Chapitre 9

Intégrales généralisées

Objectif :
Vous connaissez la notion d'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[\,a\,;b\,]$, mais pas sur un intervalle quelconque, dans ce chapitre, on va donner un sens à des objets comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Pré-requis :

- Fonctions usuelles
- Notion de limites, fonctions continues et fonctions prolongeables par continuité
- Intégrales et primitives (primitives usuelles, IPP, changement de variable)
- Intégration sur un segment
- Obtention d'équivalents
- Théorème fondamental de l'analyse

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté
Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

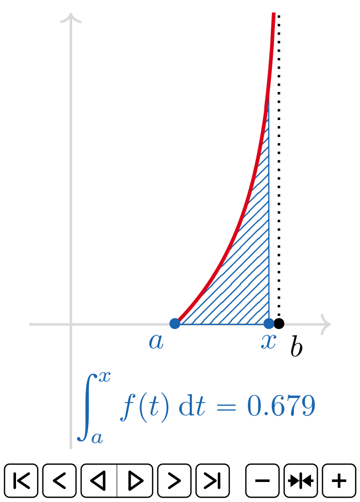
Table des matières

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Ainsi, suivant les cas, $I =]\,a\,;b\,[$, $I =]\,a\,;b\,]$, $I = [\,a\,;b\,[$ ou $I = [\,a\,;b\,]$.

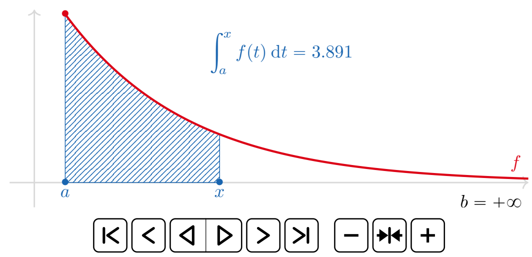
1 Définition de l'intégrale généralisée (ou impropre) sur un intervalle

Définition de l'intégrale généralisée (ou impropre) sur un intervalle semi-ouvert à droite

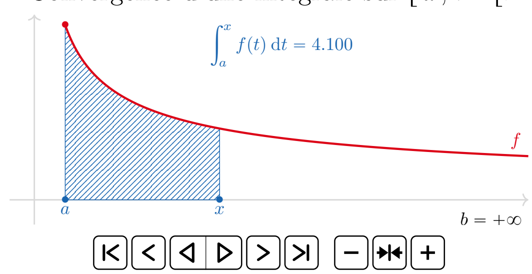
Si $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,[\,,\mathbb{R})$, on dit que l'**intégrale généralisée** $\displaystyle\int_a^b f$ **converge** si $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ admet une limite finie en b^-. Dans ce cas, on pose :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[\,a\,;\,b\,[} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Convergence d'une intégrale sur $[\,a\,;b\,[$ avec $b \in \mathbb{R}$.



Convergence d'une intégrale sur $[\,a\,;+\infty\,[$.



Divergence d'une intégrale sur $[\,a\,;+\infty\,[$.

Exemples 1. Étudier la convergence des intégrales suivantes et calcul le cas échéant :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t.$

Définition de l'intégrale généralisée (ou impropre) sur un intervalle semi-ouvert à gauche

Si $b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(]\,a\,;b\,]\,,\mathbb{R})$, on dit que **l'intégrale** $\displaystyle\int_a^b f$ **converge** si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en a^+.

