Correction de l'exercice 1. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/aOVugXO7Gpk

Correction de l'exercice 2. 1. La famille (u, v) est libre (deux vecteurs non colinéaires). Cette famille a deux vecteurs et $\mathbb{R}^2$ est de dimension 2, donc (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Comme une application linéaire est entièrement caractérisée par l'image des vecteurs d'une base, on sait qu'il existe une unique application linéaire $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que $f(u) = (2, 1)$, $f(v) = (1, -1)$. S'il existe une application qui correspond aux exigences de la question forcément c'est ce f-là. Donc tout ce qui nous reste à faire, c'est savoir si f convient. Remarquons que $w = 3u - v$, donc

$$f(w) = 3f(u) - f(v) = 3(2, 1) - (1, -1) = (5, 4)$$

Ainsi, si $a = 4$, il existe bien une application f, sinon il n'en existe pas.

Correction de l'exercice 3. 1. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $(x', y') \in \mathbb{R}^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f\left(\lambda(x, y) + (x', y')\right) &= f\left((\lambda x + x', \lambda y + y')\right) \\
&= \left(\lambda x + x' + 2(\lambda y + y'), \lambda x + x' - (\lambda y + y')\right) \\
&= \left(\lambda x + x' + 2\lambda y + 2y', \lambda x + x' - \lambda y - y'\right) \\
&= \lambda(x + 2y, x - y) + (x' + 2y', x' - y') \\
&= \lambda f(x, y) + f(x', y')
\end{aligned}$$

Donc f est un endomorphsime de $\mathbb{R}^2$.

2. $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$, ainsi $f(e_1) = (1, 1)$ et $f(e_2) = (2, -1)$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, supposons $a(1, 1) + b(2, -1) = (0, 0)$, alors $(a + 2b, a - b) = (0, 0)$, donc $a + 2b = 0$ et $a - b = 0$, par différence $3b = 0$. Donc $b = 0$, puis $a = b = 0$, ainsi $(f(e_1), f(e_2))$ est libre.

3. On a $\mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2)) \subset \mathrm{Im}(f)$ (car $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$). De plus, $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$, donc

$$\mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2)) \subset \mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$$

Comme la famille $(f(e_1), f(e_2))$ est libre, $\dim(\mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2))) = 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, ainsi $\mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2)) = \mathbb{R}^2$, ainsi

$$\mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2)) \subset \mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2))$$

Dès lors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(f(e_1), f(e_2))$. Comme $(f(e_1), f(e_2))$ est libre, on en déduit que $(f(e_1), f(e_2))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Correction de l'exercice 4. 1. Soit $(M, M') \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors, par distributivité,

$$f_d(M + \lambda M') = A(M + \lambda M') = AM + \lambda AM' = f_d(M) + \lambda f_d(M')$$

De même

$$f_g(M + \lambda M') = (M + \lambda M')A = MA + \lambda M'A = f_g(M) + \lambda f_g(M')$$

Donc f_g et f_d sont bien des endomorphismes de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors :

$$\begin{aligned}
M \in \mathrm{Ker}(f_d) &\iff f_d(M) = 0 \iff AM = 0 \\
&\iff \begin{pmatrix} a + c & b + d \\ a + c & b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&\iff a + c = b + d = 0 \iff c = -a \quad \text{et} \quad d = -b \\
&\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix} \iff M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&\iff M \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)
\end{aligned}$$

On a donc prouvé que $\mathrm{Ker}(f_d) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\-1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & -1\end{pmatrix}\right)$. De la même façon, on peut prouver que $\mathrm{Ker}(f_g) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & -1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & -1\end{pmatrix}\right)$

3. Calculons $\mathrm{Im}(f_g)$, d'après le cours, on sait que $\mathrm{Im}(f_g) = \mathrm{vect}(f_g(E_{1,1}), f_g(E_{1,2}), f_g(E_{2,1}), f_g(E_{2,2}))$. En effet, on sait, d'après le cours, que $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ est la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc :
$$\mathrm{Im}(f_g) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\right)$$
De même, on trouve que
$$\mathrm{Im}(f_d) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$$

Correction de l'exercice 5. 1. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, alors par somme de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$, $f''-2f+f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soit $(f, g) \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$
$$\begin{array}{rcl}\Phi(\lambda f + g) & = & (\lambda f + g)'' - 2(\lambda f + g)' + \lambda f + g\\ & = & \lambda f'' + g'' - 2\lambda f' - 2g + \lambda f + g\\ & = & \lambda(f'' - 2f' + f) + (g'' - 2g' + g)\\ & = & \lambda\Phi(f) + \Phi(g)\end{array}$$
Ainsi, Φ est linéaire, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$
$$f \in \mathrm{Ker}(\Phi) \iff \Phi(f) = 0 \iff f'' - 2f' + f = 0$$
On reconnaît une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constant. Or son équation caractéristique est $(r^2 - 2r + 1) = (r-1)^2 = 0$. Ainsi, $r = 1$. Donc
$$f \in \mathrm{Ker}(\Phi) \iff \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad f(x) = C_1 \underbrace{\mathrm{e}^x}_{f_1(x)} + C_2 \underbrace{x\mathrm{e}^x}_{f_2(x)} = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$
Où on a posé $f_1 \colon x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $f_2 \colon x \mapsto x\mathrm{e}^x$. Ainsi,
$$f \in \ker(\Phi) \iff \exists (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2 \quad f = C_1 f_1 + C_2 f_2 \iff f \in \mathrm{vect}(f_1, f_2)$$
On a ainsi montré que $\mathrm{Ker}(\Phi) = \mathrm{vect}(f_1, f_2)$ Donc (f_1, f_2) est une famille génératrice du noyau, montrons qu'elle est aussi libre : soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, supposons $af_1 + bf_2 = 0$ (fonction nulle), alors en évaluant en 0, il vient $af_1(0) + bf_2(0) = 0$, donc $a + b0 = 0$, donc $a = 0$. Ainsi $bf_2 = 0$, comme f_2 n'est pas le vecteur nul, $b = 0$. Ainsi, (f_1, f_2) est libre, c'est une base de $\mathrm{Ker}(\Phi)$. D'où $\mathrm{Ker}(\Phi)$ est un espace vectoriel de dimension finie de dimension 2.

Correction de l'exercice 6. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/vkcqEUoG3Bw

Correction de l'exercice 7. 1. Remarquons que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, alors, $d^\circ P(X+1) = d^\circ P \times d^\circ X + 1 = d^\circ P \times 1 = d^\circ P \leqslant n$, de sorte que $P(X+1) \in \mathbb{R}_n[X]$, donc par différence $\Delta(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
$$\begin{array}{rcl}\Delta(\lambda P + Q) & = & (\lambda P + Q)(X+1) - (\lambda P + Q)\\ & = & \lambda P(X+1) + Q(X+1) - \lambda P - Q\\ & = & \lambda(P(X+1) - P) + (Q(X+1) - Q\\ & = & \lambda\Delta(P) + \Delta(Q)\end{array}$$
Ainsi, Δ est un endomorphisme.

