Chapitre 10

Variables aléatoires à densité

Les variables aléatoires que nous avons connu jusqu'à là étaient soit finies soit dénombrables, elles pouvaient prendre un nombre infini de valeurs mais dénombrables, on avait donc des variables aléatoires dont l'univers image pouvait être un des ensembles parmi $[\![1\,;n]\!]$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$. Mais il était impossible d'avoir dans ce cadre, des variables aléatoires qui prenaient des valeurs aléatoires dans $[\,0\,;1\,]$ (car cet ensemble n'est pas dénombrable). De plus, le prochain chapitre montrera que des variables aléatoires dont l'univers image est $\mathbb{R}$ arrive naturellement même à partir de variables aléatoires discrètes.

Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient une animation, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

1 Densité d'une variable aléatoire 2

2 Indépendances de variables aléatoires 3

3 Espérance 4

4 Variance 5

5 Loi normale 6

6 Tableau comparatif des trois types de variables aléatoires 7

7 Tableau récapitulatif des lois usuelles 8

8 Tracés des lois et des fonctions de répartition de variables discrètes 9

1 Densité d'une variable aléatoire

Définition d'une densité de probabilité

On dit que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une **densité de probabilité** si f est continue sauf en un nombre fini de points, f est positive, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

Exemples 1.
- Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f\colon x \mapsto \dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[\,a\,;\,b\,]}(x)$ est une densité de probabilité.
- Pour $\lambda > 0$, $g\colon x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ est une densité de probabilité.

Définition d'une variable aléatoire à densité

On dit qu'une variable aléatoire X est **à densité** s'il existe une densité de probabilité f telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$. La fonction f est appelée densité de X.

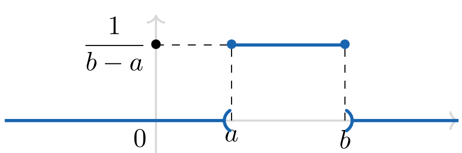
Remarques 1.
- Modifier la valeur de f en un nombre fini de points ne change pas la valeur de l'intégrale de f sur $]\,-\infty\,;x\,]$, il n'y a pas unicité de la densité.
- Pour des variables aléatoires à densité, trouver la loi c'est en trouver une densité.

Proposition n° 1 : existence d'une variable aléatoire à densité fixé *(admis)*

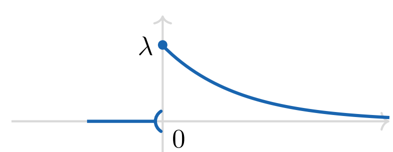
Soit f une densité de probabilité, alors il existe X une variable aléatoire à densité dont f est une densité.

Définition de variables aléatoires usuelles à densité

1. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[\,a\,;\,b\,]$ (où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$) si $t \mapsto \dfrac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[\,a\,;\,b\,]}(t)$ est une densité de X. On note $X \sim \mathscr{U}([\,a\,;\,b\,])$.
2. On dit que X suit une **loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ si $t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une densité de X. On note $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$



Densité de la loi uniforme sur $[\,a\,;\,b\,]$



Densité de la loi exponentielle de paramètre λ.

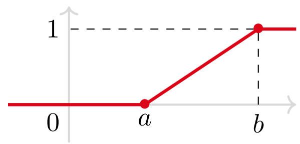
Remarque 2. Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, alors pour tout $(s,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\mathbb{P}(X > s+t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$. On dit qu'il y a absence de mémoire ou d'invariance temporelle.

Proposition n° 2 : régularité de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité

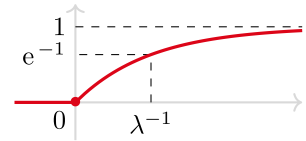
Soit X une variable aléatoire de densité f. Si f est continue en x, alors F_X est dérivable en x et $F_X'(x) = f(x)$.

Exemples de fonctions de répartition des variables aléatoires usuelles à densité

1. Si $X \sim \mathscr{U}([\,a\,;\,b\,])$, alors $F_X : x \mapsto \dfrac{x-a}{b-a}\mathbb{1}_{[\,a\,;\,b\,]}(x) + \mathbb{1}_{]\,b\,;\,+\infty\,[}(x)$.
2. Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, alors $F_X : x \mapsto (1 - \mathrm{e}^{-\lambda x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ *(ne pas oublier les parenthèses)*



Fonction de répartition la loi uniforme sur $[\,a\,;b\,]$.



