Chapitre 8

Diagonalisation

Remarque : les matrices diagonales sont très pratiques :

- Le produit de deux matrices diagonales est diagonale et il suffit de multiplier les éléments diagonaux terme à terme.
- Pour calculer une matrice diagonale à la puissance $p \in \mathbb{N}$, il suffit de mettre chaque coefficient diagonal à la puissance p.
- Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, et on calcule son inverse en inversant chacun de ses coefficients diagonaux.

Malheureusement, toutes les matrices ne sont pas diagonales. Parmi celles qui ne le sont pas, on souhaiterait qu'elles soient semblables à une matrice diagonale. En effet, si $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale, alors :

- Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = PD^pP^{-1}$ (formule pas au programme mais se montre par récurrence)
- La matrice A est inversible si et seulement si D l'est, dans ce cas $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$.

Objectifs :

- Étant donné un endomorphisme u, déterminer s'il est possible de trouver une base $\mathscr{B}'$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ soit diagonale
- Étant donnée une matrice A, déterminer s'il est possible de trouver P une matrice inversible et D une matrice diagonale telle que $A = PDP^{-1}$.

Pré-requis :

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Espace vectoriel
- Applications linéaires
- Polynômes

Table des matières

1 Éléments propres d'un endomorphisme 2

2 Diagonalisation d'un endomorphisme, d'une matrice 4

3 Méthodes 5

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ vaut $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E)$, et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1 Éléments propres d'un endomorphisme

Définition des éléments propres d'un endomorphisme

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u si $\exists x \in E \backslash \{0_E\} \mid u(x) = \lambda x$
- On dit que $x \in E$ est un **vecteur propre** de u si $\exists \lambda \in \mathbb{K} \mid u(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad x \neq 0_E$
- Le **spectre** de u est l'ensemble des valeurs propres de u : $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists x \in E \backslash \{0_E\} \text{ et } u(x) = \lambda x\}$
- L'**espace propre** de u associé à $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ est $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ (SEV de E)

Exemple 1. On considère $f : (x, y) \mapsto (x + y, 2y)$, alors $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Démontrer que $(1, 1)$ est un vecteur propre de f. Démontrer que 1 est une valeur propre de f et déterminer $E_1(f)$.

Remarques 1.
- Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ est constitué des vecteurs propres associés à λ et de 0_E.
- Étant donné un vecteur propre x, il existe un unique $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$ et on dit que x est un vecteur propre associé à λ. En revanche, si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, il existe une infinité de vecteurs propres associés à λ.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ ssi $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif ssi $\dim(\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)) \geqslant 1$ ssi $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas bijectif.

Définition des éléments propres d'une matrice

- On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de A si $\exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \backslash \{0_{n,1}\} \mid AX = \lambda X$
- On dit que $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est un **vecteur propre** de A si $\exists \lambda \in \mathbb{K} \mid AX = \lambda X$ et $X \neq 0_{n,1}$
- Le **spectre** de A est l'ensemble de ses valeurs propres :$\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \backslash \{0_{n,1}\} \text{ et } AX = \lambda X\}$
- L'**espace propre** de A associé à $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ est $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n)$ (SEV de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$)

Remarques 2.
- Si $AX = \lambda X$ et $X \neq 0_{n,1}$, on dit que X est un vecteur propre associé à la valeur propre λ.
- Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ ssi $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\}$ ssi $A - I_n$ n'est pas inversible ssi $\mathrm{rg}(A - I_n) < n$.
- Soient $x \in E$ et $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x)$, si $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, alors $\mathrm{Sp}(u) = \mathrm{Sp}(A)$ et $x \in E_\lambda(u)$ ssi $X \in E_\lambda(A)$.
- u est un automorphisme de E ssi $0 \notin \mathrm{Sp}(u)$ et A est inversible ssi $0 \notin \mathrm{Sp}(A)$.

Comment trouver le spectre de $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$?

Si $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ ssi $A - \lambda I_2 \notin \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ ssi $\det(A - \lambda I_2) = 0$. C'est une équation du second degré, d'inconnue λ, que l'on résout.

Comment trouver le spectre de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$?

On échelonne la matrice $A - \lambda I_n$ pour déterminer les λ tel que $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$.

Exemples 2. Trouver les éléments propres de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, de $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 10 & 10 & 3 \end{pmatrix}$.

Que peut-on en déduire pour A et B ?