2. Soit $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$, alors $P(X+1) = P(X)$, ainsi P est 1-périodique, donc chaque valeur est atteinte une infinité de fois, par exemple $P(0)$ est atteint en 0 en 1, en 2 etc. Posons donc $Q(X) = P(X) - P(0)$, alors comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$, on a $Q(n) = 0$. Donc Q a une infinité de racines, donc Q est le polynôme nul (seul polynôme à avoir strictement plus de racines que son degré). Ainsi, $P(X) = P(0)$. Ainsi, $P = c$ où $c \in \mathbb{R}$, donc $P \in \mathrm{vect}(1)$ (ici 1 est le polynôme constant égale à 1). Donc $\mathrm{Ker}(\Delta) \subset \mathrm{vect}(1)$. Réciproquement soit $P \in \mathrm{vect}(1)$, alors $P = c$ où $c \in \mathbb{R}$, ainsi $\Delta(P) = c - c = 0$, donc $P \in \mathrm{Ker}(\Delta)$. D'où $\mathrm{Ker}(\Delta) = \mathrm{vect}(1)$.
3. Appliquons le théorème du rang à Δ linéaire avec $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension finie, on a

$$\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(\Delta)) + \mathrm{rg}(\Delta)$$

Comme (1) est une base de $\mathrm{Ker}(\Delta)$, on a $\dim(\mathrm{Ker}(\Delta)) = 1$. Ainsi, $\mathrm{rg}(\Delta) = \dim(\mathbb{R}_n[X]) - 1 = \mathbf{n+1} - 1 = n$. De plus, on sait, d'après le cours que comme $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$ (c'est la base canonique on a) $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathrm{vect}(\Delta(1), \Delta(X), \dots, \Delta(X^n))$. De plus, $\Delta(1) = 0$. D'où $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathrm{vect}(\Delta(X), \dots, \Delta(X^n))$. Remarquons que

$$\Delta(X) = (X+1) - X = 1 \qquad \Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1 \qquad \text{et} \qquad \Delta(X^3) = (X+1)^3 - X^3 = 3X^3 + 3X + 1$$

en généralisant, par la formule du binôme de Newton

$$\forall k \in [\![1\,;n]\!] \qquad \Delta(X^k) = (X+1)^k - X^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} X^i - X^k = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k}{i} X^i$$

Ainsi, $d^\circ\Delta(X^k) = k - 1$. Donc $d^\circ\Delta(X) < d^\circ\Delta(X^2) < \dots < \Delta(X^n) = n - 1$. Ainsi, $(\Delta(X), \dots, \Delta(X^n))$ est une famille de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. Dès lors, comme $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ est un espace vectoriel, on a $\mathrm{Im}(\Delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, par égalité des dimension, $\mathrm{Im}(\Delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/PnEVQ8ncSoI

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/hf12P6T4eLQ

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14. Supposons $g \circ f = 0$, montrons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Soit $y \in \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x) = 0(x) = 0_E$. Dès lors $y \in \mathrm{Ker}(g)$ et ce pour tout $y \in \mathrm{Im}(f)$. Donc $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$. Supposons $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Ker}(g)$ et montrons $g \circ f = 0$. Soit $x \in E$, posons $y = f(x) \in \mathrm{Im}(f)$, donc $y \in \mathrm{Ker}(g)$, donc $g(y) = 0_E$, ainsi $g(f(x)) = 0_E$. Par conséquent, $(g \circ f)(x) = 0_E$ et ce pour tout $x \in E$, donc $g \circ f = 0$ (application nulle).

Correction de l'exercice 15. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$, alors $f(x) = 0_E$ et $(f - \mathrm{Id}_E)(x) = 0_E$, soit $f(x) = x$, donc $x = 0_E$, ainsi $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E) \subset \{0_E\}$. Comme l'inclusion réciproque est toujours vérifiée, on peut dire que $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ sont en somme directe.

Correction de l'exercice 16. 1. Soit $x \in E$ non nul, par hypothèse, la famille $(x, f(x))$ est liée. Donc il existe $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $ax + bf(x) = 0_E$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Supposons par l'absurde que $b = 0$, alors $a \neq 0$ et $ax = 0_E$ donc $a = 0$ ou $x = 0_E$ ce qui est impossible dans tous les cas. Ainsi, $b \neq 0$ et $f(x) = -\dfrac{a}{b}x$. En posant $\lambda_x = -\dfrac{a}{b} \in \mathbb{K}$, on a bien $f(x) = \lambda_x x$. Supposons que $f(x) = \mu x$, alors par soustraction, on a $(\lambda_x - \mu)x = 0_E$, comme $x \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda_x - \mu = 0$ soit que $\mu = \lambda_x$. D'où l'existence et l'unicité de λ_x.

2. Soit x et y non nuls telle que (x, y) soit liée, alors $y = \alpha x$ où $\alpha \in \mathbb{K}$ avec $\alpha \neq 0$, composant par f, on a $f(y) = \alpha f(x)$. Soit $\lambda_y y = \alpha\lambda_x x$, donc $\lambda_y \alpha x = \alpha\lambda_x x$, donc $(\lambda_y\alpha - \alpha\lambda_x)x = 0_E$ soit $\alpha(\lambda_y - \lambda_x) = 0$. Comme $\alpha \neq 0$, on a $\lambda_y = \lambda_x$.
3. Soit (x, y) une famille libre de E, posons $z = x+y$, alors $f(z) = f(x+y) = f(x)+f(y)$, soit $\lambda_z z = \lambda_x x+\lambda_y y$. Donc $\lambda_z(x + y) = \lambda_x x + \lambda_y y$. On a donc $(\lambda_x - \lambda_z)x + (\lambda_y - \lambda_z) = 0_E$. Comme la famille (x, y) est libre, on en déduit que $\lambda_x - \lambda_z = 0$ et $\lambda_y - \lambda_z = 0$. Donc que $\lambda_x = \lambda_y$.
4. On a donc montré que $\lambda_x = \lambda_y$ quelque soit $(x, y) \in (E\backslash\{0\})^2$. Notons λ cette valeur commune. On a donc, pour tout $x \in E\backslash\{0\}$, $f(x) = \lambda x$. On remarque qu'on a également $f(0_E) = \lambda 0_E$. Ainsi f est bien une homothétie.
5. Réciproquement si f est une homothétie, alors pour tout $x \in E$, $(x, f(x))$ est une famille liée.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18.

1. Soit $x \in E$ tel que $f^{p-1}(x) \neq 0_E$. Montrer que $(x, f(x), f^2(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est une famille libre. Soit $(\lambda_i)_{0\leqslant i\leqslant p-1} \in \mathbb{K}^p$ tel que

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0 \tag{1}$$

Présentons trois preuves similaires que les $\lambda_i = 0$ (chacune ayant une longueur et un niveau de rédaction différent, la dernière étant la plus courte et rigoureuse) :

- En composant par f^{p-1} l'équation (1), on a

$$\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i f^{i+p-1}(x) = \lambda_0 f^{p-1}(x) + \sum_{i=1}^{p-1} \lambda_i f^{i+p-1}(x) = 0_E$$

Or pour tout $i \in [\![1 ; p-1]\!]$, $i - 1 \geqslant 0$ et donc $f^{i+p-1} = f^p \circ f^{i-1} = 0 \circ f^{i-1} = 0$, on obtient donc $\lambda_0 f^{p-1}(x)+0_E = 0_E$ et comme le vecteur $f^{p-1}(x) \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda_0 = 0$ [1], puis on recommence en composant cette fois-ci par f^{p-2} pour montrer que $\lambda_1 = 0$ puis etc. (court mais pas très rigoureux, le etc. cache une récurrence que l'on a la flemme de faire).

- Effectuons donc cette récurrence finie, posons, pour $k \in [\![0 ; p-1]\!]$

$$\mathscr{P}(k): \qquad «\forall q \in [\![0 ; k]\!] \quad \lambda_q = 0»$$

— **Initialisation :** on a montré que $\lambda_0 = 0$ dans la première méthode donc $\mathscr{P}(0)$ est vérifiée.

— **Hérédité :** soit $k \in [\![0 ; p-2]\!]$. Montrons : $\mathscr{P}(k) \implies \mathscr{P}(k+1)$.

Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie et montrons $\mathscr{P}(k+1)$ vraie. Comme $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$, on a $\sum\limits_{i=k+1}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0$. En composant par f^{p-k-2}, on a

$$\sum_{i=k+1}^{p-1} \lambda_i f^{p-k-2+i}(x) = \lambda_{k+1} f^{p-1}(x) + \sum_{i=k+2}^{p-1} \lambda_i f^{p-k-2+i}(x)$$

Or pour tout $i \in [\![k+2 ; p-1]\!]$, $i - k - 2 \geqslant 0$, ainsi $f^{p-k-2+i}(x) = f^{i-k-2} \circ f^p(x) = 0$, on a donc $\lambda_{k+1} f^{p-1}(x) = 0$, comme $f^{p-1}(x) \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda_{k+1} = 0$. Pour tout $q \in [\![0 ; k+1]\!]$, $\lambda_q = 0$, ainsi $\mathscr{P}(k+1)$ est vérifiée.

— **Conclusion :** pour tout $k \in [\![0 ; p-1]\!]$, $\mathscr{P}(k)$ est vraie.

Ainsi, comme $\mathscr{P}(p-1)$ est vraie, on a pour tout $k \in [\![0 ; p-1]\!]$, $\lambda_k = 0$. On a ainsi montré que la famille $(x, f(x), \dots, f^{p-1}(x))$ est libre.

---

1. Rappelons que si $\lambda u = 0_E$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in E$, alors $\lambda = 0$ ou $u = 0_E$. En revanche, si A et B sont deux matrices telles que $AB = 0$, ON NE PEUT PAS DIRE/ÉCRIRE $A = 0$ OU $B = 0$ SOUS PEINE D'AVOIR DE GROS ENNUIS.

- Supposons que l'un des λ_i soit non nul, posons $i_0 = \min\{i \in [\![0\,; p-1]\!], \lambda_i \neq 0\}$ (le minimum d'un ensemble de $\mathbb{N}$ non vide est toujours défini). Ainsi pour tout $i \in [\![0\,; i_0]\!]$, $\lambda_i = 0$. On a donc

$$\sum_{i=i_0}^{p-1} \lambda_i f^i(x) = 0_E$$

Et comme à la méthode par récurrence, en composant par f^{p-i_0-1}, on prouve que $\lambda_{i_0} = 0$ ce qui est absurde. Ainsi il n'est pas possible de trouver un λ_i non nul. Donc la famille est libre.

2. Comme la famille $(x, f(x), \ldots, f^{p-1}(x))$, a p éléments et est une famille libre, on en déduit que $p \leqslant \dim(E) = n$. Soit $p \leqslant n$.
3. Comme $p \leqslant n$, on peut écrire $f^n = f^{n-p} \circ f^p = 0$. Donc $f^n = 0$.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22. Soit $(f, g) \in F \times G$, remarquons que $f + g \in F + G$, on peut donc définir l'application suivante :

$$\varphi\colon \begin{cases} F \times G \longrightarrow F + G \\ (f, g) \longmapsto f + g \end{cases}$$

Cette application est linéaire (facile à montrer), surjective (par définition de $F+G$). De plus d'après un exercice du TD précédent, $F \times G$ est de dimension finie et vaut $\dim(F) + \dim(G)$, on peut donc appliquer le théorème du rang

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F \times G) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \mathrm{rg}(\varphi) = \dim(\mathrm{Ker}(\varphi)) + \dim(F + G) \tag{2}$$

Il reste à étudier le noyau de φ, soit $(f, g) \in \mathrm{Ker}(\varphi)$, on a donc $f + g = 0$, soit $f = -g$, comme G est un espace vectoriel et que $-g \in G$, on en déduit que $f \in G$ et donc que $f \in G \cap F$. Ainsi les éléments du noyaux sont de la forme $(f, -f)$ où $f \in F \cap G$. Réciproquement si on prend un élément de la forme $(f, -f)$ où $f \in F \cap G$, alors $(f, -f) \in F \times G$ et $(f, -f) \in \mathrm{Ker}\varphi$. Posons l'application suivante :

$$\Psi\colon \begin{cases} F \cap G \longrightarrow \mathrm{Ker}\varphi \\ f \longmapsto (f, -f) \end{cases}$$

Alors, par ce qui précède, cette application est bien définie, on montre également qu'elle est linéaire, injective et surjective. Et donc que Ψ est un isomorphisme ce qui montre que $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et $F \cap G$ ont la même dimension. En reportant dans l'équation (2), on obtient

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(F + G) + \dim(F \cap G)$$

Correction de l'exercice 23.

1. Supposons que $u^2 = 0$ (endomorphisme nul) et $n = \mathrm{rg}(u)$. Alors soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$, ainsi $u(y) = u(u(x)) = u^2(x) = 0_E$. Ainsi, $y \in \mathrm{Ker}(u)$, on a donc montré que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$. De plus, comme E est de dimension finie, et u linéaire, le théorème du rang, fournit
$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = 2n = 2\dim(\mathrm{Im}(u))$$
Ainsi, en retranchant $\dim(\mathrm{Im}(u))$, on obtient $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u))$. Ainsi, on a deux espaces vectoriels de même dimension avec l'un inclus dans l'autre, d'après le cours sur la dimension finie, on en conclut que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u)$.

2. Supposons que $\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. Alors le théorème du rang affirme que

$$2n = \dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = \dim(\mathrm{Im}(u)) + \dim(\mathrm{Im}(u)) = 2\dim(\mathrm{Im}(u))$$

Ainsi, $n = \mathrm{rg}(u)$. De plus, soit $x \in E$, alors $u(x) \in \mathrm{Im}(u) = \mathrm{Ker}(u)$. D'où $u(x) \in \mathrm{Ker}(u)$, ainsi, $u(u(x)) = 0_E$. D'où $(u \circ u)(x) = 0_E$ et ce pour tout $x \in E$, donc $u \circ u = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25. 1. Notons $F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$. Comme noyaux d'applications linéaires, F et G sont des sous-espaces vectoriels de E. Soit $x \in E$, le but est de montrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in F \times G$ tel que $x = a + b$. Procédons par analyse-synthèse :

- Analyse : supposons que $x = a + b$ avec $a \in F$ et $b \in G$. Comme $a \in F = \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$, on a $0_E = (f - 2\mathrm{Id}_E)(a) = f(a) - 2\mathrm{Id}_E(a) = f(a) - 2a$. Ainsi, $f(a) = 2a$. De même, on prouve que $f(b) = 3b$. Ainsi, $f(x) = f(a) + f(b) = 2a + 3b$. Ainsi, on a $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & a+b \\ f(x) & = & 2a+3b \end{array}\right.$. En résolvant ce système, on trouve que $a = 3x - f(x)$ et $b = f(x) - 2x$.
- Synthèse : posons $a = 3x - f(x)$ et $b = f(x) - 2x$. Alors
  — $a + b = (3x - f(x)) + (f(x) - 2x) = x$.
  — Montrons que $a \in F$.

$$\begin{array}{rcl}
(f - 2\mathrm{Id}_E)(a) & = & (f - 2\mathrm{Id}_E)(3x - f(x)) \\
& = & f(3x - f(x)) - 2\mathrm{Id}_E(3x - f(x)) \\
& = & 3f(x) - f(f(x)) - 2(3x - f(x)) \\
& = & -(f \circ f)(x) + 5f(x) - 6x \\
& = & -(f \circ f - 5f + 6\mathrm{Id}_E)(x) \\
& = & -0_{\mathscr{L}(E)}(x) \\
& = & 0_E
\end{array}$$

  Ainsi, $a \in \mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
  — On démontre de même que $b \in \mathrm{Ker}(f - 3\mathrm{Id}_E)$.

Ainsi, la synthèse, nous montre donc qu'on a trouvé $a \in F$ et $b \in G$ tel que $x = a + b$. L'analyse nous montre que ce a et ce b sont uniques.