Fonction de répartition la loi exponentielle

Proposition n° 3 : CNS pour qu'une variable aléatoire soit à densité *(admis)*

Une VA X admet une densité ssi F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.

Exemple 2. Soit X une VA dont la fonction de répartition est $F\colon x \mapsto \dfrac{x^4}{256}\mathbb{1}_{[\,0\,;\,4\,]}(x) + \mathbb{1}_{]\,4\,;\,+\infty\,[}(x)$. Montrer que X est à densité et donner une densité de X.

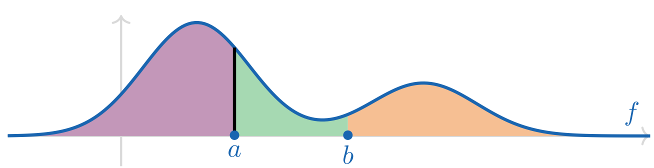
Comment passer de la densité à la fonction de répartition d'une variable à densité et vice-et-versa ?

- Si on connaît f densité de X, alors la fonction de répartition s'obtient en intégrant : $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
- Si on connaît F_X, la fonction de répartition. Si F_X est dérivable en x alors $f(x) = F_X'(x)$, si F_X est non dérivable en x, alors on peut prendre $f(x) = 0$ (ou bien $f(x) = 18$).

Proposition n° 4 : calcul de probabilité pour une variable aléatoire à densité

Soit X une VA dont f est une densité et F sa fonction de répartition. Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$:

1. $\mathbb{P}(X = a) = 0$
2. $\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leqslant a) = F(a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{a} f$
3. $\mathbb{P}(X \geqslant b) = \mathbb{P}(X > b) = 1 - F(b) = \displaystyle\int_{b}^{+\infty} f$
4. $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leqslant x \leqslant b) = \mathbb{P}(a < X \leqslant b) = \mathbb{P}(a \leqslant X < b) = \displaystyle\int_{a}^{b} f$



Attention la valeur de $\mathbb{P}(X = x)$ ne caractérise pas la loi d'une variable aléatoire à densité

Contrairement aux VA discrètes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$, et cela ne donne pas d'information sur X.
Une VA à densité est caractérisée soit par «sa» densité soit par sa fonction de répartition.
Une VA discrète est caractérisée soit par $x \mapsto \mathbb{P}(X = x)$ soit par sa fonction de répartition.

Exemples 3. Soit $X \sim \mathscr{U}([\,0\,;1\,])$

1. Si $0 < c < d < 1$, que vaut $\mathbb{P}(c \leqslant X \leqslant d)$?
2. Montrer que $Y = X^2$ est à densité et déterminer une densité et F_Y. Calculer $\mathbb{P}(-1/2 \leqslant Y \leqslant 1/2)$
3. Pour $\lambda > 0$, on pose $Z = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1 - X)$, déterminer la loi de Z.

Remarques 3.

- Soit X une variable aléatoire discrète (finie ou infinie), alors X n'est pas une variable à densité.
- Si X est une VA à densité, alors $Y = aX + b$ aussi si $a \neq 0$.

2 Indépendances de variables aléatoires

Remarque 4. Si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ est une famille de VA indépendantes, alors toute sous-famille est indépendante.

Lemme des coalitions *(admis)*

Si $X_1, \ldots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_n)$ et $g(X_{n+1}, \ldots, X_{n+p})$ sont indépendantes.

Remarque 5. On peut faire plus de deux coalitions : les variables aléatoires $f(X_1,\ldots,X_4)$, $g(X_5,\ldots,X_8)$, $h(X_9,X_{10})$, ..., $m(X_{20},\ldots,X_{25})$ sont indépendantes. De même, $u_1(X_1)$, $u_2(X_2),\ldots,u_n(X_n)$ sont indépendantes.

Théorème n° 1 : densité de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes *(admis)*

Soient X et Y deux VA indépendantes de densité respective f et g. La fonction $f*g\colon x\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$, appelée **produit de convolution** est bien définie et $X+Y$ est une VA à densité dont $f*g$ est une densité.

Exemples 4.

