La correction des questions Python est disponibles sur Capytale sur https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/fe4f-8582293.

DM4 : Markov travaille à la chaîne !

1. Posons $C = AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;q]\!]$, $c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$. De sorte que $C^\top = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{j,k} b_{k,i}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant q\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$. De plus, $B^\top \in \mathscr{M}_{q,p}(\mathbb{K})$ et $A^\top \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, de sorte que $D = B^\top A^\top \in \mathscr{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;q]\!] \times [\![1\,;n]\!]$, $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{k,i} a_{j,k}$. Ainsi, D et $C^\top$ sont deux matrices de même taille dont les coefficients sont égaux, donc $D = C^\top$. D'où $B^\top A^\top = (AB)^\top$.
2. Supposons A inversible, alors $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. En utilisant la transposée $(AA^{-1})^\top = (A^{-1}A)^\top = (I_n)^\top$. D'après la question précédente, on obtient $(A^{-1})^\top A^\top = A^\top (A^{-1})^\top = I_n$. Ceci montre que $A^\top$ est inversible et que $(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top$.
3. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, alors en utilisant l'équivalence que l'on vient de montrer par contraposée et la linéarité de la transposée il vient :
$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \text{ ssi } A - \lambda I_n \text{ non inversible ssi } (A-\lambda I_n)^\top \text{ non inversible ssi } A^\top - \lambda {I_n}^\top \text{ non inversible ssi } A^\top - \lambda I_n \text{ non inversible ssi } \lambda \in \mathrm{Sp}(A^\top)$$
On peut donc en conclure que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^\top)$.
4. Posons $U = \begin{pmatrix} 1\\1\\1 \end{pmatrix}$
   - $F \subset \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   - Si $M = 0_3$, alors $MU = 0_{3,1} = 0U$. Comme $U \neq 0_{3,1}$, U est un vecteur propre de 0_3 pour la valeur propre 0. Donc $0_3 \in F$.
   - Soit $(A,B) \in F^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Comme U est vecteur propre de A, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AU = \lambda U$. De même, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $BU = \mu U$. Alors, par distributivité du produit matriciel, $(\alpha A + B)\,U = \alpha AU + BU = \alpha\lambda U + \mu U = (\alpha\lambda + \mu)U$. Comme $U \neq 0_{3,1}$, on peut en conclure que U est un vecteur propre de $\alpha A + B$ pour la valeur propre $\alpha\lambda + \mu$. Ainsi, $\alpha A + B \in F$.

   On peut en conclure que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
5. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, alors $MU = \begin{pmatrix} a+b+c\\ d+e+f\\ g+h+i \end{pmatrix}$. Ainsi, si $a+b+c = d+e+f = g+h+i$, en notant λ cette valeur commune, on a $MU = \lambda U$ et comme $U \neq 0_{3,1}$, $M \in F$. Réciproquement, si $M \in F$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $MU = \lambda U$, ainsi, par égalité des coefficients $a+b+c = \lambda = d+e+f = g+h+i$. Ainsi,
$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid \begin{cases} d+e+f &= a+b+c\\ g+h+i &= a+b+c \end{cases} \right\}$$
$$\begin{aligned} F &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c\\ a+b+c-e-f & e & f\\ a+b+c-h-i & h & i \end{pmatrix} \mid (a,b,c,e,f,g,h) \in \mathbb{R}^7 \right\}\\ &= \{a(E_{1,1}+E_{2,1}+E_{3,1}) + b(E_{1,2}+E_{2,1}+E_{3,1}) + c(E_{1,3}+E_{2,1}+E_{3,1}) + e(E_{2,2}-E_{2,1})\\ &\qquad + f(E_{2,3}-E_{2,1}) + h(E_{3,2}-E_{3,1}) + i(E_{3,3}-E_{1,3}) \mid (a,b,c,e,f,g,h) \in \mathbb{R}^7\}\\ &= \mathrm{vect}(\mathscr{B}) \end{aligned}$$
Où $\mathscr{B} = (E_{1,1}+E_{2,1}+E_{3,1}, E_{1,2}+E_{2,1}+E_{3,1}, E_{1,3}+E_{2,1}+E_{3,1}, E_{2,2}-E_{2,1}, E_{2,3}-E_{2,1}, E_{3,2}-E_{3,1}, E_{3,3}-E_{1,3})$ Ainsi, $\mathscr{B}$ est une famille génératrice de F. Soit $(a,b,c,e,f,g,h) \in \mathbb{R}^7$. Supposons $a(E_{1,1}+E_{2,1}+E_{3,1}) + b(E_{1,2}+E_{2,1}+E_{3,1}) + c(E_{1,3}+E_{2,1}+E_{3,1}) + e(E_{2,2}-E_{2,1}) + f(E_{2,3}-E_{2,1}) + h(E_{3,2}-E_{3,1}) + i(E_{3,3}-E_{1,3}) = 0_3$. Alors, $\begin{pmatrix} a & b & c\\ a+b+c-e-f & e & f\\ a+b+c-h-i & h & i \end{pmatrix} = 0_3$. Par unicité des coefficients