2.

3.

Correction de l'exercice 26.

Correction de l'exercice 27.

Correction de l'exercice 28.

Correction de l'exercice 29. Considérons l'application $\mathrm{tr}\colon M \mapsto \mathrm{tr}(M)$, d'après le cours cette application est linéaire, non nulle $\mathrm{tr}(I_n) = n \neq 0$. Ainsi, $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) \subset \mathbb{K}$ donc $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{tr})) \leqslant 1$ mais comme $n \in \mathrm{Im}(\mathrm{tr})$, $\dim(\mathrm{tr}(I_n)) \neq 1$, ainsi $\dim(\mathrm{Im}(\mathrm{tr})) = 1$. D'après le théorème du rang $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) = n^2 - 1$.

Correction de l'exercice 30.

Correction de l'exercice 31.

Correction de l'exercice 32. Posons $A = E_{i,j}$ et $B = E_{j,k}$, alors $\varphi(E_{i,k}) = \varphi(AB) = \varphi(BA) = \delta_{k,i}\varphi(E_{j,j})$. On en déduit que $\varphi(E_{i,i}) = \varphi(E_{j,j})$ pour tout i et j et que $\varphi(E_{i,j}) = 0$ si $i \neq j$. En notant $\alpha = \varphi(E_{1,1})$, on en déduit que φ et $\alpha\mathrm{tr}$ coïncident sur la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Comme ce sont des applications linéaires, on en déduit que $\varphi = \alpha\mathrm{tr}$.

Correction de l'exercice 33.

Correction de l'exercice 34. La base canonique de $\mathbb{C}_4[X]$ est $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4)$ et celle de $\mathbb{C}_3[X]$ est $\mathscr{C} = (1, X, X^2, X^3)$. Ainsi,

- $\Phi_1(1) = 0 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 + 0 \times X^3$
- $\Phi_1(X) = 1 = 1 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 + 0 \times X^3$
- $\Phi_1(X^2) = 2X = 0 \times 1 + 2 \times X + 0 \times X^2 + 0 \times X^3$
- $\Phi_1(X^3) = 3X^2 = 0 \times 1 + 0 \times X + 3 \times X^2 + 0 \times X^3$
- $\Phi_1(X^4) = 4X^3 = 0 \times 1 + 0 \times X + 0 \times X^2 + 4X^3$

Par conséquent,

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\Phi_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. La base canonique de $\mathbb{R}$ est $\mathscr{C} = (1)$. Ainsi,

- $\Phi_2(1) = 1 = 1 \times 1$
- $\Phi_2(X) = \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \times 1$
- $\Phi_2(X^2) = \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} \times 1$
- $\vdots$
- $\Phi_2(X^i) = \dfrac{1}{i+1}$
- $\vdots$
- $\Phi_2(X^n) = \dfrac{1}{n+1}$

Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\Phi_2) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{i+1} & \dots & \frac{1}{n+1} \end{pmatrix}$$

Correction de l'exercice 35.

1. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Notons $u = (x, y, z)$, alors $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Notons $v = h(x, y, z)$, et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(v)$, alors d'après le cours
$$Y = AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -z \\ -x \end{pmatrix}$$
Ainsi, $v = h((x, y, z)) = ye_1 + (-z)e_2 + (-x)e_3 = (y, -z, -x)$. Dès lors $h((x, y, z)) = (y, -z, -x)$.
2. En regardant la première colonne, on obtient $h(e_1) = 0 \times e_1 + 0 \times e_2 + (-1) \times e_3 = -e_3$. Donc $h^2(e_1) = h(-e_3) = -h(e_3) = e_2$ (en effet, en regardant la dernière colonne $h(e_3) = -e_2$. De même, $h^2(e_2) = -e_3$ et $h^3(e_3) = -e_1$
3. $h^3(e_1) = h(h^2(e_1)) = h(e_2) = e_1$. De même $h^3(e_2) = e_2$ et $h^3(e_3) = e_3$.
4. h^3 et $\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ coïncident sur une base de $\mathbb{R}^3$ donc sont égales, ainsi $h^3 = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
5. En calculant A^3, on obtient $A^3 = I_3$ (à faire). Ainsi, comme $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h)$, on a $A^3 = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(h^3) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3})$. Comme on sait d'après le cours, que $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est un isomorphisme entre $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, cette application est injective, on en déduit que $h = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$.

Correction de l'exercice 36. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/Cm3bJSaGiGI

Correction de l'exercice 37. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/WjGFh1kCvgw

Correction de l'exercice 38. 1. Comme $F = \text{vect}(f_1, f_2, f_3)$, (f_1, f_2, f_3) est une famille génératrice de F. Montrons la liberté. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, supposons $af_1 + bf_2 + cf_3 = 0_E$ (fonction nulle). Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $af_1(x) + bf_2(x) + cf_3(x) = 0_E$. D'où,

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{2x} + c\mathrm{e}^{3x} = 0$$

En divisant par $\mathrm{e}^{3x} \neq 0$, on a $a\mathrm{e}^{-2x} + b\mathrm{e}^{-x} + c = 0$. En faisant tendre $x \to +\infty$, on obtient $0 + 0 + c = 0$. Ainsi, $c = 0$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a\mathrm{e}^{x} + b\mathrm{e}^{2x} = 0$, en divisant par $\mathrm{e}^{2x} \neq 0$, il vient, $a\mathrm{e}^{-x} + b = 0$. À nouveau en faisant tendre $x \to +\infty$, il vient $0 + b = 0$. Donc $b = 0$. Par suite, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $a\mathrm{e}^{x} = 0$. Avec $x = 0$, on a $a = 0$. D'où $a = b = c = 0$. Ainsi, (f_1, f_2, f_3) est une famille libre. Ainsi, $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de F. Dès lors, $\dim(F) = |\mathscr{B}| = 3$.

2. Soit $(f, g) \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda f + g) &= (\lambda f + g)'' + (\lambda f + g)' + 2(\lambda f + g) = \lambda f'' + g'' + \lambda f' + g' + 2\lambda f + 2g \\ &= \lambda(f'' + f' + 2f) + (g'' + g' + 2f) = \lambda\varphi(f) + \varphi(g) \end{aligned}$$

Ainsi, φ est linéaire. De plus, comme $f \in F$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, tel que $f = af_1 + bf_2 + cf_3$. Ainsi, $\varphi(f) = a\varphi(f_1) + b\varphi(f_2) + c\varphi(f_3)$. Or
- $\varphi(f_1) = f_1'' + f_1' + 2f_1 = 4f_1$
- $\varphi(f_2) = f_2'' + f_2' + 2f_2 = 8f_2$
- $\varphi(f_3) = f_3'' + f_3' + 2f_3 = 14f_3$

Ainsi, $\varphi(f) = 4af_1 + 8bf_2 + 14cf_3 \in F$. Dès lors, $\varphi(f) \in F$, comme φ est linéaire, on en déduit que $\varphi \in \mathscr{L}(F)$.

3. Notons $\mathscr{B} = (f_1, f_2, f_3)$, alors d'après les calculs précédents
- $\varphi(f_1) = 4f_1 = 4f_1 + 0f_2 + 0f_3$
- $\varphi(f_2) = 8f_2 = 0f_1 + 8f_2 + 0f_3$
- $\varphi(f_3) = 14f_3 = 0f_1 + 0f_2 + 14f_3$

$$A = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 14 \end{pmatrix}$$

4. En tant que matrice diagonale, dont les coefficients diagonaux sont non nuls, A est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$, d'après le cours, on en déduit que φ est un automorphisme et que

$$\text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1}) = A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{14} \end{pmatrix}$$

5. Posons $g = f_2 - f_3$. Le but de la question est de trouver $f \in F$ tel que $\varphi(f) = g$. Comme φ est bijective, on pose donc $f = \varphi^{-1}(g)$. Posons $X = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$. Comme $g = 0f_1 + 1f_2 + (-1)f_3$, $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. En notant $Y = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et en appliquant le cours, on a $Y = \text{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi^{-1})X$. Par produit matriciel, $Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{8} \\ -\frac{1}{14} \end{pmatrix}$.

