## Convergence de séries et calculs de sommes

**Exercice 1** (⋆ Cou, Cal ©)**.** Nature des séries de terme général :

a) $\sin(1/n) - \ln(1+1/n)$

b) $\sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2+n-1}$

c) $\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$

d) $\sin(2\pi\sqrt{n^2+1})$

e) $\dfrac{\ln(n)^{2025}}{n}$

f) $\dfrac{n}{\ln(n)^{2025}}$

g) $\dfrac{1}{n^3}$

h) $\arctan(n+2025) - \arctan(n)$

i) $\dfrac{\cos(n^4)}{n^3}$

j) $\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}$

k) $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n - \mathrm{e}$

l) $\dfrac{\tan(1/n^2)}{-\ln(1-1/n)}$

**Exercice 2** (⋆ Cou, Cal)**.** Prouver la convergence et calculer la somme des séries suivantes avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in \left]-1\,;1\right[$ :

1. $\sum \frac{1-\mathrm{e}}{\mathrm{e}^n}$
2. $\sum \left(\frac{2}{n(n+1)} - \frac{5}{3^n}\right)$
3. $\sum x^n \sin(n\theta)$
4. $\sum \dfrac{9}{10^{n+1}}$
5. $\sum \dfrac{3^n}{n!}$
6. $\sum \dfrac{(-1)^n}{(n+2)!}$
7. $\sum \dfrac{n^2}{n!}$

**Exercice 3** (⋆⋆ Rec, Cou, Cal)**.** Soit $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On pose $v_n = \dfrac{x^n}{n!}$.

1. Si $x \neq 0$, déterminer la limite de $\left(\dfrac{v_{n+1}}{v_n}\right)_n$. En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geqslant n_0$, $|v_{n+1}| \leqslant \dfrac{|v_n|}{2}$
2. Montrer que pour $n \geqslant n_0$, $|v_n| \leqslant \dfrac{|v_{n_0}|}{2^{n-n_0}}$, en déduire la limite de $(v_n)_n$.
3. Montrer que $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} \exp(t)\,\mathrm{d}t$.
4. En conclure que la série $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et que sa somme vaut $\mathrm{e}^x$.

**Exercice 4** (⋆⋆ Rai, Rec)**.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on suppose que $u_n = \mathcal{O}(\dfrac{1}{n^2})$, montrer qu'à partir d'un certain rang $|u_n|n^2 \leqslant 1$, en déduire que $\sum u_n$ converge. En déduire la convergence de $\sum \dfrac{1}{n^2 \ln^{2025}(n)}$, $\sum n^{2025}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

**Exercice 5** (⋆⋆ Rai ©)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite réelle.

1. Si $(u_n)_n$ est positive et que $\sum u_n$ converge. Montrer que $\sum {u_n}^2$ converge.
2. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Si $\sum u_n$ converge absolument, montrer que $\sum {u_n}^2$ converge.

**Exercice 6** (⋆⋆ Rai, Rec)**.** Soient $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}_+^{*2}$, nature de $\sum \dfrac{\alpha^n}{\beta^n + n}$.

## Séries à termes positifs

**Exercice 7** (⋆ Rai ©)**.** Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes. Montrer que $\sum \sqrt{u_n v_n}$ converge.

**Exercice 8** (𝄞⋆⋆ Rai)**.**

1. Soit $\alpha > 1$, pour $n \geqslant 2$, en comparant $\dfrac{1}{n^\alpha}$ à $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, montrer que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.
2. Soit $\alpha \in \left]0\,;1\right[$, pour $n \geqslant 2$, en comparant $\dfrac{1}{n^\alpha}$ à $\displaystyle\int_{n}^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, montrer que $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge.
3. Toujours dans le cas où $\alpha \in \left]0\,;1\right]$, en comparant $\dfrac{1}{n^\alpha}$ à $\displaystyle\int_{n}^{n+1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ et à $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$, détermine un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^\alpha}$.