- Déterminer la loi de $X+Y$ où $X\sim\mathscr{U}([\,0\,;1\,])$ et $Y\sim\mathscr{U}([\,0\,;1\,])$ sont indépendantes.
- Pour les mêmes X et Y, déterminer la loi de $\max(X,Y)$
- Soit $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ une famille de VA indépendantes suivant toutes une loi uniforme sur $[\,0\,;1\,]$, déterminer la loi de $\min(X_1,X_2,\ldots,X_n)$.

3 Espérance

Définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité

On dit que X **admet une espérance** si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ converge absolument, on définit alors l'**espérance** de X par : $\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$. On dit que X est **centré** si X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X)=0$.

Exemples d'espérance des variables aléatoires usuelles à densité

1. Si $X\sim\mathscr{U}([\,a\,;b\,])$, alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X)=\dfrac{a+b}{2}$
2. Si $X\sim\mathscr{E}(\lambda)$ alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Exemple 5. Pour $t<1$, on pose $f(t)=0$ et pour $t\geqslant 1$, $f(t)=\dfrac{1}{t^2}$, soit X une variable aléatoire admettant f comme densité, est-ce que X admet une espérance ?

Proposition n° 5 : propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des espérances et $\lambda\in\mathbb{R}$ alors :

1. $\lambda X+Y$ admet une espérance et $\mathbb{E}(\lambda X+Y)=\lambda\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$ *linéarité de l'espérance (admise)*
2. Si $X\geqslant 0$ (pour tout $\omega\in\Omega, X(\omega)\geqslant 0$), alors $\mathbb{E}(X)\geqslant 0$ *positivité de l'espérance*
3. Si $X\leqslant Y$ $(\forall\omega\in\Omega, X(\omega)\leqslant Y(\omega))$ alors, $\mathbb{E}(X)\leqslant\mathbb{E}(Y)$ *croissance de l'espérance*

Remarque 6. On peut appliquer la linéarité de l'espérance que X et Y soient discrètes ou à densité sans savoir si $\lambda X+Y$ est discrète ou à densité.

Théorème n° 2 : formule de transfert *(admis)*

Si X est une VA à densité f et $\phi\colon I\to\mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I privé d'un nombre fini de points, avec $X(\Omega)\subset I$, alors $\phi(X)$ admet une espérance ssi $\int_I \phi f$ converge absolument. Dans ce cas : $\mathbb{E}(\phi(X))=\int_I \phi(x)f(x)\,\mathrm{d}x$

Proposition n° 6 : inégalité de Markov

Soient $a > 0$ et X une variable aléatoire **positive** admettant une espérance. Alors $\mathbb{P}(X \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$

Proposition n° 7 : espérance du produit de variables aléatoires indépendantes *(admise)*

- Si X et Y deux VA indépendantes admettent des espérances, alors XY aussi et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes admettent des espérances, alors $\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ aussi et $\mathbb{E}\left(\prod\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)$

Définition d'un moment d'ordre k

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que X admet un **moment d'ordre** k si X^k admet une espérance.

Remarque 7. Si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet un moment d'ordre 1.

4 Variance

Définition de la variance et de l'écart-type

- Si X et $(X - \mathbb{E}(X))^2$ ont une espérance, on définit la **variance** de X par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$
- On appelle **écart-type** de X le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
- Si X admet une variance et que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$, on dit que X est **centrée réduite**.

Proposition n° 8 : propriétés de la variance

Soient X, Y deux variables aléatoires telles que X admet une variance et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

1. $\mathbb{V}(X) \geqslant 0$
2. $aX + b$ a une variance et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2\mathbb{V}(X)$ (la variance est quadratique)
3. Y a une variance ssi Y a un moment d'ordre 2, alors $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$ (formule de König-Huygens)
4. Si $\mathbb{V}(X) > 0$, alors $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, X^* est appelée variable **centrée réduite** associée à X.

Proposition n° 9 : variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

1. Si X et Y sont indépendantes et admettent des variances, alors $X + Y$ aussi et $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$
2. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et admettent des variances, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ aussi et $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i)$

Exemples de variances des lois usuelles

- Si $X \sim \mathscr{U}([\,a\,;b\,])$, alors X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$
- Si $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$, alors X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$.

Théorème n° 3 : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soient X une variable aléatoire admettant une variance et $a > 0$, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geqslant a) \leqslant \dfrac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$

5 Loi normale

Définition de la loi normale centrée réduite

On dit que X suit la **loi normale centrée réduite** si $t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de X. On note $X \sim \mathcal{N}(0,1)$.