Ainsi, $f = 0f_1 + \frac{1}{8}f_2 - \frac{1}{14}f_3$. Et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) + f'(x) + 2f(x) = g(x) = f_2(x) - f_3(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{3x}$$

Correction de l'exercice 39. Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$, supposons que $a(0,0,0,1) + b(0,0,1,1) + c(0,1,1,1) + d(1,1,1,1) = 0_{\mathbb{R}^4}$. On a donc $(d, c+d, d+c+b, d+c+b+a) = (0,0,0,0)$. Par identification $d = c+d = b+c+d = a+b+c+d = 0$. Donc $a=b=c=d=0$. Dès lors $\mathscr{B}'$ est libre, or $|\mathscr{B}'| = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Dès lors, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$. Comme $x = 1e_2 + 2e_2 + 3e_3 + 4e_4$ avec $\mathscr{B} = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On a $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$. Notons $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ la matrice de changement de base de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on a alors

$$P = \begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&1\\0&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

D'après le cours, on a $X = PX'$. Il existe alors deux méthodes :

- Soit on inverse P (par la méthode de Gauss-Jordan), et on trouve que $X' = P^{-1}X$ et on n'a plus qu'à faire un produit matriciel.
- Soit on note $X' = \begin{pmatrix}x\\y\\z\\t\end{pmatrix}$ et on résout le système linéaire $PX' = \begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}$. Après résolution (vérifiez les calculs), on trouve $x=y=z=t=1$. Donc $X' = \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Correction de l'exercice 40. 1. On sait que $\phi \colon f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est un isomorphisme de $\mathscr{L}(E,F)$ dans $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, donc il existe un unique $f \in \mathscr{L}(E,F)$ tel que $A = \phi(f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$

2. Remarquons que $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(A) = r$. Notons S un supplémentaire de $\mathrm{Ker}(f)$ dans E (qui existe car E est de dimension finie : c'est un résultat du chapitre EV de dim finie). Alors d'après la preuve du théorème du rang, $\tilde{f} \colon \begin{cases} S \longrightarrow \mathrm{Im}(u) \\ x \longmapsto u(x)\end{cases}$ est un isomorphisme et $\dim(S) = r$. Notons alors, $\mathscr{B}_S = (s_1, s_2, \ldots, s_r)$ une base de S, $\mathscr{B}_K = (e_{r+1}, \ldots, e_n)$ une base de $\mathrm{Ker}(u)$. Ainsi, $\mathscr{B}' = \mathscr{B}_S \cup \mathscr{B}_K = (s_1, s_2, \ldots, s_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ est une base (adaptée) de E. Comme $\mathscr{B}_S$ est libre, et $\tilde{f}$ injective, on en déduit que $\tilde{f}(\mathscr{B}_S) = f(\mathscr{B}_S)$ est libre. D'après le théorème de la base incomplète, on peut alors compléter $f(\mathscr{B}_S) = (f(s_1), \ldots, f(s_r))$ en une base de F notée $\mathscr{C}' = (f(s_1)\ldots, f(s_r), f_{r+1}, \ldots, f_p)$. Cherchons $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$, pour cela, on sait qu'il suffit de décomposer les images par f des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{C}'$:
   - Fixons $j \leqslant r$, décomposons $f(s_j)$ dans la base $\mathscr{C}'$, comme $f(s_j) \in \mathscr{C}'$, on peut donc le décomposer facilement dans $\mathscr{C}'$:

     $$f(s_j) = 0\times f(s_1) + 0\times f(s_2) + \ldots + 0\times f(s_{j-1}) + 1\times f(s_j) + 0\times f(s_{j+1}) + \ldots 0\times f(s_r) + 0\times f_{r+1} + \ldots + 0\times f_p$$

   - Fixons $j \geqslant r+1$, $e_j \in \mathrm{Ker}(f)$, donc $f(e_j) = 0_F$, ainsi les coordonnées de $f(e_j)$ dans $\mathscr{C}'$ sont toutes nulles. Dès lors, la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$ est nulle.
     Ainsi, la j-ième colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f)$ n'a que des 0 sauf un 1 à la j-ième ligne si $j \leqslant r$.

   Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{C}'}(f) = J_r$.

3. D'après la formule de changement de base, $A = QJ_rP^{-1}$, avec $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ et $Q = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{C}'}$.

4. En utilisant la transposée, $A^\top = (P^{-1})^\top (J_r)^\top Q^\top$, comme $(P^{-1})^\top$ et $Q^\top$ sont inversibles, $\mathrm{rg}(A^\top) = \mathrm{rg}((J_r)^\top)$. Or, la matrice $(J_r)^\top$ possède $p-r$ colonnes nulles et r colonnes non nulles, on remarque que ces r colonnes non nulles sont linéairement indépendantes, ainsi $\mathrm{rg}((J_r)^\top) = r = \mathrm{rg}(A)$

Correction de l'exercice 41. Corrigé sur Youtube : https://youtu.be/50e41m4bx00

Correction de l'exercice 42.

Correction de l'exercice 43.

Correction de l'exercice 44.

Correction de l'exercice 45.

Correction de l'exercice 46.

Correction de l'exercice 47. Supposons qu'il existe $X \in \operatorname{Ker}(A)$ et X non nul. $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Définissions un ensemble $E = \{|x_i| \mid i \in [\![1 \,; n]\!]\}$, E est un ensemble fini donc admet un maximum. Soit $i_0 \in [\![1 \,; n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max(E)$. Comme $AX = 0$, on a, en particulier,

$$\sum_{k=1}^{n} A_{i_0,k} x_k = 0$$

Ainsi, en isolant le terme pour $k = i_0$, on a

$$A_{i_0,i_0} \times x_{i_0} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} A_{i_0,k} x_k$$

Passons au module, par inégalité triangulaire, on a

$$|A_{i_0,i_0}| \times |x_{i_0}| = |A_{i_0,i_0} x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |A_{i_0,k}| \times |x_k| \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |A_{i_0,k}| \times |x_{i_0}|$$

En simplifiant par $|x_{i_0}|$ qui est non nul (car on a supposé $X \neq 0$), on obtient une contradiction avec le fait que $|a_{i_0,i_0}| > \sum\limits_{\substack{k=1 \\ k \neq i_0}}^{n} |A_{i,k}|$. Ainsi $X = 0_{n,1}$ et $\operatorname{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$. Dès lors, la matrice A est inversible.

Correction de l'exercice 48. Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$ et $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3)$ celle de $\mathbb{R}^3$.

Alors

- $f(1) = (1, 1, 1) = 1f_1 + 1f_2 + 1f_3$
- $f(X) = (1, 2, 3) = 1f_1 + 2f_2 + 3f_3$
- $f(X^2) = (1, 4, 9) = 1f_1 + 4f_2 + 9f_3$
- $f(X^3) = (1, 8, 27) = 1f_1 + 8f_2 + 27f_3$

On obtient donc

$$A = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \end{pmatrix}$$

Pour calculer le rang, échelonnons la matrice :

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(f) = \operatorname{rg}(A) & \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 & 26 \end{pmatrix} \\ & \underset{L_3 \leftarrow L_3 - 2L2}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} \\ & = 3 \end{aligned}$$

Remarque : comme $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$, on en déduit que f est surjective. Par le théorème du rang, on a $\dim(\mathbb{R}_3[X]) = \dim(\operatorname{Ker}(f)) + \operatorname{rg}(f)$. Soit $\dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$.