d'une matrice, $a=b=c=e=f=h=i=0$. Ainsi, $\mathscr{B}$ est libre, donc $\mathscr{B}$ est une base[1] de F et $\dim(F)=\mathrm{Card}(\mathscr{B})=7$.

6.
7.
8.
9.
10.
11. - Pour calculer A^{64} avec la fonction `Puissance`, il faut calculer A^{63} puis multiplier le résultat par A, ainsi calculer A^{64} demande une multiplication de plus que pour calculer A^{63}, en raisonnant par récurrence, pour calculer A^n il faut donc n multiplications. Ainsi, calculer A^{64} demande 64 multiplications.
    - Pour calculer A^{64}, avec la fonction `PuissanceBis`, il faut calculer A^{32} puis faire une multiplication. Ainsi, calculer A^{64} demande une multiplication de plus que pour calculer A^{32}. De même calculer A^{32} demande une multiplication de plus que pour calculer A^{16}. Par récurrence, calculer $A^{(2^n)}$ demande n multiplications. Ainsi, calculer A^{64} demande 6 multiplications.

    La fonction `PiussanceBis` demande donc bien moins de multiplications elle est donc plus rapide à exécuter.
12.
13. $X_1(\Omega)=\{-1,0,1\}$. Comme $(X_0=1)$ est l'évènement certain, $\mathbb{P}(X_1=1)=\mathbb{P}(X_1=1|X_0=1)=\dfrac{7}{9}$, $\mathbb{P}(X_1=0)=\mathbb{P}(X_1=0|X_0=1)=\dfrac{1}{9}$ et $\mathbb{P}(X_1=-1)=\mathbb{P}(X_1=-1|X_0=1)=\dfrac{1}{9}$.
14. Soit $(i,j)\in[\![1\,;3]\!]^2$, alors $\mathbb{P}(X_1=i,X_2=j)=\mathbb{P}(X_2=j|X_1=i)\mathbb{P}(X_1=i)$. Ainsi :
    - Pour $i=j=1$, $\mathbb{P}(X_1=1,X_2=1)=\dfrac{7}{9}\times\dfrac{7}{9}=\dfrac{49}{81}$.
    - Pour $i=1$ et $j=0$, $\mathbb{P}(X_1=1,X_2=0)=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{81}$
    - Pour $i=1$ et $j=-1$, $\mathbb{P}(X_1=1,X_2=-1)=\dfrac{1}{9}\times\dfrac{7}{9}=\dfrac{7}{81}$

    On procède de même pour les autres valeurs et on obtient le tableau suivant :

X_1 \ X_2	-1	0	1
-1	$\dfrac{2}{27}$	0	$\dfrac{1}{27}$
0	$\dfrac{1}{27}$	$\dfrac{1}{27}$	$\dfrac{1}{27}$
1	$\dfrac{7}{81}$	$\dfrac{7}{81}$	$\dfrac{49}{81}$

15. $(X_1=1)$, $(X_1=0)$ et $(X_1=-1)$ forment un système complet d'évènements, ainsi d'après la formule des probabilités totales, $\mathbb{P}(X_2=j)=\mathbb{P}(X_2=j,X_1=1)+\mathbb{P}(X_2=j,X_1=0)+\mathbb{P}(X_2=j,X_1=-1)$:
    - $\mathbb{P}(X_2=-1)=\dfrac{2}{27}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{7}{81}=\dfrac{16}{81}$.
    - $\mathbb{P}(X_2=0)=0+\dfrac{1}{27}+\dfrac{7}{81}=\dfrac{10}{81}$
    - $\mathbb{P}(X_2=1)=\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{49}{81}=\dfrac{55}{81}$
16. - X_0 est une variable aléatoire constante égale à 1, donc $\mathbb{E}(X_0)=1$ et $\mathbb{V}(X_0)=0$.
    - D'après la définition de l'espérance d'une variable aléatoire finie,

$$\mathbb{E}(X_1)=(-1)\mathbb{P}(X_1=-1)+0\mathbb{P}(X_1=0)+1\mathbb{P}(X_1=1)=-\frac{1}{9}+\frac{7}{9}=\frac{2}{3}$$

