Chapitre 9

Intégrales généralisées

Objectif :
Vous connaissez la notion d'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[\,a\,;b\,]$, mais pas sur un intervalle quelconque, dans ce chapitre, on va donner un sens à des objets comme $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ ou $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$.

Pré-requis :

- Fonctions usuelles
- Notion de limites, fonctions continues et fonctions prolongeables par continuité
- Intégrales et primitives (primitives usuelles, IPP, changement de variable)
- Intégration sur un segment
- Obtention d'équivalents
- Théorème fondamental de l'analyse

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté
Ce polycopié contient plusieurs animations, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

1 Définition de l'intégrale généralisée (ou impropre) sur un intervalle 2

2 Propriétés de l'intégrale généralisée et méthodes de calculs 4

3 Intégrales généralisées de fonctions positives 6

4 Intégrales absolument convergentes 6

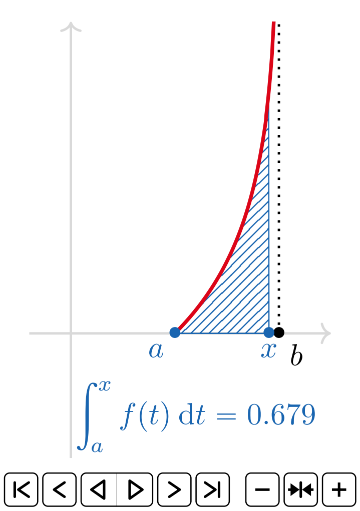
5 Carte mentale : justifier la convergence d'une intégrale généralisée 8

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ d'extrémités $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$. Ainsi, suivant les cas, $I =]\,a\,;b\,[$, $I =]\,a\,;b\,]$, $I = [\,a\,;b\,[$ ou $I = [\,a\,;b\,]$.

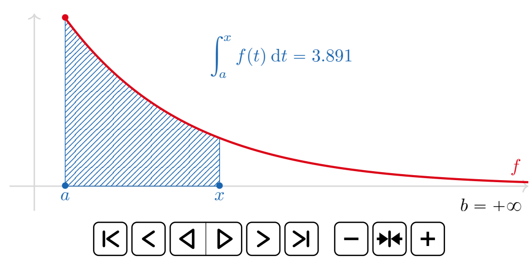
1 Définition de l'intégrale généralisée (ou impropre) sur un intervalle

Définition de l'intégrale généralisée (ou impropre) sur un intervalle qui n'est pas un segment

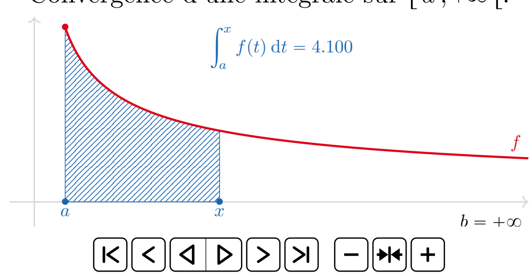
- Si $a \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,[\,,\mathbb{R})$, on dit que l'**intégrale** $\displaystyle\int_a^b f$ **converge** si $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f$ admet une limite finie en b^-. Dans ce cas, on pose : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[\,a\,;b\,[} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$
- Si $b \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^0(]\,a\,;b\,]\,,\mathbb{R})$, on dit que **l'intégrale** $\displaystyle\int_a^b f$ **converge** si $x \mapsto \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie en a^+. Dans ce cas, on pose : $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]\,a\,;b\,]} f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to a^+} \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
- Si $f \in \mathscr{C}^0(]\,a\,;b\,[\,,\mathbb{R})$ et $c \in]\,a\,;b\,[$, on dit que **l'intégrale** $\displaystyle\int_a^b f$ **converge** si les intégrales $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent. Dans ce cas, on pose $$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{]\,a\,;b\,[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$



Convergence d'une intégrale sur $[\,a\,;b\,[$ avec $b \in \mathbb{R}$.



