## Intégrale sur un segment

**Exercice 1** ($\star$ Cou ©)**.** Dériver (si possible) $x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{\mathrm{e}^{x}} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 2** (𝄞$\star\star$ Rai ©)**.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $(f,g) \in \mathscr{C}^0([\,a\,;b\,],\mathbb{R})^2$ avec $g$ positive. Montrer qu'il existe $c \in [\,a\,;b\,]$ tel que $\displaystyle\int_a^b fg = f(c)\int_a^b g$

**Exercice 3** ($\star$ Cou, Mod ©)**.** Étudier la limite de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{n^2}\mathrm{e}^{-k/n}$.

**Exercice 4** ($\star\star\star$ Rec)**.** Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, où, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{n\sin(x)}{x+n}\,\mathrm{d}x$

**Exercice 5** (𝄞$\star\star$ Rai Cal)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on note $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$

1. Montrer que $W_n > 0$.
2. Montrer que $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
4. En intégrant par parties $W_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+1}(t) \times \cos(t)\,\mathrm{d}t$, démontrer que $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$
5. En déduire une expression de $W_{2n}$ et de $W_{2n+1}$.
6. Montrer que la suite $(W_nW_{n+1}(n+1))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et en déduire sa valeur.
7. Montrer que $W_{n+1} \underset{+\infty}{\sim} W_n$
8. Montrer finalement que $W_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$
9. En admettant qu'il existe $C > 0$ tel que $n! \sim C\left(\dfrac{n}{e}\right)^n\sqrt{n}$, déterminer la valeur de $C$.

## Convergence des intégrales

**Exercice 6** ($\star$ Cou ©)**.** Étudier la nature des intégrales (avec $a$ et $b$ des réels strictement positifs)

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)^3}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x+2-\sqrt{x^2+4x+1}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{t}{\ln(t)}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^{-\ln(x)}\,\mathrm{d}x$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{3+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{4t^3+\cos(\ln(8+\arctan(\mathrm{e}^{t})))}$
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t$
9. $\star\star$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)-1}{t^2}\,\mathrm{d}t$
11. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t-1}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 7** ($\star$ Cal)**.** Monter la convergence des intégrales et calculer leur valeur.

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t(1+t)}\,\mathrm{d}t$
2. $\star\star$ $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{\sqrt{1-t}}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{t}\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{t}}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^{t}+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1-t^2)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\cos(t)\,\mathrm{d}t$
7. $\displaystyle\int_0^{1} t^n\ln(t)\,\mathrm{d}t$ où $n \in \mathbb{N}$.
8. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+9}\,\mathrm{d}t$.
10. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

**Exercice 8** ($\star$ Cal ©)**.**

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.
2. Comparer $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.
3. Que vaut $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ ?

**Exercice 9** ($\star\star\star$ Rec, Rai ©)**.**

1. Justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3(t)}{t^2}\mathrm{d}t$ converge. On note $I$ sa valeur.
2. Linéariser $\sin^3(x)$
3. Montrer que $I = \dfrac{3}{4}\displaystyle\lim_{x\to 0}\int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$

loic.devilliers@proton.me

4. Montrer que $t \mapsto \dfrac{\sin(t)-t}{t^2}$ est prolongeable par continuité en 0.
5. En déduire $I$.

**Exercice 10** ($\star\star\star$ Rai). 1. Soit $f$ une fonction continue sur $[\,a\,;+\infty\,[$, soit $\alpha > 1$, montrer que si $x^{-\alpha}f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge.

2. Montrer que si $x^{-\alpha}f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$ avec $\alpha \in \,]\,0\,;1\,[$. alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ diverge
3. Nature[1] de $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln^\beta(x)}\,\mathrm{d}x$ en fonction de $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.
4. Nature de $\displaystyle\int_0^{\mathrm{e}^{-1}} \frac{1}{x^\alpha |\ln(x)|^\beta}\,\mathrm{d}x$ en fonction de $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$.

**Exercice 11** ($\star\star$ Rai, Cal). 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$ converge.

2. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une relation entre $I_{n+1}$ et $I_n$.
3. Déterminer la valeur de $I_n$.

**Exercice 12** ($\star\star\star$ Rec ©). Nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(x^2)\,\mathrm{d}x$.

**Exercice 13** (𝄞$\star$ Rai ©). Pour $x\in\mathbb{R}$,

1. Démontrer qu'il existe $A>0$ tel que pour tout $t \geqslant A$, $t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \leqslant \dfrac{1}{t^2}$
2. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_A^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
3. Étudier la convergence de $\displaystyle\int_0^{A} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On en conclut que pour tout $x>0$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge, on note $\Gamma(x)$ la valeur de cette intégrale.