Correction de l'exercice 49.

Correction de l'exercice 50. 1. La fonction f est bien à valeur dans E, de plus, la linéarité se montre sans problème.

2. On rappelle que la base canonique de E est $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ [2]. De plus, $f(E_{1,1}) = E_{1,1} + E_{2,1}$, $f(E_{1,2}) = E_{1,2} + E_{2,2}$, $f(E_{2,1}) = E_{1,1} + E_{2,1}$ et $f(E_{1,2}) = E_{1,2} + E_{2,2}$. Ainsi

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, en effectuant le produit AM, que $M \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $a + c = b + d = 0$ si et seulement si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \end{pmatrix}$, si et seulement si $M \in \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$. Donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$ (ces deux matrices sont indépendantes).

On a donc un noyau de dimension 2, par le théorème du rang ($f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$ et $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie, $\dim(\mathscr{M}_2(\mathbb{R})) = 4$), l'image de f est de dimension 2, il suffit donc de trouver deux matrices dans l'image qui soient indépendantes. Considérons

$$f(E_{1,1}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(E_{1,2}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

Correction de l'exercice 51. 1. Comme $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{vect}\,(C_1, C_2, \ldots, C_n)$, $\dim(\mathrm{vect}\,(C_1, C_2, \ldots, C_n)) = 1$, où on a noté C_j la j-ième colonne de M. Considérons $\mathscr{B} = (C)$ une base de $\mathrm{Im}(C)$, $C \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K}) = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$.

Ainsi, pour tout $j \in [\![1 ; n]\!]$, il existe $\ell_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j = \ell_j C$. Ainsi, pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $m_{i,j} = \ell_j c_i$. Notons alors $L = (\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Remarquons que le produit $C \times L$ est possible et que $CL \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ et effectuons ce produit : à la i-ième ligne, j-ième colonne, par la formule du produit matriciel, $c_i \ell_j = m_{i,j}$. On a donc montré que $M = CL$.

2. Si $q \geqslant 2$, alors en prenant $A = E_{1,1} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $B = E_{2,1} \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{R})$, alors $AB = \delta_{1,2} E_{1,1} = 0_{p,n}$ tandis que A et B sont non nuls. Si jamais $q = 1$, la question 3 va prouver que AB est nécessairement non nul.

3. Si $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_p \end{pmatrix}$ et $L = \begin{pmatrix} \ell_1 & \ldots & \ell_n \end{pmatrix}$. Comme L est non nul, il existe $j \in [\![1 ; n]\!]$, tel que $\ell_j \neq 0$. De même, il existe $i \in [\![1 ; n]\!]$, tel que $c_i \neq 0$. Alors $\ell_j c_i \neq 0$ et c'est le coefficient de CL à la i-ième ligne, j-ième colonne. Ainsi, CL est non nul. De plus, $\mathrm{rg}(CL) \leqslant \mathrm{rg}(C) \leqslant 1$ [3]. Comme CL est non nul, on a $\mathrm{rg}(CL) > 0$. Dès lors, $\mathrm{rg}(CL) = 1$.

Correction de l'exercice 52.

Correction de l'exercice 53. Comme $AB - A - B = 0_n$, on a $AB - A - B + I_n = I_n$ ce qui se factorise en $(A - I_n)(B - I_n) = I_n$. Ceci suffit à garantir que $A - I_n$ est inversible d'inverse, $B - I_n$, ainsi $(B - I_n)(A - I_n) = I_n$, en développant, on a $BA - A - B + I_n = I_n$, ainsi, $BA = A + B = AB$.

2. On pourrait écrire les éléments de la base de $\mathscr{B}$ dans un autre ordre.

3. En effet, le rang d'un produit de deux matrices est inférieur ou égal au rang de chacune des deux matrices, et le rang d'une matrice est inférieure ou égale à son nombre de lignes et à son nombre de colonne.

Correction de l'exercice 54. 1. $\mathrm{tr}(I_n) = n$

2. Tout d'abord, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{tr}(M) \in \mathbb{R}$. Donc $\mathrm{tr}\colon \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$. Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. On pose $C = \lambda A + B = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$. Ainsi, $c_{i,j} = \lambda a_{i,j} + b_{i,j}$, ainsi

$$\mathrm{tr}(\lambda A + B) = \mathrm{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda a_{i,i} + b_{i,i} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$$

Ainsi, $\mathrm{tr} \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \mathbb{R})$, tr est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Montrons que $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$, déjà $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) \subset \mathbb{R}$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda = \mathrm{tr}(\lambda E_{1,1})$ avec ($E_{i,j}$ matrice élémentaire). Donc $\lambda \in \mathrm{Im}(\mathrm{tr})$, ainsi $\mathbb{R} \subset \mathrm{Im}(\mathrm{tr})$, $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$. Une base de $\mathrm{Im}(f)$ est (1), $\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(f)) = 1$. En appliquant le théorème du rang à tr, on a $\dim(\mathscr{M}_n(\mathbb{K})) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) + \mathrm{rg}(f)$. Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})) = n^2 - 1$. Soit $M \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} m_{i,i} = 0$. Donc $m_{n,n} = -\sum\limits_{i=1}^{n-1} m_{i,i}$. Or,

$$\begin{aligned}
M &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}E_{i,j}\\
&= \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}E_{i,i} + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} m_{i,j}E_{i,j}\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}E_{i,i} + \left(-\sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}\right)E_{n,n} + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} m_{i,j}E_{i,j}\\
&= \sum_{i=1}^{n-1} m_{i,i}(E_{i,i} - E_{n,n}) + \sum_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} m_{i,j}E_{i,j}
\end{aligned}$$

Ainsi, si on note $\mathscr{G} = (E_{i,i} - E_{n,n})_{1\leqslant i\leqslant n-1} \cup (E_{i,j})_{i\neq j}$. On obtient une famille de $n^2 - 1$ matrices, et $M \in \mathrm{vect}(\mathscr{G})$, on a donc $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) \subset \mathrm{vect}(\mathscr{G})$. En remarquant que toutes les matrices de $\mathscr{G}$ sont de trace nulle, ainsi $\mathscr{G} \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Comme, $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ est un espace vectoriel, on obtient $\mathrm{vect}(\mathscr{G}) \subset \mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \mathrm{vect}(\mathscr{G})$. Dès lors, $\mathscr{G}$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$ et possède $(n-1) + (n^2 - n) = \dim(\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}))$ éléments donc, $\mathscr{G}$ est une base de $\mathrm{Ker}(\mathrm{tr})$.

4. On note $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On pose $C = AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $D = BA = (d_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$. Alors pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $c_{i,j} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j}$ et $d_{i,j} = \sum\limits_{p=1}^{n} b_{i,p}a_{p,j}$. Ainsi,

$$\mathrm{tr}(C) = \sum_{i=1}^{n} c_{i,i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,i} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{tr}(D) = \sum_{k=1}^{n} d_{k,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{k,i}a_{i,k}$$

En échangeant les deux sommes, on constate que $\mathrm{tr}(D) = \mathrm{tr}(C)$. Dès lors, $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

5. Soit $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux bases de $\mathbb{R}^n$. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ et $A' = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ et $P = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ vers $\mathscr{B}'$. Alors d'après la formule de changement de base pour un endomorphisme : $A = PA'P^{-1}$ et

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(PA'P^{-1}) = \mathrm{tr}((PA')(P^{-1})) \underset{3}{=} \mathrm{tr}((P^{-1})(PA')) = \mathrm{tr}((P^{-1}P)A') = \mathrm{tr}(A')$$

Ainsi, quelque soit la base choisie, la trace de la matrice de u est toujours la même. On pose $\mathrm{tr}(u)$ cette valeur.

