Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2. 1. Par définition $0 \in \mathrm{Sp}(A)$ si et seulement si il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = 0X = 0_{n,1}$ si et seulement si il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\backslash\{0_{n,1}\}$ tel que $X \in \mathrm{Ker}A$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0_{n,1}\}$ si et seulement si A n'est pas inversible. Où on a utilisé, par contraposée, le critère d'inversibilité d'une matrice carrée : A est inversible ssi $\mathrm{Ker}(A) = \{0_{n,1}\}$

2. Comme A inversible, on a que $\lambda \neq 0$ (en utilisant la question précédente). Comme $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, on peut dire qu'il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul tel que $AX = \lambda X$, comme A est inversible, on a $X = A^{-1}\lambda X$ et comme λ est non nul, on a $\lambda^{-1}X = A^{-1}X$, autrement dit, comme X est non nul, X est vecteur propre de A^{-1} pour la valeur propre λ^{-1}. Donc $\lambda^{-1} \in \mathrm{Sp}(A^{-1})$. On a également montré que $E_\lambda(A) \subset E_{\lambda^{-1}}(A^{-1})$. En appliquant ce résultat à A^{-1} et λ^{-1}, on a $E_{\lambda^{-1}}(A^{-1}) \subset E_{(\lambda^{-1})^{-1}}((A^{-1})^{-1}) = E_\lambda(A)$. Bref $E_{\lambda^{-1}}(A^{-1}) = E_\lambda(A)$.

Correction de l'exercice 3. 1. Montrons que N n'est pas inversible : si N était inversible, alors comme le produit de matrices inversibles est inversible N^2 est inversible, puis par récurrence, on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, N^k est inversible. En particulier, $N^p = 0_n$ est inversible ce qui est absurde. Ainsi, N n'est pas inversible.

2. Soit N une matrice nilpotente, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(N)$ et soit X un vecteur propre de N, on a $NX = \lambda X$ avec $X \neq 0$. Posons, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(k)$: «$N^kX = \lambda^kX$». Pour $k = 0$, $N^0X = X = \lambda^0X$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $k \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie, alors $N^{k+1}X = N(N^kX) = N(\lambda^kX) = \lambda^kNX = \lambda^k\lambda X = \lambda^{k+1}X$. Donc $\mathscr{P}(k+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $N^kX = \lambda^kX$, en particulier $0 = N^pX = \lambda^pX$. Soit $\lambda^pX = 0$, comme X n'est pas un vecteur nul, on en déduit que $\lambda^p = 0$ et donc que $\lambda = 0$. Autrement dit $\mathrm{Sp}(N) \subset \{0\}$. Comme N n'est pas inversible, en utilisant le résultat de l'exercice 2, 0 est une valeur propre de N donc $\{0\} \subset \mathrm{Sp}(N)$.

3. Soit N une matrice nilpotente et diagonalisable. Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $P^{-1}NP = D$ avec D une matrice diagonale dont la diagonale contient les valeurs propres de N, d'après la question précédente, $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$. Ainsi D est une matrice diagonale dont la diagonale est nulle, par suite $D = P^{-1}NP = 0_n$, donc $N = P0_nP^{-1} = 0_n$.
Réciproquement, la matrice nulle est nilpotente et diagonalisable.

Correction de l'exercice 4. Soient $\lambda \in \mathrm{Sp}(\Psi)$ et f un vecteur propre associé, on a donc $\Psi(f) = \lambda f$. En évaluant cette expression en 0, on a que $0 = \Psi(f)(0) = \lambda f(0)$. Soit $\lambda = 0$ ou $f(0) = 0$. Dérivons l'expression $\Psi(f) = \lambda f$, on a donc $f = \lambda f'$. Si $\lambda = 0$, on obtient que $f = 0$ ce qui est absurde car f est supposé un vecteur propre donc non nul. Donc $\lambda \neq 0$, en particulier $f(0) = 0$, et $f' = \lambda^{-1}f$. En résolvant cette équation différentielle d'ordre 1, on a qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = Ae^{\lambda^{-1}x}$. Mais comme $f(0) = 0 = A$, on obtient que $f = 0$ ce qui est impossible car f est un vecteur propre. Conclusion il n'existe pas de valeur propre de Ψ, car il n'y a pas de vecteur propre de Ψ, $\mathrm{Sp}(\Psi) = \varnothing$.