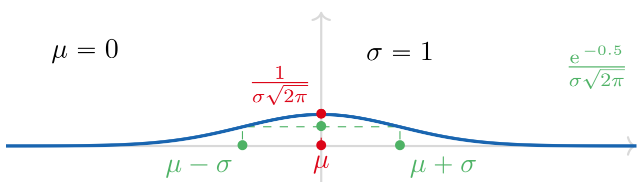
Proposition n° 10 : espérance et variance de la loi normale centrée réduite

Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors X a une espérance, une variance et $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{V}(X) = 1$ (d'où le nom de centrée réduite).

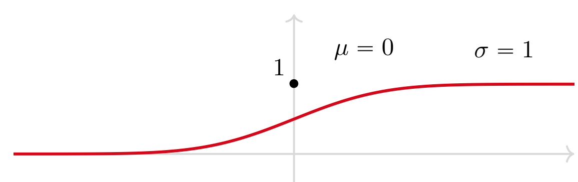
Remarques 8.
- On ne dispose pas d'expression de la fonction de répartition d'une loi normale : $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t$ ne se calcule pas. On peut soit utiliser une table de valeurs soit la calculatrice.
- Si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, et $x > 0$ alors $\mathbb{P}(X \leqslant -x) = \mathbb{P}(X \geqslant x)$.

Définition de la loi normale

On dit que X suit la **loi normale** de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ si $t \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ est une densité de X. On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.



Densité de la loi normale de paramètres σ et μ.



Fonction de répartition de la loi normale de paramètres σ et μ.

Play/Pause

Proposition n° 11 : espérance et variance de la loi normale

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.

Proposition n° 12 : translation et dilatation d'une loi normale

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, soit $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, alors $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. En particulier, $X^* = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

Proposition n° 13 : sommes de variables aléatoires normales indépendantes

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu', \sigma'^2)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + \mu', \sigma^2 + \sigma'^2)$.
- Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et pour tout $i \in [\![1 ; n]\!]$, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i, \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$

6 Tableau comparatif des trois types de variables aléatoires

Les variables aléatoires sont définies sur Ω muni d'une tribu $\mathscr{T}$ et d'une probabilité $\mathbb{P}$.