    D'après la formule de transfert,

$$\mathbb{E}({X_1}^2)=(-1)^2\mathbb{P}(X_1=-1)+0^2\mathbb{P}(X_1=0)+1^2\mathbb{P}(X_1=1)=\frac{7}{9}+\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

1. Autre façon plus rapide et élégante : considérer $(a,b,c,e,f,g,h)\mapsto\begin{pmatrix}a & b & c\\ a+b+c-e-f & e & f\\ a+b+c-h-i & h & i\end{pmatrix}$ et de montrer que cette fonction est un isomorphisme entre $\mathbb{R}^7$ et F et donc l'image de la base canonique de $\mathbb{R}^7$ par cette fonction est une base de F.

D'après la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}({X_1}^2) - \mathbb{E}(X_1)^2 = \dfrac{8}{9} - \dfrac{4}{9} = \dfrac{4}{9}$.

- De même pour X_2 : $\mathbb{E}(X_2) = \mathbb{P}(X_2 = 1) - \mathbb{P}(X_1 = -1) = \dfrac{55}{81} - \dfrac{16}{58} = \dfrac{39}{81} = \dfrac{13}{27}$, par la formule de transfert : $\mathbb{E}({X_2}^2) = \mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1) = \dfrac{71}{81}$ puis $\mathbb{V}(X_2) = \dfrac{71}{81} - \dfrac{39^2}{81^2} = \dfrac{470}{729}$.

17. D'après la formule de transfert pour les couples de variables aléatoires finies :

$$\mathbb{E}(X_1X_2) = \sum_{i=-1}^{1}\sum_{j=-1}^{1} ij\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j)$$

Or, les termes pour $i = 0$ ou $j = 0$ sont nuls, donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1X_2) &= \mathbb{P}(X_1 = X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = X_2 = -1) - \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1)\\ &= \frac{2}{27} + \frac{49}{81} - \frac{1}{27} - \frac{7}{81} = \frac{45}{81} = \frac{5}{9}\end{aligned}$$

D'après la formule de König-Huygens pour la covariance,

$$\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = \mathbb{E}(X_1X_2) - \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(X_2) = \frac{5}{9} - \frac{2}{3} \times \frac{13}{27} = \frac{45-26}{81} = \frac{19}{81}$$

Comme $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \neq 0$, on en peut en déduire que X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

18. Notons J la variable aléatoire indiquant le numéro du jours auquel votre professeur assiste au match, alors J suit une loi uniforme dans $[\![0\,;2]\!]$ et A l'évènement : «le professeur assiste à une victoire», alors $A = ((X_0 = 1) \cap (J = 0)) \cup ((X_1 = 1) \cap (J = 1)) \cup (X_2 = 1 \cap (J = 2))$, et ces évènements sont deux à deux incompatibles, ainsi $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((X_0 = 1)\cap(J = 0)) + \mathbb{P}((X_1 = 1)\cap(J = 1)) + \mathbb{P}((X_2 = 1)\cap(J = 2))$. Or, J est indépendants de X_i pour tout $i \in [\![1\,;3]\!]$, en effet, assister à un match ne change pas le résultat du match [2]. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(X_0 = 1)\mathbb{P}(J = 0) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(J = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 1)\mathbb{P}(J = 2)\\ &= 1 \times \frac{1}{3} + \frac{7}{9} \times \frac{1}{3} + \frac{55}{81} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \times \left(1 + \frac{7}{9} + \frac{55}{81}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{81+63+55}{81} = \frac{199}{243}\end{aligned}$$

19. Soit $j \in [\![0\,;2]\!]$. On cherche à calculer $\mathbb{P}(X_1 = j|X_2 = 1)$. Comme $\mathbb{P}(X_2 = 1) \neq 0$, on applique la formule de Bayes :

$$\mathbb{P}(X_1 = j|X_2 = 1) = \frac{P(X_2 = 1|X_1 = j)\mathbb{P}(X_1 = j)}{\mathbb{P}(X_2 = 1)}$$

Ainsi :