Solution des exemples 2 :

Exemples 3.
1.
2.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\operatorname{rg}(C-\lambda I_3) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda & 2 \\ 6-\lambda & 4 & -2 \\ 10 & 10 & 3-\lambda \end{pmatrix} \underset{\substack{L_2 \leftarrow 2L_2+(\lambda-6)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-5L_2}}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & -\lambda^2+10\lambda-16 & 2\lambda-16 \\ 0 & 5\lambda-10 & -\lambda-7 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & -(\lambda-8)(\lambda-2) & 2(\lambda-8) \\ 0 & 5(\lambda-2) & -\lambda-7 \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow 5L_2+(\lambda-8)L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 10(\lambda-8)+(\lambda-8)(-\lambda-7) \\ 0 & 5(\lambda-2) & -\lambda-7 \end{pmatrix}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 5(\lambda-2) & -\lambda-7 \\ 0 & 0 & (\lambda-8)(3-\lambda) \end{pmatrix}$$

On peut en conclure que si $\lambda \neq \{2,8,3\}$, alors $\operatorname{rg}(C-\lambda I_3)=3$ (on a obtenu une matrice triangulaire supérieure avec des termes diagonaux non nuls), de plus, $\operatorname{rg}(C-2I_3)=\operatorname{rg}(C-8I_3)=\operatorname{rg}(C-3I_3)=2$ (à chaque fois il y a deux lignes indépendantes et une ligne nulle). Donc, $\operatorname{Sp}(C)=\{2,3,8\}$. Il y a trois espaces propres à calculer, proposons trois méthodes différentes (mais vous êtes libres d'appliquer la même pour chaque valeur propre) :

- Pour $\lambda=2$, par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{Ker}(C-2I_3))+\operatorname{rg}(C-2I_3)=3$, donc $\dim(E_2(C))=1$. Or, $C-2I_3=\begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 10 & 10 & 1 \end{pmatrix}$, on remarque que $C_1=C_2$ donc $1C_1+(-1)C_2+0C_3$, on vérifie alors que $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker}(C-2I_3)$, comme $\mathscr{B}_2=\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre (un seul vecteur non nul) de cardinal 1, on peut en conclure que $\mathscr{B}_2$ est une base de $E_2(C)$.
- Pour $\lambda=3$, soit $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors $X \in \operatorname{Ker}(C-3I_3)$ ssi $X \in \operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 2 & 4-\lambda & 2 \\ 0 & 5(\lambda-2) & -\lambda-7 \\ 0 & 0 & (\lambda-8)(3-\lambda) \end{pmatrix}$ (en effet, comme nous avons échelonné en faisant que des opérations sur les lignes, en résolvant le système $(C-3I_3)X=0$, on va effectuer les mêmes opérations sur les lignes et donc tomber sur le noyau de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$). Ainsi, $X \in E_3(C)$ ssi $\begin{cases} 2x & +y & +2z & =0 \\ & 5y & -10z & =0 \\ & & 0 & =0 \end{cases}$ ssi $x=-2z$ et $y=2z$ ssi $X=\begin{pmatrix} -2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix}$ ssi $X \in \operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi, on peut en conclure que $E_3(C)=\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et que $\mathscr{B}_3=\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_3(C)$.
- Pour $\lambda=8$, $X \in \operatorname{Ker}(C-8I_3)$ ssi $\begin{cases} -8x+4y-2z=0 \\ 2x-4x+2z=0 \\ 10x+10y-5z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1+4L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3-5L_2}}{\iff} \begin{cases} -12y+6z=0 \\ 2x-4x+2z=0 \\ 30y-15z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x-2y+z=0 \\ z=2y \end{cases} \iff x=0$ et $z=2y \iff X=\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2y \end{pmatrix}$. Ainsi, $E_8(C)=\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$. Ainsi, $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_8(C)$.