Concept	VA finie : $X(\Omega)=\{x_0,\dots,x_n\}$ fini	VA discrète infinie : $X(\Omega)=\{x_k \mid k\in\mathbb{N}\}$	VA à densité : $\mathbb{P}(X\leqslant x)=\int_{-\infty}^{x} f$ avec f densité
Définition VA	$X:\Omega\to\mathbb{R}$ tel que pour tout $a\in\mathbb{R}$, $(X\leqslant a)\in\mathscr{T}$		
Définition F_X	La fonction de répartition F_X est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_X : x\mapsto \mathbb{P}(X\leqslant x)$		
Existence d'une VA dont la loi est imposée	Si $(p_k)_{0\leqslant k\leqslant n}\in(\mathbb{R}_+)^{n+1}$ et $\sum_{k=0}^{n} p_k=1$, et $x_0<x_1<\ldots<x_n$, alors il existe X tel que pour tout i, $\mathbb{P}(X=x_i)=p_i$. En particulier, $F_X(x_k)=\sum_{i=1}^{k} p_i$	Si $\sum p_n$ SATP converge de somme 1 et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ strictement croissante, alors il existe X tel que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X=x_n)=p_n$. En particulier, $F_X(x_k)=\sum_{i=1}^{k} p_i$.	Si f positive, continue sauf un nombre fini de points, $\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1, alors il existe X tel que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
SCE associé à X	$(X=x_k)_{k\in[\![0\,;\,n]\!]}$	$(X=x_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Pas de SCE
Loi à partir de F_X	$\mathbb{P}(X=x_k)=F_X(x_k)-F_X(x_{k-1})$ (presque une dérivée) pour $k>0$.		$f(x)=F_X'(x)$ si f continue en x, valeur arbitraire sinon
Propriétés F_X	F_X est croissante, $F_X(x)\xrightarrow[x\to-\infty]{}0$, $F_X(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}1$		
	Constante sur $[\,x_k\,;x_{k+1}\,[$, F_X discontinue en x_k ssi $\mathbb{P}(X=x_k)>0$		Continue sur $\mathbb{R}$, $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf un nombre fini de points
Def espérance	$\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{k=0}^{n} x_k\mathbb{P}(X=x_k)$	$\mathbb{E}(X)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} x_n\mathbb{P}(X=x_n)$ si ACV	$\mathbb{E}(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ si ACV
Propriétés de $\mathbb{E}$	Si X et Y ont des espérances, alors $\lambda X+Y$ aussi $\mathbb{E}(\lambda X+Y)=\lambda\mathbb{E}(X)+\mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(\lambda)=\lambda$. $X\geqslant 0 \implies \mathbb{E}(X)\geqslant 0$. $Y\leqslant X \implies \mathbb{E}(Y)\leqslant\mathbb{E}(X)$		
Formule transfert	$\mathbb{E}(\phi(X))=\sum\limits_{i=0}^{n}\phi(x_i)\mathbb{P}(X=x_i)$ $\mathbb{E}(\phi(X,Y))=\sum\limits_{\substack{0\leqslant i\leqslant n\\ 0\leqslant j\leqslant p}}\phi(x_i,y_j)\mathbb{P}(X=x_i,Y=y_j)$	$\mathbb{E}(\phi(X))=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\phi(x_n)\mathbb{P}(X=x_n)$ ssi ACV	$\mathbb{E}(\phi(X))=\int_I \phi(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ ssi ACV, ϕ définie sur $I\supset X(\Omega)$, continue sur I privé d'un nombre fini de points
Def indépendance	Les VA $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendantes si pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $(I_0,I_1,\dots,I_n)$ famille d'intervalles, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=0}^{n}(X_i\in I_i)\right)=\prod\limits_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X_i\in I_i)$		
Caractérisation de l'indépendance	$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indépendantes ssi $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\,(x_0,x_1,\dots,x_n)$, $\mathbb{P}\left(\bigcap\limits_{i=0}^{n}(X_i=x_i)\right)=\prod\limits_{i=0}^{n}\mathbb{P}(X_i=x_i)$		Pas de caractérisation
Variance	Def : $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X-\mathbb{E}(X))^2)$ si existence. KH : X a une variance ssi X^2 a une espérance alors $\mathbb{V}(X)=\mathbb{E}(X^2)-\mathbb{E}(X)^2$. $\mathbb{V}(aX+b)=a^2\mathbb{V}(X)$		
Markov/BT	Si $a>0$ et X positive admet une espérance, alors $\mathbb{P}(X\geqslant a)\leqslant\dfrac{\mathbb{E}(X)}{a}$. Si X admet une variance, alors $\mathbb{P}(\lvert X-\mathbb{E}(X)\rvert\geqslant a)\leqslant\dfrac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$		
Si $X_1,\dots,X_n$ indépendantes	Si les X_i ont des espérances, alors $\prod\limits_{i=1}^{n}X_i$ aussi et $\mathbb{E}(\prod\limits_{i=1}^{n}X_i)=\prod\limits_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)$. Si les X_i ont des variances, alors $\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$ aussi et $\mathbb{V}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}X_i\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mathbb{V}(X_i)$		
Loi de $X+Y$ si X et Y indépendantes	Si X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X+Y=n)=\sum\limits_{k=0}^{n}\mathbb{P}(X=k)\mathbb{P}(Y=n-k)$		Si X (resp. Y) a pour densité f (resp. g), alors $X+Y$ a pour densité $x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$.

loic.devilliers@proton.me

7 Tableau récapitulatif des lois usuelles

Les caractéristiques de ce tableau doivent être absolument connues par cœur pour ces variables aléatoires. Les quatre premières sont des variables aléatoires réelles discrètes finies, les deux suivantes sont des variables aléatoires discrètes infinies, enfin, les quatre dernières sont des variables à densité.