Correction de l'exercice 5. Considérons le vecteur non nul $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui ne contient que des 1. Si on fait MX on obtient un vecteur dont les coordonnées sont la somme des éléments de chaque ligne de M, on se dit qu'on ne doit pas être trop loin, il y a juste une interversion colonnes/lignes. Qu'à cela ne tienne, faisons $M^\top X$, on obtient alors $M^\top X = X$. On a donc montré que $1 \in \mathrm{Sp}(M^\top)$. Or, on se rappelle que M et $M^\top$ ont même spectre, donc $1 \in \mathrm{Sp}(M)$.

Correction de l'exercice 6. 1. Supposons que B ne soit pas inversible. Alors son noyau n'est pas réduit à $\{0\}$. Ainsi il existe $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nul. $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^\top$. Notons $E = \{|x_i|,\ i \in [\![1\,; n]\!]\}$, E est un ensemble fini. Soit $i_0 \in [\![1\,; n]\!]$ tel que $|x_{i_0}| = \max(E)$. Comme $BX = 0$, on a, en particulier,

$$\sum_{k=1}^{n} b_{i_0,k}x_k = 0$$

Isolons le terme $k = i_0$ et passons au module, on a

$$|b_{i_0,i_0}| \times |x_{i_0}| = |b_{i_0,i_0}x_{i_0}| \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i_0}}^{n} |b_{i_0,k}| \times |x_k| \leqslant \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i_0}}^{n} |b_{i_0,k}| \times |x_{i_0}|$$

En simplifiant par x_{i_0} qui est non nul (car on a supposé $X \neq 0$), on obtient une contradiction avec le fait que $|b_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |b_{i,j}|$. Ainsi B est inversible.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, alors la matrice $B = A - \lambda I_n = (b_{i,j})_{i,j}$ n'est pas inversible, en utilisant la question précédente par contraposée, on en déduit qu'il existe $i \in [\![1 ; n]\!]$ tel que $|b_{i,i}| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |b_{i,j}|$. En utilisant la définition de la matrice B, on obtient $|a_{i,i} - \lambda| \leqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$, autrement dit $\lambda \in D(a_{i,i}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|)$ [1]. D'où

$$\lambda \in \bigcup_{i \in [\![1 ; n]\!]} D\left(a_{i,i}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|\right)$$

Et ce pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, soit

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{i \in [\![1 ; n]\!]} D\left(a_{i,i}, \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|\right)$$

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice diagonalisable qui n'a qu'une seule valeur propre λ, alors il existe P une matrice inversible telle que $P^{-1}AP = D$ avec D une matrice diagonale, dont les éléments sont des valeurs propres. Comme A n'a qu'une seule valeur propre λ, on en déduit que $D = \lambda I_n$, puis que $P^1 AP = \lambda I_n$ et donc que $A = P\lambda I_n P^{-1}$, or P et λI_n commutent, donc $A = \lambda I_n P P^{-1} = \lambda I_n$. Conclusion, A est nécessairement une homothétie. Réciproquement les homothéties sont diagonalisables et n'ont qu'une seule valeur propre.

Correction de l'exercice 10.

1. En utilisant qu'une matrice et sa transposée ont même rang, on obtient : pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ ssi $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$ ssi $\mathrm{rg}((A - \lambda I_n)^\top) < n$ ssi $\mathrm{rg}(A^\top - \lambda I_n{}^\top) < n$ ssi $\mathrm{rg}(A^\top - \lambda I_n) < n$ ssi $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^\top)$. On peut en conclure que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$.
2. Si A est diagonalisable, alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $D = P^1 AP$ soit diagonale. Alors $D = D^\top = P^\top A^\top (P^{-1})^\top$, posons $Q = P^\top$ une matrice inversible d'inverse $Q^{-1} = (P^{-1})^\top$. On a alors $D = QA^\top Q^{-1}$, $A^\top$ est donc diagonalisable.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12.

Correction de l'exercice 13.

