



## Chapitre 8

# Diagonalisation

**Remarque :** les matrices diagonales sont très pratiques :

- Le produit de deux matrices diagonales est diagonale et il suffit de multiplier les éléments diagonaux terme à terme.
- Pour calculer une matrice diagonale à la puissance  $p \in \mathbb{N}$ , il suffit de mettre chaque coefficient diagonal à la puissance  $p$ .
- Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, et on calcule son inverse en inversant chacun de ses coefficients diagonaux.

Malheureusement, toutes les matrices ne sont pas diagonales. Parmi celles qui ne le sont pas, on souhaiterait qu'elles soient semblables à une matrice diagonale. En effet, si  $A = PDP^{-1}$  avec  $P$  inversible et  $D$  diagonale, alors :

- Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $A^p = PD^pP^{-1}$  (formule pas au programme mais se montre par récurrence)
- La matrice  $A$  est inversible si et seulement si  $D$  l'est, dans ce cas  $A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}$ .

**Objectifs :**

- Étant donné un endomorphisme  $u$ , déterminer s'il est possible de trouver une base  $\mathcal{B}'$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$  soit diagonale
- Étant donnée une matrice  $A$ , déterminer s'il est possible de trouver  $P$  une matrice inversible et  $D$  une matrice diagonale telle que  $A = PDP^{-1}$ .

**Pré-requis :**

- Calcul matriciel et systèmes linéaires
- Espace vectoriel
- Applications linéaires
- Polynômes

## Table des matières

1 Éléments propres d'un endomorphisme	2
2 Diagonalisation d'un endomorphisme, d'une matrice	3
3 Méthodes	4

Dans tout ce chapitre,  $\mathbb{K}$  vaut  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ,  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$ , et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

## 1 Éléments propres d'un endomorphisme



### Définition des éléments propres d'un endomorphisme

- On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $u$  si
- On dit que  $x \in E$  est un **vecteur propre** de  $u$  si
- Le **spectre** de  $u$  est l'ensemble des valeurs propres de  $u$  :
- L'**espace propre** de  $u$  associé à  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  est

$$\begin{aligned}\exists x \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\} \mid u(x) = \lambda x \\ \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid u(x) = \lambda x \quad \text{et} \quad x \neq \mathbf{0}_E \\ \text{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists x \in E \setminus \{\mathbf{0}_E\} \text{ et } u(x) = \lambda x\} \\ E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E) \quad (\text{SEV de } E)\end{aligned}$$

**Exemple 1.** On considère  $f: (x, y) \mapsto (x + y, 2y)$ , alors  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ . Démontrer que  $(1, 1)$  est un vecteur propre de  $f$ . Démontrer que 1 est une valeur propre de  $f$  et déterminer  $E_1(f)$ .

**Remarques 1.** • Étant donné un vecteur propre  $x$ , il existe un unique  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $u(x) = \lambda x$  et on dit que  $x$  est un vecteur propre associé à  $\lambda$ . En revanche, si  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , il existe une infinité de vecteurs propres associés à  $\lambda$ .

- Soit  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ ,  $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)$  est constitué des vecteurs propres associés à  $\lambda$  et de  $0_E$ .
- Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(u)$  ssi  $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas injectif ssi  $\dim(\text{Ker}(u - \lambda \text{Id}_E)) \geq 1$  ssi  $u - \lambda \text{Id}_E$  n'est pas bijectif.



### Définition des éléments propres d'une matrice

- On dit que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est une **valeur propre** de  $A$  si
- On dit que  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  est un **vecteur propre** de  $A$  si
- Le **spectre** de  $A$  est l'ensemble de ses valeurs propres :  $\text{Sp}(A) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{\mathbf{0}_{n,1}\} \text{ et } AX = \lambda X\}$
- L'**espace propre** de  $A$  associé à  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  est

$$\begin{aligned}\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{\mathbf{0}_{n,1}\} \mid AX = \lambda X \\ \exists \lambda \in \mathbb{K} \mid AX = \lambda X \quad \text{et} \quad X \neq \mathbf{0}_{n,1} \\ E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n) \quad (\text{SEV de } \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}))\end{aligned}$$

**Remarques 2.** • Si  $AX = \lambda X$  et  $X \neq \mathbf{0}_{n,1}$ , on dit que  $X$  est un vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda$ .