Convergence d'une intégrale sur $[\,a\,;+\infty\,[$.



Divergence d'une intégrale sur $[\,a\,;+\infty\,[$.

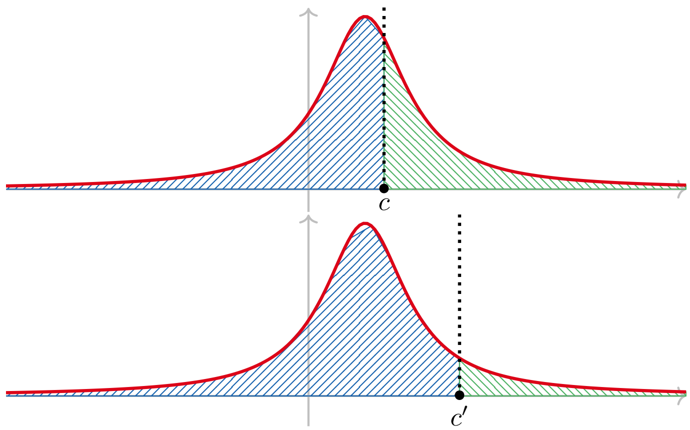
Remarque 1. Dans le cas de $]\,a\,;b\,[$, ce choix de $c \in]\,a\,;b\,[$ n'a pas d'incidence ni sur la nature de l'intégrale de $\displaystyle\int_a^b f$ ni sur sa valeur.

Justification de la remarque 1 : Soit $c \in]\,a\,;b\,[$. Supposons que $\displaystyle\int_a^c f$ et $\displaystyle\int_c^b f$ convergent. Soit $c' \in]\,a\,;b\,[$, l'objectif est de montrer que $\displaystyle\int_a^{c'} f$ et $\displaystyle\int_{c'}^b$ convergent et que $\displaystyle\int_a^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c'}^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

- Soit $x \in]\,a\,;c'\,]$, alors $\displaystyle\int_x^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t$. Or, comme $\displaystyle\int_a^c f$ converge, $x \mapsto \displaystyle\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite en a^+ qui vaut $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$. Ceci démontre que $\displaystyle\int_x^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a^+]{} \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t$. Donc $\displaystyle\int_a^{c'} f$ converge et $\displaystyle\int_a^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Soit $x \in]\,c'\,;b\,]$, alors $\displaystyle\int_{c'}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c'}^c f(t)\,\mathrm{d}t$. Or, comme $\displaystyle\int_c^b f$ converge, $x \mapsto \displaystyle\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite en b^- qui vaut $\displaystyle\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Ceci démontre que $\displaystyle\int_{c'}^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b^-]{} \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c'}^c f(t)\,\mathrm{d}t$. Donc $\displaystyle\int_{c'}^b f$ converge et $\displaystyle\int_{c'}^b f(t)\,\mathrm{d}t =$

$$\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c'}^c f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par somme, on peut en conclure que $\displaystyle\int_a^{c'} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{c'}^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.



Exemples 1. Étudier la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur le cas échéant :

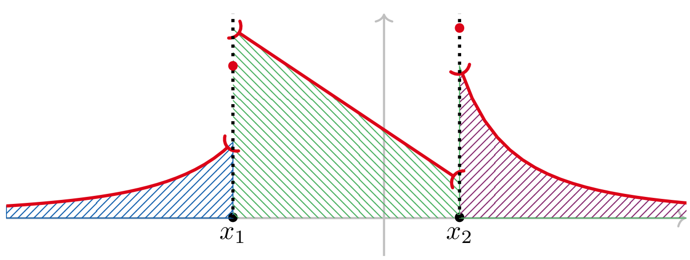
1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1-t)^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \cos(t)\,\mathrm{d}t$
8. $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$
9. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^5\,\mathrm{d}t$

Remarque 2. Si $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $f\in\mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})$, alors $\displaystyle\int_{[\,a\,;\,b\,[} f$, $\displaystyle\int_{]\,a\,;\,b\,]} f$ et $\displaystyle\int_{]\,a\,;\,b\,[} f$ convergent et valent toutes $\displaystyle\int_a^b f$.