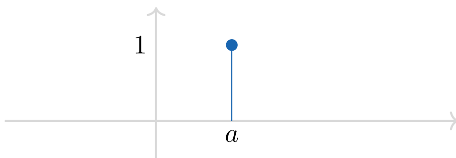
Nom de la loi	Paramètre	Univers image	Loi de probabilité	Espérance	Variance	Interprétation
Constante	$a \in \mathbb{R}$	$\{a\}$	$\mathbb{P}(X=a)=1$	a	0	Constante
Bernoulli	$p \in [0;1]$	$\{0,1\}$	$\mathbb{P}(X=1)=p$ $\mathbb{P}(X=0)=1-p$	p	$p(1-p)$	Succès vs échec
Binomiale	$(n,p) \in \mathbb{N}^* \times [0;1]$	$[\![0;n]\!]$	$\mathbb{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ pour $k \in [\![0;n]\!]$	np	$np(1-p)$	Nombre de succès dans n Va de Bernoulli de paramètre p indépendantes
Uniforme	n	$[\![1;n]\!]$	$\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{1}{n}$ pour $k \in [\![1;n]\!]$	$\dfrac{n+1}{2}$	$\dfrac{n^2-1}{12}$	Tirage équitable
Géométrique	$p \in]0;1[$	$\mathbb{N}^*$	$\mathbb{P}(X=k)=p(1-p)^{k-1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1-p}{p^2}$	Donne le premier succès dans une suite de Va indépendantes de Bernoulli de paramètre p
Poisson	$\lambda \geqslant 0$	$\mathbb{N}$	$\mathbb{P}(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}$ pour $k \in \mathbb{N}$	λ	λ	Désintégration radioactive, arrivé dans une file d'attente, évènements rares etc.

Nom de la loi	Paramètre	Univers image	Densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
Uniforme	$a<b$	$[a;b]$	$t \mapsto \dfrac{\mathbb{1}_{[a;b]}(t)}{b-a}$	$x \mapsto \dfrac{x-a}{b-a}\mathbb{1}_{[a;b]}(x)+\mathbb{1}_{]b;+\infty[}(x)$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Exponentielle	$\lambda>0$	$\mathbb{R}_+$	$t \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$	$x \mapsto (1-\mathrm{e}^{-\lambda x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
Normale centrée réduite		$\mathbb{R}$	$t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$	$\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{d}t$	0	1
Normale	$\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma>0$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$	μ	σ^2

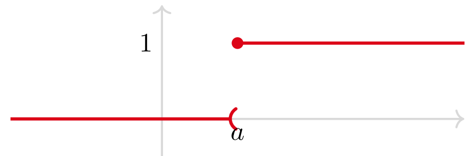
Stabilité par somme de variables aléatoires indépendantes :

- Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes suivant toutes une $\mathscr{B}(p)$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \mathscr{B}(n,p)$.
- Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes et pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $X_i \sim \mathscr{B}(n_i,p)$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \mathscr{B}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} n_k, p\right)$ (pas au programme)
- Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes et pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $X_i \sim \mathscr{P}(\lambda_i)$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \mathscr{P}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$
- Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes et pour tout $i \in [\![1;n]\!]$, $X_i \sim \mathscr{N}(\mu_i,\sigma_i^2)$, alors $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i \sim \mathscr{N}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_i, \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)$

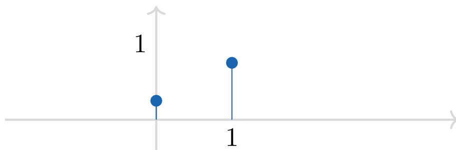
8 Tracés des lois et des fonctions de répartition de variables discrètes



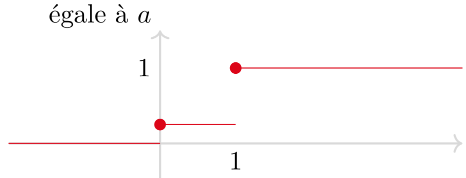
Loi de la variable aléatoire X constante égale à a



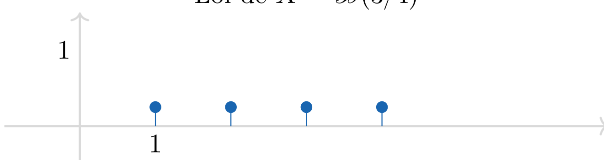
Fonction de répartition de la variable aléatoire X constante égale à a



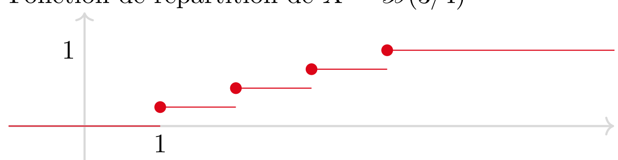
Loi de $X \sim \mathscr{B}(3/4)$



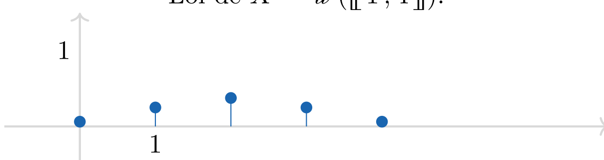
Fonction de répartition de $X \sim \mathscr{B}(3/4)$