- $\mathbb{P}(X_1 = 1|X_2 = 1) = \dfrac{\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 1)\mathbb{P}(X_1 = 1)}{\mathbb{P}(X_2 = 1)} = \dfrac{\frac{7}{9} \cdot \frac{7}{9}}{\frac{55}{81}} = \dfrac{49}{55}$
- $\mathbb{P}(X_1 = 0|X_2 = 1) = \dfrac{\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = 0)\mathbb{P}(X_1 = 0)}{\mathbb{P}(X_2 = 1)} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{55}{81}} = \dfrac{3}{55}$
- $\mathbb{P}(X_1 = -1|X_2 = 1) = \dfrac{\mathbb{P}(X_2 = 1|X_1 = -1)\mathbb{P}(X_1 = -1)}{\mathbb{P}(X_2 = 1)} = \dfrac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{9}}{\frac{55}{81}} = \dfrac{3}{55}$

Ainsi, sachant que l'équipe a gagné le jour 2, le plus probable est qu'elle ait gagné au jour 1.

20.

21.

22. On note G_n l'évènement : «la classe gagne tous les jours de 0 à $n - 1$ mais pas le jour n», ainsi, $G_n = \bigcap_{i=0}^{n-1}(X_i = 1) \cap (X_n \neq 1)$. En utilisant la formule des probabilités composées,

$$\mathbb{P}(G_n) = \mathbb{P}(X_0 = 1) \times \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}\left(X_i = 1|\bigcap_{j=0}^{j-1}(X_j = 1)\right) \mathbb{P}\left(X_n \neq 1|\bigcap_{j=0}^{n-1}(X_j = 1))\right)$$

2. Sauf à penser que quand le prof est là, les élèves ont plus la pression...

Or, $\mathbb{P}(X_0 = 1)$, et si on a gagné au jour $i-1$, la probabilité de gagner le suivant est de $\frac{7}{9}$. Et si on a gagné au jour $n-1$ la probabilité de ne pas gagner le suivant est de $\frac{2}{9}$. Ainsi, $\mathbb{P}(G_n) = 1 \times \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{7}{9}\right) \times \frac{2}{9}$.
Donc, $\mathbb{P}(G_n) = \frac{2}{9} \times \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$.

23. Notons G l'évènement «la classe gagne tous tous $n \in \mathbb{N}$». Alors, $G = \bigcap_{i=0}^{+\infty}(X_i = 1)$. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $G \subset \bigcap_{i=0}^{n}(X_i = 1)$, par croissance de la probabilité, $\mathbb{P}(G) \leqslant \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n}(X_i = 1)\right) = (7/9)^n$ (en utilisant la formule des probabilités composées comme à la question précedente). Or, $(7/9)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (car $7/9 \in \,]-1\,;1\,[$). Comme les inégalités larges sont conservées par passage à la limite, $\mathbb{P}(G) \leqslant 0$. Comme $\mathbb{P}(G) \geqslant 0$, on en déduit que $\mathbb{P}(G = 0) = 0$.
24. Comme il y a une victoire au jour 0, $D(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $(D = n) = G_n$ (avec nos notations des questions précédentes), donc $\mathbb{P}(D = n) = \mathbb{P}(G_n) = \frac{2}{9} \times \left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$. Ainsi, D suit une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{9}$. Et donc, d'après le cours, $\mathbb{E}(D) = \frac{9}{2}$ (toute blague sur les «9/2» étant interdite).
25.
26. Comme D admet une espérance, les D_k aussi, par linéarité de l'espérance, S admet une espérance et $\mathbb{E}(S) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(D_k) = \frac{9}{2}$. Comme D suite une loi géométrique de paramètre $\frac{2}{9}$, D admet une variance et

$$\mathbb{V}(D) = \frac{1-\frac{2}{9}}{\left(\frac{2}{9}\right)^2} = \frac{\frac{7}{9}}{\frac{4}{81}} = \frac{63}{4}$$

Ainsi, tous les D_k ont une variance, par indépendance, S aussi et

$$\mathbb{V}(S) = \frac{1}{n^2}\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^{n} D_k\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{63}{4} = \frac{63}{4n}$$

Comme S admet une variance et $0.01 > 0$, on peut appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychef,

$$\mathbb{P}(|S - \mathbb{E}(S)| \geqslant 0.01) \leqslant \frac{\mathbb{V}(S)}{10^{-4}} = \frac{630\,000}{4n} = \frac{157\,500}{n}$$

