) = 0$, ainsi nécessairement $x_n \neq 0$, de même $P_n(1) \neq 0$ et $P_n(x_n) = 0$, ainsi nécessairement $x_n \neq 1$. Donc $x_n \in]0; 1[$. D'après la question 8, $P_{n+1}(x_n) < P_n(x_n) = 0$. Par conséquent, $P_{n+1}(x_n)$ est strictement négatif.
10. Fixons $(x, x') \in I^2$ tel que $g(x) < g(x')$. Supposons que $x \geq x'$, alors, par croissance de g ,

$$g(x) \geq g(x') > g(x)$$

Ce qui est absurde, ainsi nécessairement $x < x'$.

11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $P_{n+1}(x_{n+1}) = 0 > P_{n+1}(x_n)$. Or, la fonction P_{n+1} est croissante, d'après la question 10, on en déduit que $x_{n+1} > x_n$. Ceci prouve que $(x_n)_n$ est une suite strictement croissante.
12. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [0; 1]$, ainsi, la suite $(x_n)_n$ est majorée par 1, comme elle est croissante, d'après le théorème de la limite monotone, $(x_n)_n$ est une suite convergente.
13. Comme $P_n(0) = -4$ et $P_n(2/3) = (2/3)^n > 0$ et que P_n est continue sur $[0; 2/3]$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0; 2/3]$ tel que $P_n(c) = 0$. Par unicité $c = x_n \in [0; 2/3]$. Notons ℓ la limite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq x_n \leq 2/3$, par passage à la limite qui conserve les inégalités larges, $0 \leq \ell \leq 2/3$. De plus, comme $t \mapsto t^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, $0 \leq x_n^2 \leq (2/3)^n$, comme $|2/3| < 1$, $(2/3)^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$. D'après le théorème d'encadrement, $x_n^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, par produit de limites, $9x_n^2 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 9\ell^2$, par somme de limites, $0 = x_n^n + 9x_n^2 - 4 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 + 9\ell^2 - 4$, par unicité de la limite, $0 = 9\ell^2 - 4$, ainsi, $\ell^2 = 4/9$, comme $\ell \geq 0$, $\ell = 2/3$. Ainsi, $x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 2/3$.
14. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « f est n fois dérivable sur $[1; +\infty[$ et il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que pour tout $x \geq 1$, $f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{(9x^2 + x - 4)^{n+1}}$ »

- On pose $Q_0 = 1 \in \mathbb{R}[X]$ de sorte que $f^{(0)} = f : x \mapsto \frac{Q_0(x)}{(9x^2 + x - 4)^{0+1}}$, ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie, ainsi, il existe $Q_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour $x \geq 1$, $f^{(n)}(x) = \frac{Q_n(x)}{(9x^2 + x - 4)^{n+1}}$. Remarquons que $f^{(n)}$ est un quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, ainsi, $f^{(n)}$ est dérivable et f est donc $n + 1$ fois dérivable et en dérivant, on obtient, pour tout $x \geq 1$:

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{Q'_n(x) \times (9x^2 + x - 4)^{n+1} - Q_n(x) \times (n+1) \times (18x + 1) \times (9x^2 + x - 4)^n}{(9x^2 + x - 4)^{2n+2}} \\ &= \frac{Q'_n(x) \times (9x^2 + x - 4) - Q_n(x) \times (n+1) \times (18x + 1)}{(9x^2 + x - 4)^{n+2}} \end{aligned}$$

On pose alors $Q_{n+1} = (9X^2 + X - 4)Q'_n - (n+1)(18X + 1)Q_n$. Or, la dérivée d'un polynôme est un polynôme, et le produit et la combinaison linéaire de polynômes est un polynôme, ainsi, $Q_{n+1} \in \mathbb{R}[X]$. Il s'ensuit que $f^{(n+1)} : x \mapsto \frac{Q_{n+1}(x)}{(9x^2 + x - 4)^{n+2}}$, ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété est vraie.