Définition de l'intégrale généralisée d'une fonction ayant un nombre fini de discontinuités

Si f est continue sur $I =]\,x_0\,;x_{n+1}\,[\setminus\{x_1,\dots,x_n\}$ tels que $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1}$, on dit que $\displaystyle\int_I f$ converge si, pour tout $i\in[\![\,0\,;n\,]\!]$, $\displaystyle\int_{]\,x_i\,;\,x_{i+1}\,[} f$ converge. On définit alors l'intégrale de f sur I par
$$\int_I f = \sum_{i=0}^{n} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f.$$

Remarque 3. La nature et l'éventuelle valeur de $\displaystyle\int_I f$ ne dépendent pas de la valeur de f aux points de discontinuité.



Exemple 2. Étudier la convergence (et calcul le cas échéant) de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ où $f\colon t\mapsto \mathbb{1}_{]\,-2\,;\,2\,[}(t)\mathrm{e}^{t} + \mathbb{1}_{]\,2\,;\,+\infty\,[}(t)\dfrac{1}{t^2}$.

Proposition n° 1 : fonction prolongeable par continuité (intégrale faussement impropre)

Soient $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et f est définie et continue sur $[\,a\,;b\,]\setminus\{c\}$. Si $f(x)\underset{x\to c}{\longrightarrow}\ell\in\mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_a^b f$ converge.

Exemple 3. Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque 4. Par convention, $\displaystyle\int_a^a f = 0$ et si $\displaystyle\int_a^b f$ converge, on pose $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$.

2 Propriétés de l'intégrale généralisée et méthodes de calculs

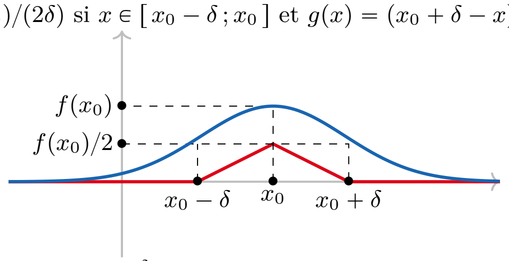
Proposition n° 2 : propriétés de l'intégrale sur un intervalle

L'intervalle I a pour extrémités a et b. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$, $(f,g) \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})^2$ d'intégrales convergentes sur I :

1. Linéarité : $\displaystyle\int_I \lambda f + g$ converge et $\displaystyle\int_I (\lambda f(t) + g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda \int_I f(t)\,\mathrm{d}t + \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$
2. Chasles : si $c \in I$, alors $\displaystyle\int_a^c f$, $\displaystyle\int_c^b f$ convergent et $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t.$
3. Positivité : si $f \geqslant 0$ alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0.$
4. Croissance : si $f \leqslant g$, alors $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t.$
5. Stricte positivité : si f est continue et positive sur I et non nulle alors $\displaystyle\int_I f(t) > 0.$

Démonstration de la proposition n° 2 :

1.
2.
3.
4.
5. Supposons que f est continue sur $I = \,]\,a\,;b\,[$, positive sur I et non nulle sur I. Cela veut dire qu'il existe $x_0 \in I$ tel que $f(x_0) > 0$. Comme f est continue en x_0, $f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} f(x_0)$. Considérons $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$. Ainsi, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [\,x_0 - \delta\,; x_0 + \delta\,]$, $f(x_0) - \varepsilon \leqslant f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$. Quitte à prendre δ assez petit, on suppose que $[\,x_0 - \delta\,; x_0 + \delta\,] \subset I$, de sorte que pour tout $x \in [\,x_0 - \delta\,; x_0 + \delta\,]$, $f(x_0)/2 \leqslant f(x)$. Posons g l'application définie sur I par : $g(x) = 0$, si $x < x_0 - \delta$ ou $x > x_0 + \delta$, $g(x) = (x - x_0 + \delta) f(x_0)/(2\delta)$ si $x \in [\,x_0 - \delta\,; x_0\,]$ et $g(x) = (x_0 + \delta - x) f(x_0)/(2\delta)$ si $x \in \,]\,x_0\,; x_0 + \delta\,]$.