Ainsi, pour $n = 15\,750\,000$, $\mathbb{P}(|S - \mathbb{E}(S)| \geqslant 0.01) \leqslant 0.01$. En passant au complémentaire,

$$\mathbb{P}(|S - \mathbb{E}(D)| < 0.01) = 1 - \mathbb{P}(|S - \mathbb{E}(D)| \geqslant 0.1) \geqslant 1 - 0.01 = 0.99$$

Ainsi, en simulant S, on obtiendra une valeur, qui sera une approximation de $\mathbb{E}(D)$ à 0.01 près avec une probabilité supérieure ou égale à 0.99.
27.
28. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les évènements $(X_n = 1)$, $(X_n = 0)$ et $(X_n = -1)$ forment un système complet d'évènements, ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 1)\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 0) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = -1)$$

Or, les probabilités conditionnelles sont données dans le sujet, ainsi :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \frac{7}{9}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = -1)$$

29.

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{9}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 0)$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = -1) = \frac{1}{9}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n = -1)$$

30. On pose $A = \begin{pmatrix} \frac{7}{9} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. De sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$AU_n = \begin{pmatrix} \frac{7}{9}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = -1) \\ \frac{1}{9}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 0) \\ \frac{1}{9}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = 0) + \frac{2}{3}\mathbb{P}(X_n = -1) \end{pmatrix} = U_{n+1}$$

(d'après les résultats des questions précédentes)

31. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «$U_n = A^n U_0$». Pour $n = 0$, $A^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0$ donc $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $\mathscr{P}(n)$, alors, $U_{n+1} = AU_n = A(A^n U_0) = A^{n+1}U_0$, ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

32.

33.

34. On remarque que $A = \frac{1}{9}B$, ainsi, $A^n = \left(\frac{1}{9}B\right)^n = \frac{1}{9^n}B^n$.

35. $B^\top \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} = 9 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, comme $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$, on peut en conclure que $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de $B^\top$ associée à la valeur propre 9. Donc, $9 \in \mathrm{Sp}(B^\top)$. Or, d'après la question 3, $\mathrm{Sp}(B) = \mathrm{Sp}(B^\top)$. on peut en déduire que 9 est une valeur propre de B.

36. D'après notre fonction Python, on trouve $B^2 = \begin{pmatrix} 55 & 39 & 39 \\ 10 & 12 & 3 \\ 16 & 30 & 39 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 463 & 399 & 399 \\ 85 & 75 & 48 \\ 181 & 255 & 282 \end{pmatrix}$

37. **Analyse (au brouillon)**
S'il existe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ tel que $B^3 = \alpha I_3 + \beta B + \gamma B^2$, alors en regardant le coefficient à la deuxième ligne, troisième colonne, on obtient $48 = \gamma 3$, ainsi, γ vaudrait 16. Puis en regardant le coefficient à la deuxième ligne, première colonne, on aurait $85 = \beta + 10\gamma$. Ainsi, $\beta = 85 - 160 = -75$. En regardant le coefficient à la deuxième ligne deuxième colonne on a $75 = \alpha + 3\beta + \gamma 12$. Donc $\alpha = 75 + 3 \times 75 - 12 \times 16 = 108$.

Synthèse (au propre) : posons $\alpha = 108$, $\beta = -75$ et $\gamma = 16$. Alors, $\alpha I_3 + \beta B + \gamma B^2 = \begin{pmatrix} 463 & 399 & 399 \\ 85 & 75 & 48 \\ 181 & 255 & 282 \end{pmatrix} = B^3$.

38. En utilisant la question précédent, $B^3 = \alpha I_3 + \beta B + \gamma B^2$, ainsi, $B(B^2 - \beta I_5 - \gamma B) = \alpha I_3$, or $\alpha = 108 \neq 0$, donc $B\left(\frac{1}{108}\left(B^2 - \beta I_5 - \gamma B\right)\right) = I_3$. Ceci montre que B est inversible et que

$$B^{-1} = \frac{1}{108}B^2 + \frac{-\beta}{108}I_5 + \frac{-\gamma}{108}B$$

ainsi, $B^{-1} \in \mathrm{vect}(I_3, B, B^2)$.

39. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(B)$, ainsi il existe $X \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $BX = \lambda X$ et $X \neq 0_{3,1}$. Or, $B^3 - 16B^2 + 75B - 108I_3 = 0_3$, donc en multipliant par X à droite en en développant, on obtient

$$B^3X - 16B^2X + 75BX - 108X = 0_{3,1}$$

Or, $BX = \lambda X$, donc $B^2X = B(BX) = B(\lambda X) = \lambda BX = \lambda^2 X$ et $B^3X = B(B^2X) = B(\lambda^2 X) = \lambda^2 BX = \lambda^3 X$. Donc $\lambda^3 X - 16\lambda^2 X + 75\lambda X - 108X = 0_{3,1}$, d'où $(\lambda^3 - 16\lambda^2 + 75\lambda - 108)X = 0_{3,1}$. Ainsi, $Q(\lambda)X = 0_{3,1}$, or, $X \neq 0_{3,1}$, donc $Q(\lambda) = 0$, ainsi, λ est une racine de Q.

40. D'après la question 35, 9 est une valeur propre de B, ainsi, en utilisant la question précédente, 9 est une racine de Q, ainsi, on peut factoriser Q par $X-9$. Ainsi, il existe $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $Q=(X-9)R$. Ainsi, $3=1+d^\circ R$ d'où $d^\circ R=2$, ainsi, il existe $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ tel que $Q=(X-9)(aX^2+bX+c)$. En développant et en regardant le coefficient dominant et le coefficient constant, on obtient, par unicité des coefficients $a=1$ et $-9c=-108$, donc $Q=(X-9)(X^2+bX+12)$. En développant et en regardant le coefficient devant X^2, par unicité des coefficients, on obtient $-9+b=-16$, donc $b=-7$, donc $Q=(X-9)(X^2-7X+12)=(X-9)(X-3)(X-4)$. Ainsi, $\lambda_1=9$, $\lambda_2=4$ et $\lambda_3=3$.
Warning : le raisonnement que l'on a fait, montre que si λ est une valeur propre alors λ est une racine de Q, donc $\mathrm{Sp}(B)\subset\{9,3,4\}$, mais rien ne prouve l'inclusion réciproque. On sait seulement que $9\in\mathrm{Sp}(B)$.

41. • Pour $\lambda=9$: $B-9I_3=\begin{pmatrix}-2&3&3\\1&-6&0\\1&3&-3\end{pmatrix}$. On calcule $6C_1+C_2$: $6C_1+C_2=\begin{pmatrix}-9\\0\\9\end{pmatrix}=-3C_3$. De sorte que $6C_1+1C_2+3C_3=0$, ainsi, $\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}\in E_9(B)$. Or, $\mathrm{rg}(B-9I_3)=\mathrm{rg}(C_1,C_2,C_3)\underset{C_2=-6C_1-3C_3}{=}\mathrm{rg}(C_1,C_3)=2$ (car (C_1,C_3) est une famille libre car formée de deux vecteurs non colinéaires), ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim(E_9(B))=1$, ainsi, $\left(\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}\right)$ est une famille de 1 vecteur de $E_9(B)$ qui est un espace vectoriel de dimension 1, ainsi, $\mathscr{B}_9=\left(\begin{pmatrix}6\\1\\3\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_9(B)$.

• Pour $\lambda=4$: $B-4I_3=\begin{pmatrix}3&3&3\\1&-1&0\\1&3&2\end{pmatrix}$. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$X\in\mathrm{Ker}(B-4I_3)\iff(B-4I_3)X=0_{3,1}\left\{\begin{array}{llll}3x&+3y&+3z&=0\\x&-y&&=0\\x&+3y&+2z&=0\end{array}\right.\underset{L_1\leftarrow\frac{1}{3}L_3}{\iff}\left\{\begin{array}{llll}x&+y&+z&=0\\x&-y&&=0\\x&+3y&+2z&=0\end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff}\left\{\begin{array}{llll}x&+y&+z&=0\\&-2y&-z&=0\\&+2y&+z&=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ll}z&=-2y\\x&=y\end{array}\right.$$

$$\iff X=\begin{pmatrix}y\\y\\-2y\end{pmatrix}\iff X\in\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(B-4I_3)=\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$, Dès lors, $\mathscr{B}_4=\left(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(B-4I_3)$, comme c'est une famille formée d'un seul vecteur non nul, c'est aussi une famille libre, ainsi $\mathscr{B}_4$ est une base de $\mathrm{Ker}(B-4I_3)$.