**Exercice 9** (𝄞⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit $(v_n)_n$ une suite de réels strictement positifs et $r > 0$.

1. Si pour tout $n \geqslant n_0$, $v_{n+1} \leqslant r v_n$ (resp. $\geqslant$), montrer que pour tout $n \geqslant n_0$, $v_n \leqslant r^{n-n_0} v_{n_0}$. (resp. $\geqslant$)

Soit $(u_n)_n$ une suite de réels non nuls tel que $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

2. Si $\ell < 1$, montrer que $\sum u_n$ converge.
3. Si $\ell > 1$, montrer que $\sum u_n$ diverge.
4. Montrer que si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.

**Exercice 10** (⋆⋆ Rai, Rec)**.** Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.

**Exercice 11** (𝄞⋆⋆ Rec, Rai ©)**.** Soit $\sum u_n$ une série convergente, où $(u_n)_n$ est une suite positive décroissante. Montrer que $nu_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

**Exercice 12** (⋆⋆ Rai ©)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite strictement positive, on suppose que $\sqrt[n]{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell$.

1. Si $\ell < 1$, montrer que $\sum u_n$ est convergente.
2. Si $\ell > 1$, montrer que $\sum u_n$ est divergente.

**Exercice 13** (⋆⋆ Rai ©)**.** Soient $\sum u_n$, $\sum v_n$ et $\sum w_n$ trois séries réelles.

1. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ convergent, montrer que $\sum v_n$ converge.
2. Redémontrer qu'une série réelle absolument convergente converge.

**Exercice 14** (⋆ Cal ©)**.** En admettant que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. Après avoir justifier que ces séries convergent, calculer :

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n)^2}$
2. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^2}$

## Divers

**Exercice 15** (⋆⋆ Rai)**.** Soit $(u_n)_n$ une suite à termes positifs décroissante et tendant vers 0. On pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k u_k$.

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ convergent vers la même limite.
2. En déduire que $\sum (-1)^n u_n$ converge.
3. Montrer que $\sum (-1)^n \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si $\alpha > 0$.

**Exercice 16** (⋆⋆ Rai, Cal)**.**

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^1 t^k \, \mathrm{d}t$.
2. En utilisant la question précédente, démontrer $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge et déterminer sa somme.

**Exercice 17** (⋆⋆ Rai)**.** Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries avec $\sum v_n$ une série à termes strictement positifs. Supposons que $\sum v_n$ diverge, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $S'_n = \sum\limits_{k=0}^{n} v_k$.

1. Si $u_n = \mathcal{O}(v_n)$, montrer que $S_n = \mathcal{O}(S'_n)$
2. Si $u_n \sim v_n$, montrer que $S_n \sim S'_n$

**Exercice 18** (⋆⋆⋆⋆ Rec)**.** Soit[1] $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection.

1. Soit $\sum u_n$ une série réelle à termes positifs convergente. Montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
2. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente, montrer que $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
3. Soit $\sum u_n$ une série réelle convergente mais non absolument convergente comme $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$.
   (a) Montrer que[2] $\sum {u_n}^+$ et $\sum {u_n}^-$ sont toutes les deux divergentes.
   (b) Soit $x \in \mathbb{R}$, construire $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection telle que $x = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.
   (c) Construire $\sigma \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection telle que $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$.
   *On peut aussi construire $\sigma$ telle que* $\sum\limits_{k=0}^{n} u_{\sigma(k)} \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$.
4. Conclure que les séries c'est vachement bizarre quand même.

1. Sont autorisés à chercher cet exercice seulement ceux qui ont déjà fait au moins 9 exercices de ce TD.
2. Si $x \in \mathbb{R}$, $x^+ = \max(x, 0)$ et $x^- = -\min(0, x)$ sont les parties positives et négatives de $x$, $x = x^+ - x^-$ et $|x| = x^+ + x^-$.