

Convergence de séries et calculs de sommes

Exercice 1 (★ Cou, Cal ©). Nature des séries de terme général :

- | | |
|---|--|
| a) $\sin(1/n) - \ln(1 + 1/n)$ | b) $\sqrt{n^2 + n + 1} - \sqrt{n^2 + n - 1}$ |
| c) $\frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$ | d) $\sin(2\pi\sqrt{n^2 + 1})$ |
| e) $\frac{\ln(n)^{2025}}{n}$ | f) $\frac{n}{\ln(n)^{2025}}$ |
| g) $\frac{1}{n^3}$ | h) $\arctan(n + 2025) - \arctan(n)$ |
| i) $\frac{\cos(n^4)}{n^3}$ | j) $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$ |
| k) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e$ | l) $\frac{\tan(1/n^2)}{-\ln(1 - 1/n)}$ |
| m) $\frac{1}{\sqrt{n}}$ | |

Exercice 2 (★ Cou, Cal). Prouver la convergence et calculer la somme des séries suivantes avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1; 1[$:

- | | | |
|------------------------------|---|---------------------------------|
| 1. $\sum \frac{1-e}{e^n}$ | 2. $\sum \left(\frac{2}{n(n+1)} - \frac{5}{3^n} \right)$ | 3. $\sum x^n \sin(n\theta)$ |
| 4. $\sum \frac{9}{10^{n+1}}$ | 5. $\sum \frac{3^n}{n!}$ | 6. $\sum \frac{(-1)^n}{(n+2)!}$ |
| 7. $\sum \frac{n^2}{n!}$ | | |

Exercice 3 (★★ Rec, Cou, Cal). Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $v_n = \frac{x^n}{n!}$.

- Si $x \neq 0$, déterminer la limite de $\left(\frac{v_{n+1}}{v_n} \right)_n$. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $|v_{n+1}| \leq \frac{|v_n|}{2}$.
- Montrer que pour $n \geq n_0$, $|v_n| \leq \frac{|v_{n_0}|}{2^{n-n_0}}$, en déduire la limite de $(v_n)_n$.
- Montrer que $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp(t) dt$.
- En conclure que la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et que sa somme vaut e^x .

Exercice 4 (★★ Rai, Rec). Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on suppose que $u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, montrer qu'à partir d'un certain rang $|u_n|n^2 \leq 1$, en déduire que $\sum u_n$

converge. En déduire la convergence de $\sum \frac{1}{n^2 \ln^{2025}(n)}$, $\sum n^{2025} e^{-\sqrt{n}}$

Exercice 5 (★★ Rai ©). Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

- Si $(u_n)_n$ est positive et que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum u_n^2$ converge.
- Montrer que la réciproque est fausse.
- Si $\sum u_n$ converge absolument, montrer que $\sum u_n^2$ converge.

Exercice 6 (★★ Rai, Rec). Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, nature de $\sum \frac{\alpha^n}{\beta^n + n}$.

Séries à termes positifs

Exercice 7 (♣★★ Rai ©). Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

- À l'aide d'un développement limité, déterminer un équivalent de $u_{n+1} - u_n$.
- En déduire que $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.
- En déduire qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $H_n = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Exercice 8 (★ Rai ©). Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Montrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

Exercice 9 (♣★★ Rai). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$

- Si $\alpha \in \mathbb{R}_-$, déterminer la nature de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$
- Si $\alpha > 0$, comparer $\frac{1}{n^\alpha}$ à $\int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$ et à $\int_{n-1}^n \frac{1}{t^\alpha} dt$.
- En déduire que si $\alpha > 1$, $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.
- Si $\alpha \in]0; 1]$, montrer que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et déterminer un équivalent de $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$.

Exercice 10 (♣★★ Rai, Rec ©). Soit $(v_n)_n$ une suite de réels strictement positifs et $r > 0$.

1. Si pour tout $n \geq n_0$, $v_{n+1} \leq r v_n$ (resp. $\geq$), montrer que pour tout $n \geq n_0$, $v_n \leq r^{n-n_0} v_{n_0}$ (resp. $\geq$)

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels non nuls tel que $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.

2. Si $\ell < 1$, montrer que $\sum u_n$ converge.
3. Si $\ell > 1$, montrer que $\sum u_n$ diverge.
4. Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

Exercice 11 (★★ Rai, Rec). Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_n}{1 + u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

Exercice 12 (§★★ Rec, Rai ©). Soit $\sum u_n$ une série convergente, où $(u_n)_n$ est une suite positive décroissante. Montrer que $nu_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Exercice 13 (★★ Rai ©). Soit $(u_n)_n$ une suite strictement positive, on suppose que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \ell$.

1. Si $\ell < 1$, montrer que $\sum u_n$ est convergente.
2. Si $\ell > 1$, montrer que $\sum u_n$ est divergente.

Exercice 14 (★★ Rai ©). Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ trois séries réelles.

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, montrer que $\sum v_n$ converge.
2. Redémontrer qu'une série réelle absolument convergente converge.

Exercice 15 (★ Cal ©). En admettant que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Après avoir justifier que ces séries convergent, calculer :

1. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2}$
2. $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$
3. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

Divers

Exercice 16 (★★ Rai). Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs décroissante et tendant vers 0. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k u_k$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite.

2. En déduire que $\sum (-1)^n u_n$ converge.
3. Montrer que $\sum (-1)^n \frac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 0$.

Exercice 17 (★★ Rai, Cal). 1. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^1 t^k dt$.

2. En utilisant la question précédente, démontrer $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et déterminer sa somme.

Exercice 18 (★★ Rai). Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries avec $\sum v_n$ une série à termes strictement positifs. Supposons que $\sum v_n$ diverge, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n v_k$.

1. Si $u_n = o(v_n)$, montrer que $S_n = o(S'_n)$
2. Si $u_n \sim v_n$, montrer que $S_n \sim S'_n$

Exercice 19 (★ ★ ★ Rec). Soit $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection.

1. Soit $\sum u_n$ une série réelle à termes positifs convergente. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente, montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. Soit $\sum u_n$ une série réelle convergente mais non absolument convergente comme $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$.
 - (a) Montrer que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont toutes les deux divergentes.
 - (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, construire $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection telle que $x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

- (c) Construire $\sigma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ une bijection telle que $\sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

On peut aussi construire σ telle que $\sum_{k=0}^n u_{\sigma(k)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$.

-
1. Sont autorisés à chercher cet exercice seulement ceux qui ont déjà fait au moins 9 exercices de ce TD.
 2. Si $x \in \mathbb{R}$, $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = -\min(0, x)$ sont les parties positives et négatives de x , $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.

4. Conclure que les séries c'est vachement bizarre quand même.