The exercice !

Exercice 1 (𝄞⋆ Cou, Cal)**.** Les matrices suivantes sont-elles diagonalisables ? Diagonaliser celles qui le sont, $a \in \mathbb{C}^*$.

1. $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix}$
2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
3. ⋆⋆ $\begin{pmatrix} 1 & 1/a & 1/a^2 \\ a & 1 & 1/a \\ a^2 & a & 1 \end{pmatrix}$
4. $\begin{pmatrix} -13 & 15 & -30 \\ -27 & 20 & -81 \\ -1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$
5. $\begin{pmatrix} -3 & 10 & 10 \\ 15 & -28 & -30 \\ -15 & 30 & 32 \end{pmatrix}$
6. $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 7 \\ 5 & 2 & -5 \\ -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
7. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -1 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Éléments propres

Exercice 2 (⋆ Rai ©)**.** 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ que veut dire $0 \in \mathrm{Sp}(A)$?

2. Soit A une matrice inversible, et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, démontrer que $\lambda \neq 0$, et que $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}(A^{-1})$. Et que $E_{\lambda^{-1}}(A^{-1}) = E_\lambda(A)$.

Exercice 3 (⋆ Rai ©)**.** Soit $N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente (il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$).

1. N est-elle inversible ?
2. Trouver $\mathrm{Sp}(N)$.
3. Quelles sont les matrices nilpotentes diagonalisables ?

Exercice 4 (⋆ Cou, Rai ©)**.** Soit $E = \mathscr{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On note Ψ l'application qui, à $f \in E$, associe l'unique primitive de f qui s'annule en 0. Montrer que Ψ est un endomorphisme. Puis donner ses éléments propres.

Exercice 5 (⋆ Rec ©)**.** Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice telle pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, la somme des éléments de la colonne j vaut 1. Montrer que $1 \in \mathrm{Sp}(M)$.

Exercice 6 (⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** 1. Soit $B = (b_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $|b_{i,i}| > \sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |b_{i,j}|$, montrer que $B \in GL_n(\mathbb{K})$.

2. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que
$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i=1}^{n} D\left(a_{i,i}, \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|\right)$$
Où $D(a, r)$ est le disque de centre a et de rayon r.
3. Écrire une fonction Python qui, à une matrice, affiche l'union de ces disques.

Exercice 7 (⋆⋆ Rec, Rai)**.** Soit $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Montrer que $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

Exercice 8 (⋆⋆ Cal, Rec ©)**.** Soit $P = c_0 + c_1 X + \cdots + c_{n-1}X^{n-1} + X^n \in \mathbb{C}[X]$. Notons
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -c_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -c_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -c_{n-1} \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les valeurs propres de C sont exactement les racines de P.
2. Donner la dimension des espaces propres.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur P qui assure la diagonalisabilité de C.

Diagonalisabilité

Exercice 9 (⋆ Rai ©)**.** Que dire d'une matrice diagonalisable qui n'a qu'une seule valeur propre ?

Exercice 10 (⋆ Rai ©)**.** 1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$.

2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable. Montrer que $A^\top$ est diagonalisable.

Exercice 11 ($\star$ Cal, Rai)**.** Démontrer que toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ symétrique est diagonalisable (sans utiliser ce résultat énoncé dans le cours évidemment).

Exercice 12 ($\star$ Cal, Rai)**.** Considérons la matrice suivante de $\mathscr{M}_5(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{pmatrix} -8+3\mathrm{i} & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -8+3\mathrm{i} & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -8+3\mathrm{i} & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -8+3\mathrm{i} & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & -8+3\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

1. Peut-on conclure sans calcul que A est diagonalisable ?
2. Démontrer que $A \in \mathrm{vect}(I_5, J)$ en déduire que $A^2 \in \mathrm{vect}(I_5, J)$ où $J \in \mathscr{M}_5(\mathbb{C})$ est la matrice dont tous les coefficients valent 1.
3. Démontrer que $A^2 \in \mathrm{vect}(I_5, A)$.
4. En déduire que le spectre de A est inclus dans $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ avec λ_1 et λ_2 deux complexes.
5. Démontrer que A est diagonalisable et diagonalisez-là.