Dans ce cas, on pose :
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Exemples 2. Étudier la convergence des intégrales suivantes et calcul des intégrales le cas échéant :

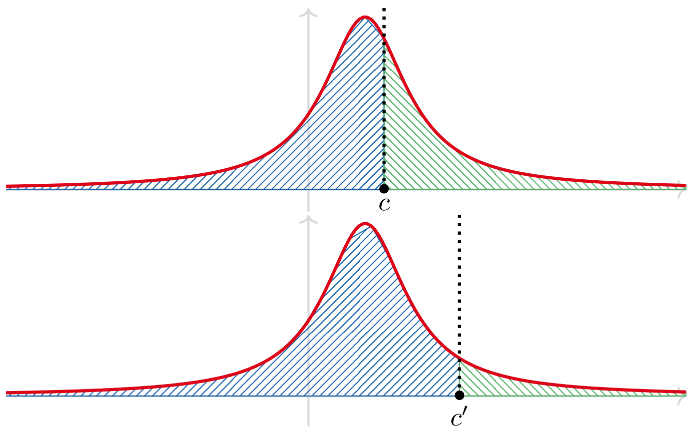
1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$

Définition de l'intégrale généralisée (ou impropre) sur un intervalle ouvert

Si $f \in \mathscr{C}^0(]\,a\,;b\,[\,,\mathbb{R})$ et $c \in\,]\,a\,;b\,[$, on dit que **l'intégrale** $\displaystyle\int_a^b f$ **converge** si les intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent.

Dans ce cas, on pose
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 1. On démontre que le choix de c n'a pas d'incidence ni sur la nature de l'intégrale de $\displaystyle\int_a^b f$ ni sur sa valeur.



Exemples 3. Étudier la convergence des intégrales suivantes et calculs des intégrales le cas échéant :

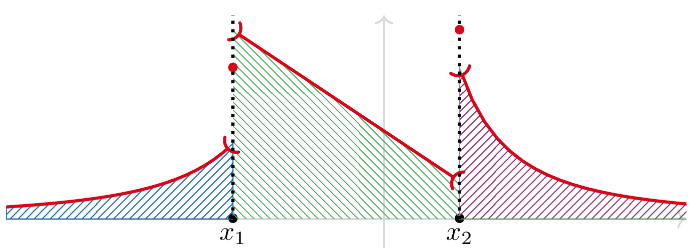
1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^5\,\mathrm{d}t$

Remarque 2. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$, alors $\displaystyle\int_{[\,a\,;\,b\,[} f$, $\displaystyle\int_{]\,a\,;\,b\,]} f$ et $\displaystyle\int_{]\,a\,;\,b\,[} f$ convergent et valent toutes $\displaystyle\int_a^b f$.

Définition de l'intégrale généralisée d'une fonction ayant un nombre fini de discontinuités

Si f continue sur $I =]\,x_0\,;x_{n+1}\,[\setminus\{x_1,\ldots,x_n\}$ tels que $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < x_{n+1}$, on dit que $\displaystyle\int_I f$ converge si, pour tout $i \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, $\displaystyle\int_{]\,x_i\,;\,x_{i+1}\,[} f$ converge. On définit alors l'intégrale de f sur I par $\displaystyle\int_I f = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f$.

Remarque 3. La nature et l'éventuelle valeur de $\displaystyle\int_I f$ ne dépendent pas de la valeur de f aux points de discontinuité.



Exemple 4. Étudier la convergence (et calcul le cas échéant) de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ où $f\colon t \mapsto \mathbb{1}_{]\,-2\,;\,2\,[}(t)\mathrm{e}^{\,t} + \mathbb{1}_{]\,2\,;\,+\infty\,[}(t)\dfrac{1}{t^2}$.

Proposition n° 1 : fonction prolongeable par continuité (intégrale faussement impropre)

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et f est définie et continue sur $[\,a\,;b\,]\setminus\{c\}$, si $f(x) \xrightarrow[x\to c]{} \ell \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

Exemple 5. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque 4. Par convention, $\displaystyle\int_a^a f = 0$ et si $\displaystyle\int_a^b f$ converge, on pose $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$.

2 Propriétés de l'intégrale généralisée et méthodes de calculs

Proposition n° 2 : propriétés de l'intégrale sur un intervalle

L'intervalle I a pour extrémités a et b. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f, g) \in \mathscr{C}^0(I, \mathbb{R})^2$ d'intégrales convergentes sur I :

1. Linéarité : $\displaystyle\int_I \lambda f + g$ converge et $\displaystyle\int_I (\lambda f(t) + g(t))\ \mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Chasles : si $c \in I$, alors $\displaystyle\int_a^c f$, $\displaystyle\int_c^b f$ convergent et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Positivité : si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
4. Croissance : si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.
5. Stricte positivité : si f est continue et positive sur I et non nulle alors $\displaystyle\int_I f(t) > 0$.