Théorème n° 1 : famille libre de vecteurs propres de valeurs propres deux à deux distinctes

1. Une famille de vecteurs propres de u associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
2. u admet au plus n valeurs propres.
3. La juxtaposition de bases de $E_\lambda(u)$, pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(u)$, est une famille libre de E.
4. $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) \leqslant n$

1. Une famille de vecteurs propres de A associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
2. A admet au plus n valeurs propres.
3. La juxtaposition de bases de $E_\lambda(A)$, pour $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, est une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
4. $\sum\limits_{\lambda \in \operatorname{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) \leqslant n$

Démonstration du théorème n° 1 : Démontrons ce théorème pour une matrice A :

- Notons $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ des valeurs propres (deux à deux distinctes) de A. Soit $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ une famille de vecteurs propres, tels que tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, Y_i un vecteur propre de A pour la valeur propre λ_i. Soit $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^p$. Supposons que $\sum\limits_{k=1}^{p} \mu_k Y_k = 0$. Soit $j \in \mathbb{N}$, en multipliant par A^j, on obtient $\sum\limits_{i=1}^{p} \mu_k A^j Y_i = 0$. Or $AY_i = \lambda_i Y_i$, par une récurrence, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $A^j Y_i = {\lambda_i}^j Y_i$. D'où $\sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i {\lambda_i}^j Y_i = 0$. Soit $P = \sum\limits_{j=0}^{d} a_j X^j \in \mathbb{K}[X]$. Alors, $\sum\limits_{i=1}^{p} \mu_i a_j {\lambda_i}^k Y_i = 0$. Sommes toutes ces équations pour $k \in [\![0\,;d]\!]$, on obtient,

$$0=\sum_{k=0}^{d}\sum_{i=1}^{p}a_k\mu_i{\lambda_i}^kY_i=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{k=0}^{d}a_k\mu_i{\lambda_i}^k\right)Y_i=\sum_{i=1}^{p}\mu_iP(\lambda_i)Y_i \tag{1}$$

Soit $k\in[\![1\,;p]\!]$. Posons $P=\prod_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{p}\frac{X-\lambda_j}{\lambda_k-\lambda_j}$. De sorte que pour tout $i\in[\![1\,;p]\!]$, $P(\lambda_i)=\delta_{i,k}$. Dans (1), on obtient donc $\mu_k1Y_k+0=0$. Comme, Y_k est un vecteur propre, $Y_k\neq 0$ et donc $\mu_k=0$ et ce pour tout $k\in[\![1\,;p]\!]$. La famille $(Y_1,Y_2,\dots,Y_n)$ est libre.

- Supposons qu'il y ait au moins $n+1$ valeurs propres, alors d'après le point précédent, on obtient une famille libre ayant $n+1$ vecteurs, or $\dim(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}))=n$ ce qui est absurde (une famille libre a un nombre d'éléments majoré par la dimension).
- Considérons $\mathrm{Sp}(A)=\{\lambda_1,\dots,\lambda_r\}$ avec les λ_i deux à deux distincts et $\mathscr{B}_i=(X_1^i,...X_{d_i}^i)$ une base de $E_{\lambda_i}(A)$. On cherche à montrer que $\mathscr{B}=(X_1^1,...,X_{d_1}^1,e_1^2,\dots,e_{d_2}^2,...,e_1^r,...,e_{d_r}^r)$ est libre. Soit $(\lambda_j^i)_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant j\leqslant d_i}}\in\mathbb{K}^{\sum_{i=1}^{r}d_i}$. Supposons que $\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{d_i}\lambda_j^ie_j^i=0$. Notons $x_i=\sum_{j=1}^{d_i}\lambda_j^ie_j^i\in E_{\lambda_i}(A)$. De sorte que $\sum_{i=1}^{r}x_i=0_E$. Supposons qu'il existe $i\in[\![1\,;r]\!]$ tel que $x_i\neq 0$. En notant $I=\{i\in[\![1\,;r]\!]\mid x_i\neq 0\}\}$, on obtient $\sum_{i\in I}^{1}\times x_i=0_E$, comme $x_i\neq 0$, en utilisant le point 1, on obtient que la famille des x_i pour $i\in I$ est libre ce qui contredruit $\sum_{i\in I}^{1}\times x_i=0_E$, ainsi, pour tout $x\in[\![1\,;r]\!]$, $x_i=0$. Par liberté de $\mathscr{B}_i$, on en déduit que tous les λ_j^i sont nuls, ainsi, $\mathscr{B}$ est libre.

■

Proposition n° 1 : le spectre d'une matrice triangulaire est donné par sa diagonale
Le spectre d'une matrice triangulaire (voire diagonale) est égal à l'ensemble de ses coefficients diagonaux.

2 Diagonalisation d'un endomorphisme, d'une matrice

Définition de la diagonalisabilité

On dit que u est **diagonalisable** s'il existe $\mathscr{B}'$ une base de E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ soit diagonale.