Exercice 13 ($\star\star$ Rai ©)**.** Soit $\Phi\colon M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \mapsto M + \mathrm{tr}(M) I_n$.

1. Montrer que $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$.
2. Trouver $\mathrm{Ker}(\Phi)$ et $\mathrm{Im}(\Phi)$
3. Démontrer que $\Phi^2 \in \mathrm{vect}(\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}, \Phi)$, que peut-on en déduire sur ses valeurs propres ?
4. Démontrer que toute matrice M est une somme de deux matrices chacune d'elles dans l'un des espaces propres.
5. Φ est-il diagonalisable ? bijective ? si oui, quelle est sa bijection réciproque ?

Exercice 14 ($\star$ Cou, Rai)**.** L'endomorphisme $\varphi\colon P \mapsto XP' \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ est-il diagonalisable ? Si oui diagonalisez-le.

Exercice 15 ($\star$ Rai ©)**.** Posons, pour $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Soit $f(M) = \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. Que vaut $\mathrm{Sp}(f)$?
3. f est-elle diagonalisable ? bijective ?

Exercice 16 ($\star$ Rai ©)**.** Soit $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice avec que des 1.

1. Montrer que J est diagonalisable.
2. Déterminer une valeur propre évidente de J ainsi que son espace propre.
3. En calculant J^2, démontrer que toute valeur propre est racine d'une équation du second degré.
4. En déduire une diagonalisation de J.

Exercice 17 ($\star\star\star$ Rai, Rec, Cal)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

1. Soit $V = (v_1, \dots, v_n)^\top$ un vecteur propre de A_n associée à une valeur propre complexe de A notée λ. Montrer que $\lambda \in \mathbb{R}$ et que $(v_i)_{0 \leqslant i \leqslant n+1}$ vérifient :
$$v_{i+1} - (2-\lambda)v_i + v_{i-1} = 0,\ 1 \leqslant i \leqslant n$$
où on pose $v_0 = v_{n+1} = 0$.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset \,]0\,;4\,[$.
3. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Montrer que les racines de $r^2 - (2-\lambda)r + 1 = 0$ sont distinctes et conjuguées.
4. On pose $r_1 = \overline{r_2} = \rho \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ ces racines avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.
Montrer que nécessairement, $\sin((n+1)\theta) = 0$ et $\rho = 1$.
5. Déterminer $\mathrm{Sp}(A_n)$ et une base de vecteurs propres.

Exercice 18 ($\star$ Rai)**.** Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques respectivement de paramètres $p \in \,]0\,;1\,[$ et $q \in \,]0\,;1\,[$. Déterminer la probabilité que $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$ soit diagonalisable.

Exercice 19 ($\star\star$ Rai)**.** Soit $M = \begin{pmatrix} 11 & -18 & 6 & 12 & 12 \\ -18 & 26 & -9 & -18 & -18 \\ 6 & -9 & 2 & 6 & 6 \\ 12 & -18 & 6 & 11 & 12 \\ 12 & -18 & 6 & 12 & 11 \end{pmatrix}$

1. Démontrer que M est diagonalisable.
2. À l'aide de Python (GG si vous le faites à la main !), calculer M^2
3. Démontrer que $M^2 \in \text{vect}(I_2, M)$.
4. Soit $\lambda \in \text{Sp}(M)$, démontrer que λ est racine d'un polynôme du second degré.
5. Démontrer qu'il n'est pas possible que que le spectre de M ait strictement moins de deux éléments. Conclure sur le spectre de M.
6. Diagonaliser M (horrible pour les 3/2, facile pour les 5/2).