- Soit  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  ssi  $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{\mathbf{0}_{n,1}\}$  ssi  $A - \lambda I_n$  n'est pas inversible ssi  $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$ .
- Soient  $x \in E$  et  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ , si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ , alors  $\text{Sp}(u) = \text{Sp}(A)$  et  $x \in E_\lambda(u)$  ssi  $X \in E_\lambda(A)$ .
- $u$  est un automorphisme de  $E$  ssi  $0 \notin \text{Sp}(u)$  et  $A$  est inversible ssi  $0 \notin \text{Sp}(A)$ .



### Comment trouver le spectre de $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ ?

Si  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Alors,  $\lambda \in \text{Sp}(A)$  ssi  $A - \lambda I_2 \notin \text{GL}_2(\mathbb{K})$  ssi  $\det(A - \lambda I_2) = 0$ . C'est une équation du second degré, d'inconnue  $\lambda$ , que l'on résout.



### Comment trouver le spectre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ?

On échelonne la matrice  $A - \lambda I_n$  pour déterminer les  $\lambda$  tel que  $\text{rg}(A - \lambda I_n) < n$ .

**Exemples 2.** Trouver les éléments propres de  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ , de  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$  et  $C = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 10 & 10 & 3 \end{pmatrix}$ .

Que peut-on en déduire pour  $A$  et  $B$  ?



### Théorème n° 1 : famille libre de vecteurs propres de valeurs propres deux à deux distinctes

1. Une famille de vecteurs propres de  $u$  associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
2.  $u$  admet au plus  $n$  valeurs propres.
3. La juxtaposition de bases de  $E_\lambda(u)$ , pour  $\lambda \in \text{Sp}(u)$ , est une famille libre de  $E$ .
4.  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) \leq n$
1. Une famille de vecteurs propres de  $A$  associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est libre.
2.  $A$  admet au plus  $n$  valeurs propres.
3. La juxtaposition de bases de  $E_\lambda(A)$ , pour  $\lambda \in \text{Sp}(A)$ , est une famille libre de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ .
4.  $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) \leq n$



### Proposition n° 1 : le spectre d'une matrice triangulaire est donné par sa diagonale

Le spectre d'une matrice triangulaire (voire diagonale) est égal à l'ensemble de ses coefficients diagonaux.

## 2 Diagonalisation d'un endomorphisme, d'une matrice



### Définition de la diagonalisabilité

On dit que  $u$  est **diagonalisable** s'il existe  $\mathcal{B}'$  une base de  $E$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$  soit diagonale.

On dit que  $A$  est **diagonalisable** s'il existe  $P \in GL_n(\mathbb{K})$  et  $D$  diagonale telle que  $A = PDP^{-1}$ .

**Remarques 3.** • Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ ,  $u$  est diagonalisable si et seulement si  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  l'est.

- Diagonaliser  $A$  c'est trouver  $P$  inversible et  $D$  diagonale telles que  $A = PDP^{-1}$ .
- Diagonaliser  $u$  c'est trouver  $\mathcal{B}'$  telle que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$  soit diagonale.



### Théorème n° 2 : CNS de diagonalisabilité par les espaces propres/vecteurs propres

On a équivalence entre :

1. L'endomorphisme  $u$  est diagonalisable.
2.  $E$  admet une base de vecteurs propres de  $u$ .
3.  $\dim(E) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u))$

On a équivalence entre :

1. La matrice  $A$  est diagonalisable.
2.  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  admet une base de vecteurs propres de  $A$ .
3.  $n = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A))$



### Comment diagonaliser une matrice dans la pratique ?

Calculer le rang  $A - \lambda I_n$  en l'échelonnant. En déduire  $\text{Sp}(A)$ , puis une base de chaque espace propre. Si la somme des dimensions des espaces propres vaut  $n$ , alors  $A$  est diagonalisable. On a  $A = PDP^{-1}$  avec  $P$  la matrice dont la  $j$ -ième colonne est le  $j$ -ième élément d'une base de vecteurs propres de  $A$  et  $D$  est la matrice diagonale contenant les valeurs propres (avec **le même ordre** que celui des vecteurs propres dans  $P$ ).