6. Notons $A = \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}$. Soit $x \in \mathbb{R}$,

$$P(x) = \begin{vmatrix} x-a & -b\\ -c & x-d\end{vmatrix} = (x-a)(x-d)-(-b)(-c) = (x-a)(x-d)-bc = x^2-(a+d)x+ad-bc = x^2-\mathrm{tr}(A)x+\det(A)$$

Ainsi, $P = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A)$

7. Posons $A = B = I_n$, alors $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(I_n) = n$. Tandis que $\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(I_n)^2 = n^2$. Or si $n \neq 1$, $n^2 \neq n$. Donc la propriété est fausse pour $A = B = I_n$, si $n \geqslant 2$. Si $n = 1$ (autrement dit, on a des matrices de taille $(1,1)$, ce qui n'est pas très intéressant), alors $A = (a)$, $B = (b)$, et $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(ab) = ab = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)$.

Correction de l'exercice 55. 1. Soit $(P,Q) \in (\mathbb{R}_n[X])^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors par linéarité de la dérivation :

$$\begin{aligned}\phi(\lambda P + Q) &= X(\lambda P + Q)'' + (1-X)(\lambda P + Q)' = X(\lambda P'' + Q'') + (1-X)(\lambda P' + Q')\\ &= \lambda(XP'' + (1-X)P') + (XQ'' + (1-X)Q') = \lambda\phi(P) + \phi(Q)\end{aligned}$$

De plus,

$$d^\circ(1-X)P' = d^\circ(1-X) + d^\circ P' \leqslant 1 + d^\circ P - 1 \leqslant n \quad \text{et} \quad d^\circ XP'' = d^\circ X + d^\circ P'' \leqslant 1 + d^\circ P - 2 \leqslant n-1$$

Ceci prouve que $XP'' \in \mathbb{R}_n[X]$ et $(1-X)P' \in \mathbb{R}_n[X]$, comme $\mathbb{R}_n[X]$ est un espace vectoriel, $\phi(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Notons $\mathscr{B} = (1, X, \cdots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi)$. Alors, on sait que la j-ième colonne de A contient les coordonnées de l'image de φ du j-ième vecteur de $\mathscr{B}$. C'est-à-dire $\varphi(X^{j-1})$. Remarquons que $\varphi(1) = 0$, ainsi la première colonne de A contient que des 0. Fixons $j \in [\![2\,; n+1]\!]$:

$$\begin{aligned}\varphi(X^{j-1}) &= X(X^{j-1})'' + (1-X)(X^{j-1})' = X \times ((j-1)(j-2)X^{j-3}) + (1-X)(j-1)X^{j-2}\\ &= -(j-1)X^{j-1} + (j-1)X^{j-2}(j-2+1) = -(j-1)X^{j-1} + (j-1)^2X^{j-2}\end{aligned}$$

Ainsi, $a_{j,j} = -(j-1)$ et $a_{j-1,j} = (j-1)^2$ et si $i \in [\![0\,; n]\!] \backslash \{j, j-1\}$, $a_{i,j} = 0$. Ainsi :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & 4 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & n^2\\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$

3. D'après le cours, on sait que $\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{vect}(\phi(1), \phi(X), \phi(X^2), \dots, \phi(X^n))$. De plus, $\phi(1) = 0$, donc

$$\mathrm{Im}(\phi) = \mathrm{vect}(\phi(X), \phi(X^2), \dots, \phi(X^n))$$

Or d'après la question précédente, $d^\circ\phi(X^i) = i$ pour tout $i \in [\![1\,; n]\!]$, ainsi, $(\phi(X), \phi(X^2), \dots, \phi(X^n))$ est une famille de polynômes non nuls dont les degrés sont deux à deux distincts, donc c'est une famille libre, comme c'est aussi une famille génératrice de $\mathrm{Im}(\phi)$ on en conclut que c'est une base de $\mathrm{Im}(\phi)$. Dès lors $\mathrm{rg}(\phi) = \dim(\mathrm{Im}(\phi)) = n$.

4. Soit $j \in [\![0\,; n]\!]$, posons

$$Q_j = (\phi + k\mathrm{Id}_E)(X^j) = \phi(X^j) + kX^j = -jX^j + (j-1)^2X^{j-1} + kX^j = (k-j)X^j + (j-1)^2X^{j-1}$$

Si $j \neq k$, alors $d^\circ Q_j = j$, par contre, si $j = k$, alors $d^\circ Q_k = k-1$. Ainsi, alors $(Q_0, Q_1, \dots, Q_{k-1})$ est une famille libre de polynôme de $\mathbb{R}_{k-1}[X]$ (car constituée de polynômes non nuls de degré deux à deux distincts), comme cette famille a k éléments et que $\dim(\mathbb{R}_{k-1}[X]) = k$, $(Q_0, Q_1, \dots, Q_{k-1})$ est une base de $\mathbb{R}_{k-1}$, donc $Q_k \in \mathrm{vect}\,(Q_0, Q_1, \dots, Q_{k-1})$. Dès lors,

$$\mathrm{Im}(\phi + k\mathrm{Id}_E) = \mathrm{vect}\,(Q_0, Q_1, \dots, Q_n) = \mathrm{vect}(Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-1}, Q_{k+1}, \dots, Q_n)$$

À nouveau, la famille de polynômes non nuls de degré deux à deux distincts $(Q_0, Q_1, Q_2, \dots, Q_{k-1}, Q_{k+1}, \dots, Q_n)$ est libre, donc c'est une base de l'image, ainsi $\dim(\mathrm{Im}(\phi + k\mathrm{Id}_E)) = n$. Par le théorème du rang, $\dim(\ker(\phi + k\mathrm{Id}_E)) = 1$ prouvant que $\phi + k\mathrm{Id}_E$ n'est pas injective (son noyau n'est pas réduit au vecteur nul).

5. Comme $\dim(\ker(\phi + k\mathrm{Id}_E)) = 1$, il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que (P) soit une base de $\ker(\phi + k\mathrm{Id}_E)$. P n'est pas le polynôme nul, car il est dans une famille libre, ainsi, en notant c son coefficient dominant, et en notant que $\ker(\phi + k\mathrm{Id}_E)$ est un espace vectoriel, $P_k = \dfrac{1}{c}P \in \ker(\phi + k\mathrm{Id}_E)$. ainsi $\phi(P_k) + kP_k = 0$, dès lors $\phi(P_k) = -kP_k$.
   Soit Q un polynôme unitaire tel que $\phi(Q) = -kQ$, alors $(\phi + k\mathrm{Id}_E)(Q) = 0$, donc $Q \in \ker(\phi + k\mathrm{Id}_E)$. Par conséquent, P_k et Q sont deux polynômes appartenant au même espace vectoriel de dimension 1, dès lors, P_k et Q sont colinéaires, comme ils sont non nuls, on peut en déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $Q = \lambda P_k$ comme P_k est unitaire, le coefficient dominant de Q est λ, mais Q est unitaire, donc $\lambda = 1$. Ceci provue que $Q = P_k$ d'où l'unicité.
6. Notons $d = d^\circ P_k$, comme P_k est unitaire de degré d, ${P_k}'$ est de degré $d-1$ et de coefficient dominant d, ainsi $(1-X)P'$ est de degré d de coefficient dominant $-d$, quand on rajoute XP'' de degré $d-1$, on obtient que $\phi(P_k)$ est un polynôme de degré d et de coefficient dominant $-d$. Or $\phi(P_k) = -kP_k$ a pour coefficient dominant $-k$, dès lors $-d = -k$ et $d^\circ P_k = d = k$.
7.
   - On sait que P_0 est un polynôme unitaire de degré 0, donc $P_0 = 1$.
   - On sait que P_1 est un polynôme unitaire de degré 1, donc $P_1 = X + a$. De plus,
   $$\phi(P_1) = \phi(X) + a\phi(1) = 1 - X + 0 = -P_1 = -X - a$$
   . Par identification $-a = 1$ et $P_1 = X - 1$.
   - En utilisant la linéaire de ϕ :
   $$\phi(X^2 - 4X + 2) = \phi(X^2) - 4\phi(X) + \phi(2) = (-2X^2 + 4X) - 4(1 - X) + 0 = -2(X^2 - 4X + 2)$$
   Ainsi, $Q = X^2 - 4X + 2$ est un polynôme unitaire tel que $\phi(Q) = -2Q$, par unicité de P_2, $P_2 = X^2 - 4X + 2$.
8. Comme, pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $d^\circ P_k = k$, $\mathscr{B}'$ est une famille de polynômes non nuls de $\mathbb{R}_n[X]$ dont les degrés sont deux à deux distincts, ainsi $\mathscr{B}'$ est une famille libre de $\mathbb{R}_n[X]$. De plus, $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1 = |\mathscr{B}'|$. Ainsi, $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
9. Pour tout $k \in [\![0\,; n]\!]$, $\phi(P_k) = -kP_k$, ainsi $\phi(P_k)$ se décompose dans la base $\mathscr{B}'$ avec toutes les coordonnées qui sont nulles sauf celle devant P_k qui vaut $-k$. Ainsi,
   $$D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}$$
10. En notant $P = P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'}$ la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$, on sait que $A = PDP^{-1}$.