Attention, précaution à prendre avant d'écrire une intégrale

Avant de calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, on montre que l'intégrale converge (idem pour les limites, les séries etc.).

Intégrale classique : l'exponentielle

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$. Et dans ce cas, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}$.

Intégrale classique : intégrale de Riemann

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ et alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha - 1}$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$ et alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$

Théorème n° 1 : intégration par parties pour les intégrales généralisées

Soit $(f, g) \in \mathscr{C}^1(]\,a\,;b\,[\,, \mathbb{R})^2$. Si fg admet des limites finies en b^- et en a^+, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b fg'$ et $\displaystyle\int_a^b g'f$ ont même nature et si elles convergent $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b^-} fg - \lim_{a^+} fg - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple 6. Prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ et calculer la valeur de cette intégrale.

Théorème n° 2 : changement de variable pour les intégrales généralisées

Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(]\,a\,;b\,[\,, \mathbb{R})$ strictement monotone. Posons $\alpha = \lim\limits_a \varphi$, $\beta = \lim\limits_b \varphi$. Si f est continue sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$ (ou $]\,\beta\,;\alpha\,[$).

Alors, les intégrales $\displaystyle\int_a^b (f\circ\varphi)\varphi'$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ ont même nature. De plus, si elles convergent, $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x$

Exemple 7. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente et calculer sa valeur.

Attention à ne pas oublier quelque chose

Vérifier que le changement de variable est $\mathscr{C}^1$, changer $\varphi(t)$ par x, $\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x$ et les bornes.

Proposition n° 3 : intégrales des fonctions paires et impaires sur un intervalle symétrique

Soit f continue sur un intervalle $]-a\,;a[$ avec $a>0$.

- Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f$ converge ssi $\displaystyle\int_{0}^{a} f$ converge et dans ce cas $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_{0}^{a} f$.
- Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f$ converge ssi $\displaystyle\int_{0}^{a} f$ converge et dans ce cas $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$.

3 Intégrales généralisées de fonctions positives

Proposition n° 4 : comparaison de fonctions positives

Soient f et g continues sur I, positives et $0 \leqslant f \leqslant g$. Si $\displaystyle\int_I g$ converge, alors $\displaystyle\int_I f$ converge et $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple : intégrale de référence **(valeur admise)**

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

Proposition n° 5 : fonctions positives équivalente

Si f et g sont continues sur $[\,a\,;b\,[$, positives et $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\displaystyle\int_a^b g$ et $\displaystyle\int_a^b f$ ont même nature (idem sur $]\,a\,;b\,]$ si $f \underset{a}{\sim} g$).

Exemple 8. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$.

4 Intégrales absolument convergentes

Définition de l'intégrale absolument convergente/fonctions intégrables

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$. On dit que $\displaystyle\int_I f$ **converge absolument** si $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

Remarque 5. Si $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}_+)$ est positive, alors $\displaystyle\int_I f$ converge absolument ssi $\displaystyle\int_I f$ converge.

Théorème n° 3 : l'absolue convergence entraîne la convergence

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ si $\displaystyle\int_I f$ converge absolument, alors $\displaystyle\int_I f$ converge et

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Attention à la réciproque

La réciproque est fausse : $\displaystyle\int_I f$ peut converger et $\displaystyle\int_I |f|$ diverger.

Exemple 9. Étudier l'intégrabilité de $f : t \mapsto \sin(1/t^2)$ sur $[\,1\,;+\infty\,[$.

5 Carte mentale : justifier la convergence d'une intégrale généralisée

Les cases en vert permettent parfois un calcul de l'intégrale **SI** celle-ci converge.