• Pour $\lambda=3$: $B-4I_3=\begin{pmatrix}4&3&3\\1&0&0\\1&3&3\end{pmatrix}$. Soit $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

$$X\in\mathrm{Ker}(B-3I_3)\iff(B-3I_3)X=0_{3,1}\left\{\begin{array}{llll}4x&+3y&+3z&=0\\x&&&=0\\x&+3y&+3z&=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{llll}&+y&+z&=0\\x&&&=0\\&+3y&+3z&=0\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{llll}x&&&=0\\&y&+z&=0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{ll}x&=0\\z&=-y\end{array}\right.$$

$$\iff X=\begin{pmatrix}0\\y\\-y\end{pmatrix}\iff X\in\mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(B-3I_3) = \mathrm{vect}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$, Dès lors, $\mathscr{B}_3 = \left(\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(B-3I_3)$, comme c'est une famille formée d'un seul vecteur non nul, c'est aussi une famille libre, ainsi $\mathscr{B}_3$ est une base de $\mathrm{Ker}(B-3I_3)$.

Ceci, montre effectivement que $\mathrm{Sp}(B) = \{9,4,3\}$, ainsi B a trois valeurs propres et est donc diagonalisable. En faisant la juxtaposition des bases des espaces propres, on obtient que $B = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\0 & 4 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix}6 & 1 & 0\\1 & 1 & 1\\3 & -2 & -1\end{pmatrix}$.

Au brouillon : on calcule BP et PD par exemple avec la fonction Python.

42. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(B-\lambda I_3) &\underset{L_1\leftrightarrow L_2}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 3-\lambda & 0\\7-\lambda & 3 & 3\\1 & 3 & 6-\lambda\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2+(\lambda-7)L_1\\L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 3-\lambda & 0\\0 & -\lambda^2+10\lambda-18 & 3\\0 & \lambda & 6-\lambda\end{pmatrix}\\
&\underset{L_2\leftarrow L_2+L_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 3-\lambda & 0\\0 & -\lambda^2+11\lambda-18 & 9-\lambda\\0 & \lambda & 6-\lambda\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 3-\lambda & 0\\0 & (\lambda-2)(9-\lambda) & 9-\lambda\\0 & \lambda & 6-\lambda\end{pmatrix}\\
&\underset{C_2\leftarrow C_2+(2-\lambda)C_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 3-\lambda & 0\\0 & 0 & 9-\lambda\\0 & \lambda^2-7\lambda+12 & 6-\lambda\end{pmatrix} \underset{L_2\leftrightarrow L_3}{=} \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 3-\lambda & 0\\0 & (\lambda-4)(\lambda-3) & 6-\lambda\\0 & 0 & 9-\lambda\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, si $\lambda \notin \{3,4,9\}$, on a une matrice échelonnée avec trois pivots et donc $\mathrm{rg}(B-\lambda I_3) = 3$. Pour $\lambda = 9$, la dernière ligne est nulle et les deux premières sont échelonnées, donc $\mathrm{rg}(B-9I_3) = 2$. Pour $\lambda = 3$ ou $\lambda = 4$, les deux dernières lignes sont colinéaires et la première est non colinéaire à la première, ainsi $\mathrm{rg}(B-3I_3) = \mathrm{rg}(B-4I_3) = 2$. Ainsi, on a démontré à nouveau que $\mathrm{Sp}(B) = \{3,4,9\}$.

43. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: «$B^n = PD^nP^{-1}$». Pour $n = 0$, $PD^0P^{-1} = PI_3P^{-1} = I_3 = B^0$ (par convention), ainsi $\mathscr{P}(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons, $\mathscr{P}(n)$ vraie, alors

$$B^{n+1} = B^nB \underset{\mathscr{P}(n)}{=} (PD^nP^{-1})(PDP^{-1}) = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}$$

Ainsi, $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = PD^nP^{-1}$.

44.

$$\begin{pmatrix}6&1&0\\1&1&1\\3&-2&-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftrightarrow L_2$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\6&1&0\\3&-2&-1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow L_2 - 6L_1$$
$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-5&-6\\0&-5&-4\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&-6&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$$

$$L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-5&-6\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}0&1&0\\1&-6&0\\-1&3&1\end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{1}{2}L_3$$
$$L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3$$

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-5&0\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\-2&3&3\\-1&3&1\end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{5}L_2$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-5&0\\0&0&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{10}&\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\\-2&3&3\\-1&3&1\end{pmatrix}$$

$$L_2 \leftarrow -\frac{1}{5}L_2$$
$$L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_3$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}\frac{1}{10}&\frac{1}{10}&\frac{1}{10}\\\frac{2}{5}&-\frac{3}{5}&-\frac{3}{5}\\\frac{-1}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Ainsi, $P^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{pmatrix}1&1&1\\4&-6&-6\\-5&15&5\end{pmatrix}$.