Exercice 20 ($\star\star$ Rai)**.** Considérons $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_m(\mathbb{R})$ diagonalisables. On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \in \mathscr{M}_{n+m}(\mathbb{R})$, ceci est une notation (hors programme) pour signaler que les coefficients qui sont dans les n premières lignes et n premières colonnes de M sont ceux de A, de même les m derniers sont ceux de B les autres sont nuls. Démontrer que M est diagonalisable. Et déterminer $\text{Sp}(M)$

Exercice 21 ($\star$ Rai)**.**
1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable telle que $\text{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$, démontrer qu'il existe $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $A = R^2$.
2. Soit $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonalisable, montrer qu'il existe $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tel que $B = R^3$.
3. Soit $C \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $p \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe $R \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $R^p = C$.

Exercice 22 ($\star\star$ Rai, Rec ©)**.** Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ diagonalisable (E de dim finie n). On note $C(u)$ l'ensemble de $\mathscr{L}(E)$ tels que $v \circ u = u \circ v$.

1. Montrer que $C(u)$ est un SEV de $\mathscr{L}(E)$.
2. Montrer que $\dim(C(u)) = \sum_{\lambda \in \text{Sp}(u)} (\dim(E_\lambda(u)))^2$.
3. Montrer que $\dim(C(u)) \geqslant n$.

Exercice 23 ($\star\star$ Cal, Rai ©)**.** La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ est-elle diagonalisable dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$?

Applications

Exercice 24 ($\star$ Cal)**.** Reprendre les deux premières matrices de l'exercice 1 et calculer leur puissance $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 25 ($\star\star$ Rai)**.** Reprendre la deuxième matrice de l'exercice 1 que l'on note M. On note D la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont 1, 2 et 3.

1. On note $C(A)$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ commutant avec $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, montrer que $C(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit P une matrice inversible telle que $M = PDP^{-1}$, montrer que $A \in C(M)$ ssi $PAP^{-1} \in C(D)$.
3. En déduire que $C(M)$ et $C(D)$ ont la même dimension.
4. Déterminer une base de $C(D)$.
5. En déduire une base de $C(M)$.

Exercice 26 (𝄞$\star$ Rai ©)**.** Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ tel que $a^2 + 4b \neq 0$, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, soit $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix}$.

1. Trouver A telle que $U_{n+1} = AU_n$.
2. Démontrer que A est diagonalisable et diagonaliser A.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 27 ($\star$ Rai)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$, procéder comme à l'exercice précédent.

Exercice 28 ($\star\star$ Rec)**.** Considérer M la deuxième matrice de l'exercice 1, prouver qu'il existe $R \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $R^2 = M$. Unicité ?

Exercice 29 ($\star$ Mod, Cal)**.** Soit $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$, on définit les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par récurrence par

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \begin{cases} u_{n+1} &= 2u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= 3v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n + 2w_n \end{cases}$$

1. Déterminer $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = AU_n$ avec $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

2. Diagonaliser A, on note D la matrice diagonale obtenue.
3. Déterminer l'expression de u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30 ($\star$ Cal)**.** On cherche les solutions de ce système différentiel :

$$(S) \quad \begin{cases} x'(t) & = -8x(t) + 10y(t) + 10z(t) \\ y'(t) & = 5x(t) - 3y(t) - 5z(t) \\ z'(t) & = -10x(t) + 10y(t) + 12z(t) \end{cases}$$

1. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, déterminer A tel que le système soit équivalent à $X' = AX$ où $X'(t)$ désigne $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}$.
2. Démontrer que A est diagonalisable et déterminer P inversible et D diagonale tel que $A = PDP^{-1}$.
3. On pose $Y = P^{-1}X$, justifier $X' = AX$ ssi $Y' = DY$.
4. Résoudre $Y' = DY$ puis donner les solutions de (S).