**Exemples 3.** Le cas échéant, diagonaliser les matrices  $A = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 8 & -7 & 8 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$  et  $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Remarques 4.** • En connaissant  $\text{rg}(A - \lambda I_n)$ , par le théorème du rang,  $\dim(E_\lambda(A)) = n - \text{rg}(A - \lambda I_n)$ .

- Si  $u$  est diagonalisable et a une seule valeur propre  $\lambda$ , alors nécessairement  $u = \lambda \text{Id}_E$ .
- Si  $A$  est diagonalisable et a une seule valeur propre  $\lambda$ , alors nécessairement  $A = \lambda I_n$ .



### Proposition n° 2 : avoir $n$ valeurs propres distinctes suffit à la diagonalisabilité

Si  $\text{Card}(\text{Sp}(u)) = n$ , alors  $u$  est diagonalisable.

Si  $\text{Card}(\text{Sp}(A)) = n$ , alors  $A$  est diagonalisable.

**Exemples 4.** 1. La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$  est elle diagonalisable ? Si oui diagonalisez-la.

2. Soit  $f: P \mapsto P + 5P''(0)X^2 + 4P'(1)X + P(2)$  où  $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ ,  $f$  est-il diagonalisable ? Si oui diagonalisez-le.

**Remarque 5.** Dans le cadre de la proposition 2, les espaces propres sont forcément de dimension 1.



### Péril imminent c'est une condition suffisante mais non nécessaire



$I_n$  n'a pas  $n$  valeurs propres,  $B$  de l'exemple 3 n'a pas 3 valeurs propres, mais  $I_n$  et  $B$  sont diagonalisables.



### Astuce : matrices symétriques réelles

Si  $M$  est **symétrique** et à coefficients réels, alors  $M$  est diagonalisable.

(sera revu plus tard et complété)



### Exemples de matrices symétriques

- La matrice  $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  avec que des 1 est diagonalisable, la diagonaliser.
- Est-ce que  $M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$  est diagonalisable ?

## 3 Méthodes



### Comment déterminer l'expression d'une suite récurrente matricielle ?

Si  $(X_n)_n$  est une suite à valeurs dans  $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_{n+1} = AX_n$ , alors (par récurrence)  $X_n = A^n X_0$ . Si  $A$  est diagonalisable, on sait calculer  $A^n$  et donc  $X_n$ .



### Comment résoudre un système d'équations différentielles linéaires ?

Si on a l'équation différentielle  $X' = AX$  avec  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  à résoudre avec  $A = PDP^{-1}$  diagonalisable, alors  $X' = AX$  ssi  $X' = PDP^{-1}X$  ssi  $P^{-1}X' = DP^{-1}X$  ssi  $Y' = DY$  avec  $Y = P^{-1}X$ . Or, si  $D$  est diagonale,  $Y' = DY$  se résout facilement.



### Comment déterminer les matrices qui commutent avec $A$ ?

Si  $A = PDP^{-1}$ , alors  $B$  commute avec  $A$  ssi  $P^{-1}BP$  commute avec  $D$ . Or, déterminer les matrices qui commutent avec  $D$  est plus facile si  $D$  est diagonale.



### Comment obtenir de potentielles valeurs propres avec un polynôme annulateur (hors programme) ?

Soit  $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$  et  $R$  l'ensemble des racines de  $P$ .

Si  $\sum_{k=0}^d a_k u^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$ , alors  $\text{Sp}(u) \subset R$ .

Si  $\sum_{k=0}^d a_k M^k = 0_n$ , alors  $\text{Sp}(u) \subset M$ .