15. Posons, pour $n \in \mathbb{N}$, l'hypothèse de récurrence $\mathcal{P}(n)$: « $d^\circ Q_n = n$ ». Comme $Q_0 = 1$, $d^\circ Q_0 = 0$ et donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Comme $d^\circ Q_n = n$. En notant c_n le coefficient dominant de Q_n , il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q_n = c_n X^n + R$ avec $d^\circ R \leq n-1$. Alors, en calculant Q_n et en regroupant les termes en X^{n+1} on obtient :

$$\begin{aligned} Q_{n+1} &= (9X^2 + X - 4)(nc_n X^{n-1} + R') - (n+1)(18X+1)(c_n X^n + R) \\ &= 9X^{n+1}(nc_n - 2(n+1)c_n) + (9X^2 + X - 4)R' + nc_n X^{n-1}(X-4) - (n+1)((18X+1)R - c_n X^n) \end{aligned}$$

Or, $9(nc_n - 2(n+1)c_n) = 9c_n(-n-2) \neq 0$, et les autres polynômes dans la somme de Q_{n+1} sont de degrés inférieur strictement à $n+1$. Ainsi, $d^\circ Q_{n+1} = n+1$. Dès lors, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d^\circ Q_n = n$.

Les polynômes de la ferme

- $2X^2 + 10X + 12 = 2(X^2 + 5X + 6) = 2(X+3)(X+2)$.
- Posons $P = (X-3)(X-4)$, alors $d^\circ P = 2$, $P(3) = P(4) = 0$. De plus, $P(5) = 2$.
- Posons $Q = \frac{1}{2}P = \frac{1}{2}(X-3)(X-4)$, alors $Q(3) = Q(4) = 0$ et $Q(5) = 1$.
- Si $P \in \mathbb{R}_2[X]$ a au moins trois racines, alors $d^\circ P \leq 2$, ainsi, P a plus de racines que son degré, d'après le cours $P = 0$.
- On a déjà établi l'existence d'un tel polynôme à la question 3. Soit R un autre polynôme de degré 2 tel que $R(3) = R(4) = 0$ et $R(5) = 1$. Posons alors $S = Q - R$, alors, $d^\circ S \leq \max(d^\circ Q, d^\circ R) = 2$. De plus,

- $S(3) = Q(3) - R(3) = 0 - 0 = 0$
- $S(4) = Q(4) - R(4) = 0 - 0 = 0$
- $S(5) = Q(5) - R(5) = 1 - 1 = 0$

Ainsi, S a au moins trois racines et son degré est majoré par 2. D'après la question 4. Ceci prouve qu'il existe un unique polynôme Q de degré 2 tel que $Q(3) = Q(4) = 0$ et $Q(5) = 1$.

- $L_2 = -(X-3)(X-5)$
 - $L_3 = \frac{1}{2}(X-4)(X-5)$
- Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Posons $Q = P - (P(5)L_1 + P(4)L_2 + P(3)L_3)$. Alors :
 - $Q(3) = P(3) - P(5)L_1(3) - P(4)L_2(3) - P(3)L_3(3) = 0$.
 - $Q(4) = P(4) - P(5)L_1(4) - P(4)L_2(4) - P(3)L_3(4) = 0$,
 - $Q(5) = P(5) - P(5)L_1(5) - P(4)L_2(5) - P(3)L_3(5) = 0$.

Comme le degré d'une somme est inférieure au maximum des degrés, $d^\circ Q \leq 2$ et Q a au moins trois racines, d'après la question 4, $Q = 0$ ainsi, $P = P(5)L_1 + P(4)L_2 + P(3)L_3$.

- L_i est un produit de n polynômes de degré 1, comme le degré du produit est égal à la somme des degrés, on en déduit que $d^\circ L_i = n$.
- Soit $j \in \llbracket 0; n \rrbracket$:

- Si $j = i$, alors $L_i(a_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{a_i - a_k}{a_i - a_k} = 1$
- Si $j \neq i$, alors $L_i(a_j) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k} = \frac{a_j - a_j}{a_i - a_j} \times \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i \\ k \neq j}}^n \frac{a_j - a_k}{a_i - a_k} = 0$

Ainsi, $L_i(a_j) = \delta_{i,j}$

- Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, posons $Q = P - \sum_{k=0}^n P(a_k)L_k$, soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, alors

$$Q(a_i) = P(a_i) - \sum_{k=0}^n P(a_k)L_k(a_i) = P(a_i) - \sum_{k=0}^n P(a_k)\delta_{k,i} = P(a_i) - P(a_i) = 0$$

Ainsi, Q possède au moins $n + 1$ racines, de plus, $d^\circ Q \leq \max(d^\circ P, d^\circ P(a_0)L_0, \dots, d^\circ P(a_n)L_n) \leq n$, ainsi, Q a un nombre de racines strictement supérieur à son degré, donc $Q = 0$. Ceci prouve que $P = \sum_{k=0}^n P(a_k)L_k$