Exercice 31 ($\star\star$ Mod, Cal)**.** Soit

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longmapsto (5x + y + 6z, x + 5y + 6z, 6x + 6y + 12z) \end{cases}$$

et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer A, la matrice de f dans la base canonique et démontrer que f est diagonalisable.
2. Déterminer le spectre de f ainsi qu'une base des espaces propres. *Il est conseillé de ne pas chercher forcément à résoudre un système linéaire, mais chercher des vecteurs dans les noyaux en exhibant une relation entre les colonnes des matrices concernées.*
3. Diagonaliser A.
4. On note $C(D)$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec D. Démontrer que $C(D)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $C(D)$.
5. Proposer une matrice Δ tel que $\Delta^2 = D$.
6. En déduire une matrice R tel que $R^2 = A$ (on dit que R est une racine carrée de A). *Exprimer R en fonction de P et P^{-1} sans chercher à calculer explicitement R.*
7. Combien de racines carrées de A pouvez-vous trouver ? *De même, ne pas calculer explicitement ces matrices, les laisser sous forme de produit matriciel.*
8. En utilisant le spectre, démontrer que les quatre matrices racines carrées sont bien deux à deux distinctes.

On va maintenant prouver que seules les quatre matrices trouvées sont possibles. Soit R une racine carrée de A quelconque. On a donc $R^2 = A$, et on pose $\Delta = P^{-1}RP$.

9. Calculer Δ^2 et démontrer que Δ et D commutent.
10. En déduire les valeurs possibles de Δ et conclure sur le nombre exact des racines carrées de A.

Exercice 32 ($\star\star\star$ Rec)**.** Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- Démontrer que A est somme de deux matrices inversibles.
- Démontrer que A est somme de deux matrices diagonalisables.
- Démontrer que A est somme de deux matrices diagonalisables et inversibles.

Trigonalisation : voyage en terre inconnue

La trigonalisation consiste, pour une matrice A (non diagonalisable sinon c'est inutile), à écrire sous la forme $A = PTP^{-1}$ avec T une matrice triangulaire supérieure et P inversible (si c'est possible). Aucune technique n'est à connaître, il faut surtout se rappeler que A et T vont être les matrices d'un même endomorphisme, tout l'intérêt étant de trouver une base telle que la matrice dans cette base de cet endomorphisme triangulaire (c'est ce qu'on pourrait appeler la diagonalisation du pauvre).

Exercice 33 ($\star\star$ Cou, Rai)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Que vaut $\mathrm{Sp}(A)$?
2. A est-elle diagonalisable ?
3. Montrer qu'il existe (U, V, W) une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ telle que U et V soient des vecteurs propres de A.
4. En déduire une trigonalisation de A.

Exercice 34 ($\star\star$ Rai, Rec)**.** Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où $E = \mathbb{R}^3$ tel que la matrice de f dans la base canonique de E soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que tout élément de E s'écrit sous une unique forme comme somme d'un élément de $\mathrm{Ker}(f^2)$ et d'un élément de $\mathrm{Ker}(f - 2\mathrm{Id}_E)$.
2. Trouver un vecteur de $\mathrm{Ker}(f^2)\backslash\mathrm{Ker}(f)$.
3. Trouver une base $\mathscr{B}'$ de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
4. En déduire une expression de A^p où $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 35 ($\star\star$ Cou, Cal, Rai)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'est pas diagonalisable.
2. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$.

   On donnera l'expression de a, b et c ainsi que la matrice de passage.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 36 ($\star\star\star$ Rec)**.** Dans cet exercice, nous admettrons que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable (c'est-à-dire semblable à une matrice triangulaire supérieure). Montrer que toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est limite d'une suite de matrices diagonalisables. Soit $(A[p])_{p\in\mathbb{N}}$ une suite de matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on dit que cette suite converge vers $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, si pour tout $(i,j) \in [\![1 ; n]\!]^2$, $A[p]_{i,j} \xrightarrow[p\to+\infty]{} a_{i,j}$ (autrement dit la convergence d'une suite s'étudie comme une limite coefficient par coefficient).