4. Soit $x>0$, exprimer $\Gamma(x+1)$ en fonction de $\Gamma(x)$.
5. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, calculer $\Gamma(n)$.
6. À l'aide de la valeur de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$, calculer $\Gamma(1/2)$.

**Exercice 14** ($\star\star$ Rai). Étudier en fonction de $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$, la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha(1+x^\beta)}\,\mathrm{d}x$.

# Intégrales absolument convergentes

**Exercice 15** (𝄞$\star\star$ Rec ©). Considérons l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$

1. Montrer que cette intégrale converge l'aide d'une intégration par parties. On note $D$ sa valeur.
2. Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![\,1\,;n\,]\!]$ on a $\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} |\sin(t)| \geqslant 2$.
3. Montrer que pour tout $N\in\mathbb{N}^*$ on a $\displaystyle\int_0^{N\pi} \left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}$
4. En déduire que l'intégrale ne converge pas absolument.

$D$ est donc un exemple d'intégrale convergente mais qui ne converge pas absolument.

5. Soit $n\in\mathbb{N}$, on note $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ et $J_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)t)}{t}\,\mathrm{d}t$. Justifier que $I_n$ et $J_n$ sont bien définies pour tout $n\in\mathbb{N}$.
6. Calculer, pour tout $n\in\mathbb{N}$,$I_{n+1}-I_n$ puis montrer que $I_n = \dfrac{\pi}{2}$.

   On rappelle que $\sin a - \sin b = 2\sin\dfrac{a-b}{2}\cos\dfrac{a+b}{2}$.
7. Soit $\varphi$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$, à l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin((2n+1)t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$
8. Montrer que la fonction $\varphi : t\mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$ est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[\,0\,;\dfrac{\pi}{2}\,\right]$. En déduire que $J_n - I_n \xrightarrow[n\to\infty]{} = 0$.

1. Appelées *intégrales de Bertrand*, ne sont pas au programme.

9. En utilisant un changement de variable, montrer que $J_n \xrightarrow[n\to\infty]{} D$ puis en déduire la valeur de $D$.

**Exercice 16** (⋆⋆ Rai)**.** Soit $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{a^2+t^2}$ où $a \neq 0$.

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge absolument.

On pose $g(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2. Calculer $g(1)$
3. Calculer $g(a)$ pour $a \neq 0$

**Exercice 17** (⋆⋆ Cou, Rai, Rec ©)**.** On note $L^1(I)$ l'ensemble des fonctions $f$ continues sur $I$ telles que $\displaystyle\int_I f$ converge absolument et $L^2(I)$ l'ensemble des fonctions $f$ continue sur $I$ telles que $\displaystyle\int_I f^2$ converge.

1. Montrer que $L^2(I)$ est un espace vectoriel.
2. Montrer $L^2(]\,0\,;1\,[) \subset L^1(]\,0\,;1\,[)$.
3. Est-ce que $L^2(I) \subset L^1(I)$ pour n'importe quel intervalle $I$ ?

## Divers

**Exercice 18** (⋆⋆⋆ Rai, Rec ©)**.** Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe un unique $a(x) \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_x^{a(x)} \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t = 1$, montrer que $x \mapsto a(x)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donner un équivalent de $a(x)$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**Exercice 19** (𝄞⋆⋆ Rec, Rai)**.** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [\,-1\,;1\,]$, $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$.

1. Dans $E = \mathscr{C}^0([\,-1\,;1\,], \mathbb{R})$ on pose $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ montrer que l'intégrale définissant $\langle f, g\rangle$ converge.
2. Montrer que pour tout $(f,g) \in E^2$, $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^{\pi} f(\cos(\theta))g(\cos(\theta))\mathrm{d}\theta$.
3. Montrer que $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [\,-1\,;1\,]$.
4. Montrer que $\langle T_n, T_m\rangle = 0$ si $n \neq m$.
5. Calculer $\langle T_n, T_n\rangle$.
6. Montrer que la famille $(T_0, T_1, \ldots, T_n)$ est libre.

**Exercice 20** (𝄞⋆⋆⋆ Rai, Cal, Rec ©)**.** Dans cet exercice, on reprendra les notations et les résultats de l'exercice 5.

1. Démontrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ converge.
2. Montrer que pour tout $x > -1$, $\ln(1+x) \leqslant u$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
4. En déduire que $\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$
5. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x^2} \leqslant \left(1 + \dfrac{x^2}{n}\right)^{-n}$
6. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ et $B \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t = \sqrt{n}\int_0^{B} \cos^{2p}(t)\,\mathrm{d}t$.
7. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}$
8. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ puis celle de $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\,\mathrm{d}x$.