Correction de l'exercice 56. 1. Soit $\mathscr{B}_F = (e_1, e_2, \dots, e_p)$ une base de F que l'on complète en une base de E, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$.

$$\forall x \in E \quad \exists!\,(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \qquad x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$$

Soit $i \in [\![1\,; n]\!]$, on note $\varphi_i \colon x \mapsto \lambda_i$. De sorte que pour tout $x \in E$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$. On remarque que $\varphi_i \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ et que φ_i est non nulle ($\varphi_i(e_i) = 1$). Montrons que $F = \bigcap_{i=p+1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$:

- Soit $x \in F$, alors $x = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = \sum\limits_{i=1}^{p} \lambda_i x_i + \sum\limits_{i=p+1}^{n} 0 x_i$. Par unicité de la décomposition dans la base $\mathscr{B}$, on en déduit que $\varphi_i(x) = 0$ si $i \geqslant p+1$. Donc $x \in \mathrm{Ker}(\varphi_i)$ pour tout $i \geqslant p+1$. Ainsi $x \in \bigcap_{i=p+1}^{n} \mathrm{Ker}(\varphi_i)$.

- Soit $x \in \bigcap_{i=p+1}^n \mathrm{Ker}(\varphi_i)$. Alors pour tout $i \geqslant p+1$, $\varphi_i(x) = 0$. Donc $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)e_i = \sum_{i=1}^{p} \varphi_i(x)e_i + 0_E \in F$

En notant $H_i = \mathrm{Ker}(\varphi_i)$, H_i est un hyperplan de E (car φ_i est une forme linéaire non nulle) et $F = \bigcap_{i=p+1}^n H_i$ est l'intersection de $n-p$ hyperplans.

2. Soit $\varphi_i \in \mathscr{L}(E, \mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Ker}(\varphi_i) = H_i$ pour tout $i \in [\![1\,; p]\!]$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E, on note $L_i = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\varphi_i) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{K})$. On note :

$$M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$$

De plus, soit $x \in E$, on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, alors $x \in \bigcap_{i=1}^p H_i$ si et seulement si $\varphi_i(x) = 0$ pour tout $i \in [\![1\,; p]\!]$ si et seulement si $L_i X = 0$ pour tout $i \in [\![1\,; p]\!]$ si et seulement si $MX = 0$. Ainsi la dimension de $\bigcap_{i=1}^p H_i$ est égale à la dimension de $\mathrm{Ker}(M)$. D'après le théorème du rang[4] :

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{p} H_i\right) = \dim(\mathrm{Ker}(M)) = n - \mathrm{Im}(M) \geqslant n - p$$

Correction de l'exercice 57. 1.

2.

3. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors

$$\begin{aligned}
M \in F &\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad M = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad M = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \quad M = aI_3 + bA + cA^2 \\
&\iff M \in \mathrm{vect}(I_3, A, A^2)
\end{aligned}$$

Ainsi, $F = \mathrm{vect}(I_3, A, A^2)$. Donc (I_3, A, A^2) est une famille génératrice de F. Montrons qu'elle est libre. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons $aI_3 + bA + cA^2 = 0_3$. Alors

$$\begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Par identification, sur la première ligne, $a+c = b = c = 0$. D'où $a = b = c = 0$. Ainsi, (I_3, A, A^2) est une famille libre. Donc (I_3, A, A^2) est une base de F. Dès lors $\dim(F) = 3$.

4. Soient $(M, N) \in F^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$f(\lambda M + M') = A(\lambda M + M') = \lambda AM + AM' = \lambda f(M) + f(M')$$

De plus, il existe $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI + bA + cA^2$, alors

$$f(M) = f(aI_3 + bA + cA^2) = af(I_3) + bf(A) + cf(A^2) = aA + bA^2 + cA^3 = (a+2c)A + bA^2 \in \mathrm{vect}(I_3, A, A^2) = F$$

Ainsi, pour tout $M \in F$, $f(M) \in F$ et f est linéaire. Dès lors, $f \in \mathscr{L}(F)$.

4. On remarque que par cette méthode, on peut même calculer la dimension de l'intersection, en calculant précisément le rang et non en le majorant.

5.
6.
7.
8.
9. Soit $M \in F$, il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI_3 + bA + cA^2$.

$$\begin{aligned} f(M) = I_3 + A^2 &\iff f(aI_3 + bA + cA^2) = I_3 + A^2 \\ &\iff af(I_3) + bf(A) + cf(A^2) = I_3 + A^2 \\ &\iff aA + bA^2 + 2cA = I_3 + A^2 \\ &\iff (-1) \cdot I_3 + (a+2c) \cdot A + (b-1) \cdot A^2 = 0_3 \end{aligned}$$

Or comme (I_3, A, A^2) est libre cela implique que $-1 = 0$, $a + 2c = 0$ et $b - 1 = 0$. Mais comme $-1 \neq 0$, on en déduit qu'il n'y a pas de solutions à cette équation. L'ensemble des solutions est donc $S = \varnothing$.

10. Soit $M \in F$, il existe un unique triplet $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $M = aI_3 + bA + cA^2$.

$$\begin{aligned} f(M) = A + A^2 &\iff f(aI_3 + bA + cA^2) = A + A^2 \\ &\iff af(I_3) + bf(A) + cf(A^2) = A + A^2 \\ &\iff aA + bA^2 + 2cA = I_3 + A^2 \\ &\iff (0) \cdot I_3 + (a+2c-1) \cdot A + (b-1) \cdot A^2 = 0_3 \\ &\iff \left\{ \begin{array}{rcl} 0 &=& 0 \\ a+2c-1 &=& 0 \\ b-1 &=& 0 \end{array} \right. \\ &\iff a = 1-2c \quad \text{et} \quad b = 1 \\ &\iff M = (1-2c)I_3 + bA + cA^2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est [5] $S = \left\{ (1-2c)I_3 + A + cA^2, \quad c \in \mathbb{R} \right\}$. On remarque que ce n'est pas un espace vectoriel, en effet, la matrice nulle ne vérifie pas $f(0_3) = A + A^2$.

5. Je tiens à remercier très chaleureusement Cyriaque D. pour m'avoir signalé une coquille à cet endroit.