1. Soient $(M, N) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, par linéarité de la trace, on a
$$\Phi(M + \lambda N) = (M + \lambda N) + \mathrm{tr}(M + \lambda N) I_n = M + \lambda N + (\mathrm{tr}(M) + \lambda \mathrm{tr}(N)) I_n = \Phi(M) + \lambda \Phi(N)$$
Donc Φ est linéaire, de plus, Φ est à valeur dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, donc $\Phi \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))$.
2. Soit $M \in \mathrm{Ker}(\Phi)$, alors $M + \mathrm{tr}(M) I_n = 0_n$, donc en passant à la trace, $\mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(\mathrm{tr}(M) I_n) = 0$. Donc $\mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(I_n)$, soit $\mathrm{tr}(M)[1 + n] = 0$. Comme $1 + n \neq 0$, $\mathrm{tr}(M) = 0$, ainsi $M + 0 = 0_n$, donc $\mathrm{Ker}(\Phi) \subset \{0_n\}$, comme Φ est linéaire, l'inclusion réciproque est toujours vraie, donc $\mathrm{Ker}(\Phi) = \{0_n\}$. Dès lors Φ est un endomorphisme injective en dimension finie donc est surjectif [2]. Finalement, $\mathrm{Im}(\Phi) = \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
3. Pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, en utilisant la linéarité de la trace.
$$\begin{array}{rcl} \Phi(\Phi(M)) & = & \Phi(M) + \mathrm{tr}(\Phi(M)) I_n \\ & = & M + \mathrm{tr}(M) I_n + \mathrm{tr}\left[M + \mathrm{tr}(M) I_n\right] I_n \\ & = & M + \mathrm{tr}(M) I_n + \left[\mathrm{tr}(M) + \mathrm{tr}(M)\mathrm{tr}(I_n)\right] I_n \\ & = & M + (n+2)\mathrm{tr}(M) I_n \\ & = & M + (n+2)\left[\Phi(M) - M\right] \\ & = & (n+2)\Phi(M) - (n+1)\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}(M) \end{array}$$

1. On appelle ces disques, les disques de Gerschgorin (mathématicien biélorusse).
2. C'est une des conséquences du théorème du rang.

Donc
$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \qquad \left(\Phi \circ \Phi - (n+2)\Phi + (n+1)\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}\right)(M) = 0_n$$
Dès lors $\left(\Phi \circ \Phi - (n+2)\Phi + (n+1)\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}\right) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$.

4.
$$\left(\Phi \circ \Phi - (n+2)\Phi + (n+1)\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}\right) = 0_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$$
En factorisant par Φ après avoir fait passé le terme Id de l'autre côté, on a :
$$\Phi \circ \left(\Phi - (n+2)\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}\right) = -(n+1)\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$$
On obtient
$$\Phi \circ \left(\frac{-1}{n+1}\left(\Phi - (n+2)\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}\right)\right) = \mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}$$
On obtient la même égalité en composant par Φ à droite, ainsi $\Phi^{-1} = \dfrac{-1}{n+1}\left(\Phi - (n+2)\mathrm{Id}_{\mathscr{M}_n(\mathbb{C})}\right)$.

Correction de l'exercice 14.

Correction de l'exercice 15.

1. Soient $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, alors
$$\begin{aligned} f(A+\lambda B) &= f\left(\begin{pmatrix} a+\lambda a' & b+\lambda b' \\ c+\lambda c' & d+\lambda d' \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (d+\lambda d') & 2(b+\lambda b') \\ 2(c+\lambda c') & (a+\lambda a') \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} d & 2b \\ 2c & a \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} d' & 2b' \\ 2c' & a' \end{pmatrix} \\ &= f(A) + \lambda f(B) \end{aligned}$$
Donc f est linéaire. De plus, pour tout $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $f(A) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Donc $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}))$.
2. Déterminons la matrice de f dans une certaine base. Considérons, par exemple, la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, $\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$. Alors
$$\begin{aligned} f(E_{1,1}) &= f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{2,2} \\ f(E_{1,2}) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{1,2} \\ f(E_{2,1}) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2E_{2,1} \\ f(E_{2,2}) &= f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,1} \end{aligned}$$
Ainsi,
$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
3. Comme A est symétrique réelle, elle est diagonalisable, donc f aussi. Comme $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$, f est inversible.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19.

Correction de l'exercice 20.

Correction de l'exercice 21.

Correction de l'exercice 22.

1. $0_{\mathscr{L}(E)}$ commute avec u de plus, si v et $w \in C(u)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$(v + \lambda w) \circ u = v \circ u + \lambda w \circ u = u \circ v + u \circ (\lambda w) = u \circ (v + \lambda w)$$

   Donc $C(u)$ est un SEV de $\mathscr{L}(E)$.
2. En utilisant l'inégalité $p^2 \geqslant p$ vraie pour tout $p \in \mathbb{N}$ et la question précédente, on obtient :

$$\dim(C(u)) \geqslant \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \dim(E_\lambda(u)) = n$$

   Où on a utilisé le fait que u était diagonalisable.

Correction de l'exercice 23.

Correction de l'exercice 24.

Correction de l'exercice 25.

Correction de l'exercice 26.

Correction de l'exercice 27.

Correction de l'exercice 28.

Correction de l'exercice 29.

Correction de l'exercice 30.

Correction de l'exercice 31.

Correction de l'exercice 32.

Correction de l'exercice 33.

Correction de l'exercice 34.

Correction de l'exercice 35.

Correction de l'exercice 36.