45. $D^n = \begin{pmatrix}9^n&0&0\\0&4^n&0\\0&0&3^n\end{pmatrix} = 9^nE_{1,1} + 4^nE_{2,2} + 3^nE_{3,3}$. Ainsi, d'après la question 43,

$$B^n = P(9^nE_{1,1} + 4^nE_{2,2} + 3^nE_{3,3})P^{-1}$$

En développant par distributivité, on obtient,

$$B^n = 9^nPE_{1,1}P^{-1} + 4^nPE_{2,2}P^{-1} + 3^nPE_{3,3}P^{-1}$$

Dès lors, $B^n = 9^nC + 4^nE + 3^nF$ avec $C = PE_{1,1}P^{-1}$, $E = PE_{2,2}P^{-1}$ et $F = PE_{3,3}P^{-1}$. On pose $R = 10P^{-1} = \begin{pmatrix}1&1&1\\4&-6&-6\\-5&15&5\end{pmatrix}$. Ainsi, en faisant les produits par Python :

- $C = \frac{1}{10} P E_{1,1} R = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
- $E = \frac{1}{10} P E_{2,2} R = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 4 & -6 & -6 \\ 4 & -6 & -6 \\ -8 & 12 & 12 \end{pmatrix}$
- $F = \frac{1}{10} P E_{3,3} R = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & 15 & 5 \\ 5 & -15 & -5 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $B^n = \frac{9^n}{10}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \frac{4^n}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \\ -4 & 6 & 6 \end{pmatrix} + \frac{3^n}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

46. En utilisant le résultat de la question 34 puis celui de la question précédente, on obtient que

$$A^n = \frac{1}{9^n} B = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 & -3 & -3 \\ 2 & -3 & -3 \\ -4 & 6 & 6 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

47. On sait que $U_n = A^n U_0$ avec $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ainsi, en utilisant l'expression de A^n et en distribuant le produit par X_0, il vient $U_n = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\cdot 3^n}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, par unicité des coefficients :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = 1) &= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} \\
\mathbb{P}(X_n = 0) &= \frac{1}{10} + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} - \frac{1}{2\cdot 3^n} \\
\mathbb{P}(X_n = -1) &= \frac{3}{10} - \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} + \frac{1}{2\cdot 3^n}
\end{aligned}$$

48. Comme $2/3 \in \,]-1\,;1[$ et $1/3 \in \,]-1\,;1[$, $(2/3)^{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ et $1/3^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, $\mathbb{P}(X_n = 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 3/5$, $\mathbb{P}(X_n = 0) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{10}$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{3}{10}$.

49. Comme X_n est une variable aléatoire finie,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_n) &= -1\mathbb{P}(X_n = -1) + 0\mathbb{P}(X_n = 0) + 1\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = -1) \\
&= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} - \frac{3}{10} + \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} - \frac{1}{2\cdot 3^n} \\
&= \frac{3}{10} + \frac{6}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} - \frac{1}{2\cdot 3^n}
\end{aligned}$$

D'après la formule de transfert,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}({X_n}^2) &= (-1)^2\mathbb{P}(X_n = -1) + 0^2\mathbb{P}(X_n = 0) + 1^2\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = -1) \\
&= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} + \frac{3}{10} - \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} + \frac{1}{2\cdot 3^n} \\
&= \frac{9}{10} - \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2n} + \frac{1}{2\cdot 3^n}
\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la formule de König-Huygens, $\mathbb{V}(X_n) = \mathbb{E}({X_n}^2) - \mathbb{E}(X_n)^2$

50. Par linéarité de l'espérance, S_n admet une espérance et en utilisant la linéarité de la somme et la somme des termes de suites géométriques :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(S_n) &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\mathbb{E}(X_k)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{3}{10}+\frac{6}{5}\left(\frac{4}{9}\right)^k-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\frac{3}{10}+\frac{6}{5(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{4}{9}\right)^k-\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k\\
&= \frac{3}{10}+\frac{6}{5(n+1)}\frac{1-(4/9)^{n+1}}{5/9}-\frac{1}{2(n+1)}\frac{1-(1/3)^{n+1}}{2/3}
\end{aligned}$$

Comme, $\dfrac{6}{5(n+1)}\dfrac{1-(4/9)^{n+1}}{5/9}-\dfrac{1}{2(n+1)}\dfrac{1-(1/3)^{n+1}}{2/3}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$, $\mathbb{E}(S_n)\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{3}{10}\neq 0$. On peut en conclure que $\mathbb{E}(S_n)\sim 3/10$.