11. Soit $x_0, x_1, \dots, x_{n+1}$ les points qui annulent f rangés par ordre strictement croissant :

$$a \leq x_0 < x_1 < \dots < x_{n+1} \leq b$$

Soit $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$, la fonction f est dérivable sur $]x_i; x_{i+1}[$, continue sur $[x_i; x_{i+1}]$ (car dérivable), $f(x_i) = 0 = f(x_{i+1})$, ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_i; x_{i+1}[$ tel que $f'(y_i) = 0$. De plus,

$$x_0 < y_0 < x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \dots < y_n < x_{n+1}$$

Ainsi, f' s'annule au moins en $n + 1$ points deux à deux distincts les y_0, y_1 jusqu'à y_n .

12. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: «pour tout $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a; b], \mathbb{R})$, si f s'annule $n + 2$ fois sur $[a; b]$, alors $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $[a; b]$.
- Pour $n = 0$. Soit $f \in \mathcal{C}^1([a; b], \mathbb{R})$. Supposons que f s'annule deux fois en α, β avec $a \leq \alpha < \beta \leq b$, alors comme f est continue sur $[\alpha; \beta]$ (car dérivable) dérivable sur $] \alpha; \beta [$ et que $f(\alpha) = 0 = f(\beta)$, d'après le théorème de Rolle, il existe $c \in] \alpha; \beta [$ tel que $f^{(1)}(c) = 0$, ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
 - Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Soit $f \in \mathcal{C}^{n+2}([a; b], \mathbb{R})$. Supposons que f s'annule $n + 3$ fois. D'après la question 11, $g = f'$ s'annule au moins $n + 2$ fois. De plus, g est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, en appliquant $\mathcal{P}(n)$ à g , il en découle que $g^{(n+1)} = f^{(n+2)}$ s'annule au moins une fois. Dès lors, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété demandée est vraie.

13. S'il existe $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$ tel que $x = x_i$, alors $P(x) = P(x_i) = f(x_i) = f(x)$, ainsi, le membre de gauche de l'égalité est nul, de plus, comme $x = x_i$, un des termes dans le produit de droite est nul, ainsi le produit est nul, ainsi, n'importe quel $c \in [a; b]$ vérifie l'égalité demandée.
14. W est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ comme somme de fonctions qui le sont. De plus, pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$,

$$W(x_k) = f(x_k) - P(x_k) - \frac{Q(x_k)}{Q(x)}(f(x) - P(x)) = f(x_k) - P(x_k) - 0 = 0$$

En outre,

$$W(x) = f(x) - P(x) - \frac{Q(x)}{Q(x)}(f(x) - P(x)) = f(x) - P(x) - (f(x) - P(x))$$

comme x n'est pas l'un des x_k , on peut en conclure que W est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et s'annule $n + 2$ fois, en utilisant la question 12, il existe $c \in [a; b]$ tel que $W^{(n+1)}(c) = 0$, ainsi,

$$f^{(n+1)}(c) - P^{(n+1)}(c) - \frac{Q^{(n+1)}(c)}{Q(x)}(f(x) - P(x)) = 0$$

Or, $d^\circ P \leq n$, donc $P^{(n+1)} = 0$, Q est un polynôme unitaire de degré $n + 1$, ainsi, $Q^{(n+1)} = (n + 1)!$ par conséquent, $f^{(n+1)}(c) = \frac{(n + 1)!}{Q(x)}(f(x) - P(x))$, Dès lors, $f(x) - P(x) = \frac{Q(x)}{(n + 1)!}f^{(n+1)}(c)$ ce qui est exactement le résultat demandé.

15. $f^{(n+1)}$ est continue sur $[a; b]$ (car f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$), ainsi, d'après le théorème des bornes atteintes, $f^{(n+1)}$ est majorée et minorée. Ainsi, $f^{(n+1)}$ est bornée.
16. Comme M est un majorant de $|f^{(n+1)}|$, on a que $|f^{(n+1)}(c)| \leq M$, ainsi, en passant à la valeur absolue dans l'égalité démontrée aux questions 13 et 14, il vient que pour tout $x \in [a; b]$:

$$|f(x) - P(x)| = \frac{|Q(x)|}{(n + 1)!}|f^{(n+1)}(c)| \leq \frac{M|Q(x)|}{(n + 1)!}$$