Alors, g est continue sur I, positive et $g \leqslant f$, $\displaystyle\int_a^{x_0-\delta} g$ et $\int x_0 + \delta b g$ convergent (fonction nulle) et $\displaystyle\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} g$ converge (fonction continue sur un segment), ainsi, $\displaystyle\int_a^b g$ converge. Par croissance de l'intégrale, $\displaystyle\int_I g \leqslant \int_I f$, or $\displaystyle\int_I g = \delta f(x_0) > 0$. Par conséquent, $\displaystyle\int_I f > 0$. ■

Attention, précaution à prendre avant d'écrire une intégrale

Avant de calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, on montre que l'intégrale converge (idem pour les limites, les séries etc.).

Intégrale classique : l'exponentielle

Soit $a \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $a > 0$. Et dans ce cas, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}.$

Intégrale classique : intégrale de Riemann

$\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha > 1$ et alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$, $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge ssi $\alpha < 1$ et alors $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$

Théorème n° 1 : intégration par parties pour les intégrales généralisées

Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^1(]\,a\,;b\,[,\mathbb{R})^2$. Si fg admet des limites finies en b^- et en a^+, alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b fg'$ et $\displaystyle\int_a^b f'g$ ont même nature. Si elles convergent $\displaystyle\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{b^-} fg - \lim_{a^+} fg - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$

Démonstration du théorème n° 1 : Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^1(]\,a\,;b\,[,\mathbb{R})^2$. Supposons que fg admet des limites finies en b^- et en a^+ et que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f'g$ converge. Montrons que $\displaystyle\int_a^b fg'$ converge. Soit $c \in\,]\,a\,;b\,[$.

- Montrons que $\displaystyle\int_c^b f$ converge. Soit $x \in [\,c\,;b\,[$, alors par intégration par parties sur le segment $[\,c\,;x\,]$,
$$\int_c^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_c^x - \int_c^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(x)g(x) - f(c)g(c) - \int_c^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
Comme $\displaystyle\int_a^b f'g$ converge, $\displaystyle\int_c^b f'g$ converge, donc $\displaystyle\int_c^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b^-]{} \int_c^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. De plus, fg admet une limite finie en b^- ainsi :
$$\int_c^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to b^-]{} \lim_{x\to b^-} f(x)g(x) - f(c)g(c) - \int_c^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
Ainsi, $\displaystyle\int_c^b fg'$ converge et $\displaystyle\int_c^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b^-} f(x)g(x) - f(c)g(c) - \int_c^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
- Montrons que $\displaystyle\int_a^c f$ converge. Soit $x \in\,]\,a\,;c\,]$, alors par intégration par parties sur le segment $[\,x\,;c\,]$,
$$\int_x^c f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_x^c - \int_x^c f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(c)g(c) - f(x)g(x) - \int_x^c f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
Comme $\displaystyle\int_a^b f'g$ converge, $\displaystyle\int_a^c f'g$ converge, donc $\displaystyle\int_x^c f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a^+]{} \int_a^c f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$. De plus, fg admet une limite finie en a^+ ainsi :
$$\int_x^c f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a^+]{} f(c)g(c) - \lim_{x\to a^+} f(x)g(x) - \int_a^c f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$
Ainsi, $\displaystyle\int_a^c fg'$ converge et $\displaystyle\int_a^c f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = f(c)g(c) - \lim_{x\to a^+} f(x)g(x) - \int_a^c f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

