Indication pour l'exercice 1.

Indication pour l'exercice 2. Pour la question 2, on pourra partir du fait que si f existe alors $f(u) = (2, 1)$ et $f(v) = (1, -1)$, et le cours indique exactement combien de fonctions comme cela existent.

Indication pour l'exercice 3.

Indication pour l'exercice 4.

Indication pour l'exercice 5. Le noyau est donné par une équation différentielle qu'il faut impérativement savoir résoudre.

Indication pour l'exercice 6. Une application linéaire est entièrement caractérisée par les images des vecteurs d'une base de l'espace de départ.

Indication pour l'exercice 7. On prouvera que le noyau de Δ est formé des polynômes constants. Pour l'image, on pourra d'abord appliquer le théorème du rang.

Indication pour l'exercice 8. Étudier seulement l'injectivité, car on est en dimension finie, ainsi, on peut récupérer la surjectivité à peu de frais.

Indication pour l'exercice 9.

Indication pour l'exercice 10. Par un argument de dimension, n'étudier que l'injectivité. Pour trouver l'isomorphisme réciproque. On pourra commencer par essayer de calculer $\Phi^{-1}(e_i)$ où e_i est le i-ième vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, c'est ainsi un polynôme P tel que $\Phi(P) = e_i$, ainsi, $P(a_j) = 0$ si $j \neq i$ et $P(a_i) = 1$.

Indication pour l'exercice 11.

Indication pour l'exercice 12.

Indication pour l'exercice 13. On pourra poser une certaine application linéaire qui sera (avec un peu de chance) bijective.

Indication pour l'exercice 14.

Indication pour l'exercice 15.

Indication pour l'exercice 16.

1. Écrire la définition de liée
2. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$
3. Montrer que $\lambda_x = \lambda_y$, on pourra utiliser $x + y$
4.
5.

Indication pour l'exercice 17. Si f n'est pas une homothétie, par contraposée, il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x))$ soit libre. Complétez cette famille en une base, puis définir $g \in \mathscr{L}(E)$ (à l'aide de la base), de façon à ce que f et g ne commutent pas.

Indication pour l'exercice 18. Considérer une combinaison linéaire nulle et appliquer à f cette relation autant de fois que nécessaire.

Indication pour l'exercice 19. Poser $\Phi \begin{cases} F \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ f \longmapsto (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_n)) \end{cases}$ et essayer de montrer que Φ est un isomorphisme.

Indication pour l'exercice 20.

Indication pour l'exercice 21.

Indication pour l'exercice 22. Montrer que l'application est linéaire et surjective puis montrer que $F \cap G$ et $\{(f, f),\text{ où } f \in F \cap G\}$ ont même dimension. Le théorème du rang doit vous permettre de donner une nouvelle preuve de la formule de Grassmann.

Indication pour l'exercice 23. Penser au théorème du rang.

Indication pour l'exercice 24. Appliquer le théorème du rang à $u_{|F}$.

Indication pour l'exercice 25. Analyse-Synthèse.

Indication pour l'exercice 26.

Indication pour l'exercice 27.

Indication pour l'exercice 28.

Indication pour l'exercice 29.

Indication pour l'exercice 30. Regardez bien, ce résultat n'est pas le même que dans l'exercice 28.

Indication pour l'exercice 31.

Indication pour l'exercice 32. Considérer A et B des matrices élémentaires.

Indication pour l'exercice 33.

Indication pour l'exercice 34.

Indication pour l'exercice 35.

Indication pour l'exercice 36.

Indication pour l'exercice 37.

Indication pour l'exercice 38.

Indication pour l'exercice 39.

Indication pour l'exercice 40.

1. L'application $f \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est un isomorphisme dans les bons espaces.
2. Si $\mathscr{B}' = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ base de E et $r = \dim(S)$, poser $f_i = f(e_i)$ pour $i \in [\![1 ; r]\!]$, montrer que $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ est libre et complétez en une base $\mathscr{C}'$ de F.
3. La matrice d'une composée est égale au produit des matrices.
4. Transposez la relation obtenue et déterminer le rang de J_r.

Indication pour l'exercice 41.

Indication pour l'exercice 42. A est la matrice d'une certaine fonction $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Au brouillon réfléchir à ce que cela implique sur e_1' et e_2' si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f_A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 43. A est la matrice d'une certaine fonction $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Au brouillon réfléchir à ce que cela implique sur e_1' et e_2' si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f_A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Indication pour l'exercice 44.

Indication pour l'exercice 45.

Indication pour l'exercice 46.

1. Utiliser le déterminant
2. Calculer $A - \lambda I_2$, trouver son rang, en déduire la dimension du noyau, puis en trouvant une relation sur les colonnes, trouver un vecteur du noyau non nul.

Indication pour l'exercice 47. Considérer $X \in \mathrm{Ker}(A)$. Supposer que X non nul, et considérer l'indice où le module du coefficient de X est maximal.

Indication pour l'exercice 48.

Indication pour l'exercice 49.

1. Trouver ce que pourrait être la bijection réciproque de φ et tester si c'est le cas.
2. Newton
3. Se demander ce que ${A_3}^{-1}$ et ${A_3}^5$ représentent par rapport à f.

Indication pour l'exercice 50.

Indication pour l'exercice 51. Si M est de rang 1 que peut-on dire des colonnes de la matrice M ?

Indication pour l'exercice 52.

Indication pour l'exercice 53.

Indication pour l'exercice 54.

Indication pour l'exercice 55.

Indication pour l'exercice 56.

Indication pour l'exercice 57.