On dit que A est **diagonalisable** s'il existe $P\in GL_n(\mathbb{K})$ et D diagonale telle que $A=PDP^{-1}$.

Remarques 3.
- Soit $\mathscr{B}$ une base de E, u est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ l'est.
- Diagonaliser A c'est trouver P inversible et D diagonale telles que $A=PDP^{-1}$.
- Diagonaliser u c'est trouver $\mathscr{B}'$ telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$ soit diagonale.

Théorème n° 2 : CNS de diagonalisabilité par les espaces propres/vecteurs propres

On a équivalence entre :

1. L'endomorphisme u est diagonalisable.
2. E admet une base de vecteurs propres de u.
3. $\dim(E)=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(u)}\dim(E_\lambda(u))$

On a équivalence entre :

1. La matrice A est diagonalisable.
2. $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ admet une base de vecteurs propres de A.
3. $n=\sum_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}\dim(E_\lambda(A))$

Comment diagonaliser une matrice dans la pratique ?

Calculer le rang $A-\lambda I_n$ en l'échelonnant. En déduire $\mathrm{Sp}(A)$, puis une base de chaque espace propre. Si la somme des dimensions des espaces propres vaut n, alors A est diagonalisable. On a $A=PDP^{-1}$ avec P la matrice dont la j-ième colonne est le j-ième élément d'une base de vecteurs propres de A et D est la matrice diagonale contenant les valeurs propres (avec le même ordre que celui des vecteurs propres dans P).

Exemples 4. Le cas échéant, diagonaliser les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 8 & -7 & 8 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Remarques 4.
- En connaissant $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$, par le théorème du rang, $\dim(E_\lambda(A)) = n - \mathrm{rg}(A - \lambda I_n)$.
- Si u est diagonalisable et a une seule valeur propre λ, alors nécessairement $u = \lambda \mathrm{Id}_E$.
- Si A est diagonalisable et a une seule valeur propre λ, alors nécessairement $A = \lambda I_n$.

Proposition n° 2 : avoir n valeurs propres distinctes suffit à la diagonalisabilié

Si $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(u)) = n$, alors u est diagonalisable. Si $\mathrm{Card}(\mathrm{Sp}(A)) = n$, alors A est diagonalisable.

Exemples 5.
1. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est elle diagonalisable ? Si oui diagonalisez-la.
2. Soit $f\colon P \mapsto P + 5P''(0)X^2 + 4P'(1)X + P(2)$ où $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_2[X])$, f est-il diagonalisable ? Si oui diagonalisez-le.

Remarque 5. Dans le cadre de la propositon 2, les espaces propres sont forcément de dimension 1.

Péril imminent c'est une condition suffisante mais non nécessaire

I_n n'a pas n valeurs propres, B de l'exemple 4 n'a pas 3 valeurs propres, mais I_n et B sont diagonalisables.

Astuce : matrices symétriques réelles

Si M est symétrique et à coefficients réels, alors M est diagonalisable. *(sera revu plus tard et complété)*

Exemples de matrices symétriques

- La matrice $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ avec que des 1 est diagonalisable, la diagonaliser.
- Est-ce que $M = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$ est diagonalisable ?

3 Méthodes

Comment déterminer l'expression d'une suite récurrente matricielle ?

Si $(X_n)_n$ est une suite à valeurs dans $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$, alors (par récurrence) $X_n = A^n X_0$. Si A est diagonalisable, on sait calculer A^n et donc X_n.

Comment résoudre un système d'équations différentielles linéaires ?

Si on a l'équation différentielle $X' = AX$ avec $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ à résoudre avec $A = PDP^{-1}$ diagonalisable, alors $X' = AX$ ssi $X' = PDP^{-1}X$ ssi $P^{-1}X' = DP^{-1}X$ ssi $Y' = DY$ avec $Y = P^{-1}X$. Or, si D est diagonale, $Y' = DY$ se résout facilement.

Comment déterminer les matrices qui commutent avec A ?

Si $A = PDP^{-1}$, alors B commute avec A ssi $P^{-1}BP$ commute avec D. Or, déterminer les matrices qui commutent avec D est plus facile si D est diagonale.

Commet obtenir de potentielles valeurs propres avec un polynôme annulateur (hors programme) ?

Soit $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et R l'ensemble des racines de P.

Si $\sum_{k=0}^{d} a_k u^k = 0_{\mathscr{L}(E)}$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset R$.

Si $\sum_{k=0}^{d} a_k M^k = 0_n$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset M$.