Comme on a montré que $\displaystyle\int_a^c fg'$ et $\displaystyle\int_c^b fg'$ convergent, on peut en déduire que $\displaystyle\int_a^b fg'$ converge.
$$\begin{aligned}\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_a^c f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \left(f(c)g(c) - \lim_{x\to a^+} f(x)g(x) - \int_a^c f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right) + \left(\lim_{x\to b^-} f(x)g(x) - f(c)g(c) - \int_c^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \lim_{x\to b^-} f(x)g(x) - \lim_{x\to a^+} f(x)g(x) - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$
On a donc montré que si $\displaystyle\int_a^b f'g$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b fg'$ converge. En permutant les rôles de f et g, si $\displaystyle\int_a^b fg'$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f'g$ converge. ■

Exemple 4. Prouver la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ et calculer la valeur de cette intégrale.

Théorème n° 2 : changement de variable pour les intégrales généralisées

Soit $\varphi \in \mathscr{C}^1(]\,a\,;b\,[,\mathbb{R})$ strictement monotone. Posons $\alpha = \lim_a \varphi$, $\beta = \lim_b \varphi$. Si f est continue sur $]\,\alpha\,;\beta\,[$ (ou $]\,\beta\,;\alpha\,[$).

Alors, les intégrales $\displaystyle\int_a^b (f\circ\varphi)\varphi'$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta f$ ont même nature. Si elles convergent, $\displaystyle\int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$

Exemple 5. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente et calculer sa valeur.

Attention à ne pas oublier quelque chose

Vérifier que le changement de variable est $\mathscr{C}^1$, changer $\varphi(t)$ par x, $\mathrm{d}t$ par $\mathrm{d}x$ et les bornes.

Proposition n° 3 : intégrales des fonctions paires et impaires sur un intervalle symétrique

Soit f continue sur un intervalle $]-a\,;a[$ avec $a > 0$.

- Si f est paire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f$ converge ssi $\displaystyle\int_0^a f$ converge et dans ce cas $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$.
- Si f est impaire, alors $\displaystyle\int_{-a}^{a} f$ converge ssi $\displaystyle\int_0^a f$ converge et dans ce cas $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 0$.

3 Intégrales généralisées de fonctions positives

Proposition n° 4 : comparaison de fonctions positives

Soient f et g continues sur I, positives et $0 \leqslant f \leqslant g$. Si $\displaystyle\int_I g$ converge, alors $\displaystyle\int_I f$ converge et $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_I g(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemple : intégrale de Gauss **(valeur admise)**

L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

Proposition n° 5 : fonctions positives équivalentes

Si f et g sont continues sur $[a\,;b[$, positives et $f \underset{b}{\sim} g$, alors $\displaystyle\int_a^b g$ et $\displaystyle\int_a^b f$ ont même nature (idem sur $]a\,;b]$ si $f \underset{a}{\sim} g$).

Exemple 6. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$.

4 Intégrales absolument convergentes

Définition d'une intégrale absolument convergente

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$. On dit que $\displaystyle\int_I f$ **converge absolument** si $\displaystyle\int_I |f|$ converge.

Remarque 5. Si $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R}_+)$ est positive, alors $\displaystyle\int_I f$ converge absolument ssi $\displaystyle\int_I f$ converge.

Théorème n° 3 : l'absolue convergence entraîne la convergence

Soit $f \in \mathscr{C}^0(I,\mathbb{R})$ si $\displaystyle\int_I f$ converge absolument, alors $\displaystyle\int_I f$ converge et $\displaystyle\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t$

Attention à la réciproque

La réciproque est fausse : $\int_I f$ peut converger et $\int_I |f|$ diverger.

Exemple 7. Étudier la convergence absolue de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

5 Carte mentale : justifier la convergence d'une intégrale généralisée

Les cases en vert permettent parfois un calcul de l'intégrale **SI** celle-ci converge.