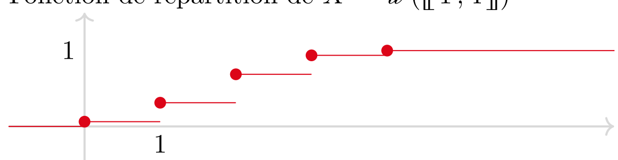
Loi de $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1\,;4\rrbracket)$.



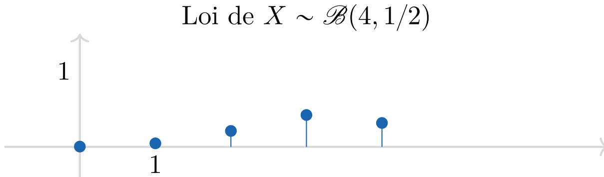
Fonction de répartition de $X \sim \mathscr{U}(\llbracket 1\,;4\rrbracket)$



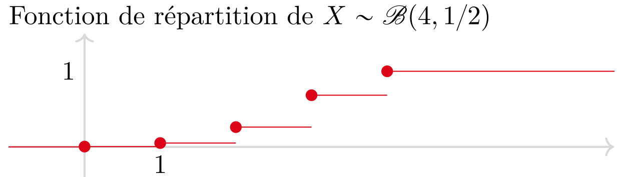
Loi de $X \sim \mathscr{B}(4, 1/2)$



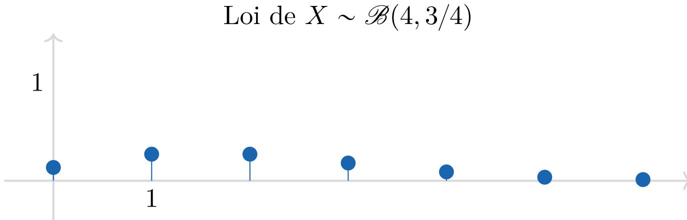
Fonction de répartition de $X \sim \mathscr{B}(4, 1/2)$



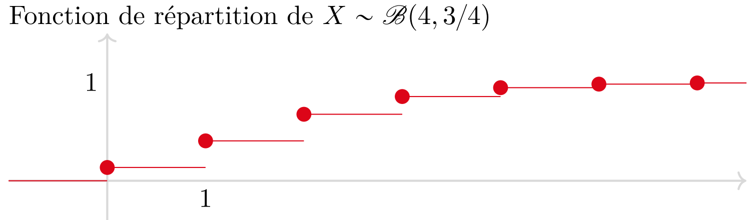
Loi de $X \sim \mathscr{B}(4, 3/4)$



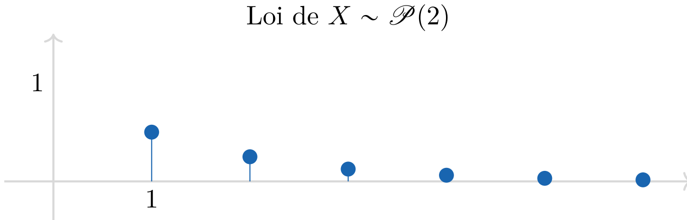
Fonction de répartition de $X \sim \mathscr{B}(4, 3/4)$



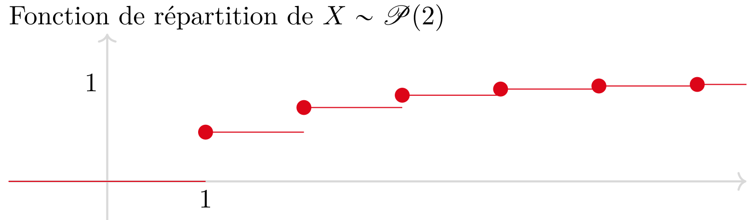
Loi de $X \sim \mathscr{P}(2)$



Fonction de répartition de $X \sim \mathscr{P}(2)$



Loi de $X \sim \mathscr{G}(0.5)$



Fonction de répartition de $X \sim \mathscr{G}(0.5)$