

Dans toute cette feuille d'exercice, on supposera connue la densité de  $X+Y$  si  $X$  et  $Y$  sont deux variables à densité et indépendantes (la formule est dans le cours).

## Variabes aléatoires à densité

**Exercice 1.** Si  $X \sim \mathcal{U}([0; 1])$ ,  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  avec  $a < b$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in ]0; 1[$ , que valent les lois des variables aléatoires suivantes ?

1.  $a + (b - a)X$
2.  $1 + \lfloor nX \rfloor$
3.  $\mathbb{1}_{X < p}$

**Exercice 2.** On définit une fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  par  $f: t \mapsto ae^{-|t|}$ .

1. Déterminer  $a \in \mathbb{R}$  tel que  $f$  soit une densité de probabilité.
2. Soit  $X$  une variable aléatoire de densité  $f$ . Expliciter sa fonction de répartition  $F_X$ .
3. Déterminer la loi de  $Y = |X|$ ,  $Y$  admet-elle une densité ? Si oui déterminer-là.
4. Est-ce que  $X$  a une espérance ? Si oui, la calculer.

**Exercice 3 (\*\*\*).** Soit  $X$  une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  tel que  $\mathbb{P}(X > 0) > 0$  tel que  $X$  soit sans mémoire : pour tout  $(s, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  :  $\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$ , démontrer que  $X$  suit une loi exponentielle.

**Exercice 4 (\*\*).** On pose  $f: t \mapsto \frac{2}{5}t\mathbb{1}_{[2; 3]}(t)$  et  $g: t \mapsto \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1; 1]}(t)$

1. Démontrer que  $f$  et  $g$  sont des densités de probabilité.

Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de densité respectives  $f$  et  $g$ .

2. Déterminer la loi de  $X + Y$ .
3. Déterminer l'espérance de  $X + Y$ .

**Exercice 5 (\*\*).** Démontrer que pour tout  $x > 0$ ,

$$\int_{-x}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \geq 1 - \frac{1}{x^2}$$

**Exercice 6 (\*).** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes tel que  $X \sim \mathcal{B}(2, 1/3)$  et  $Y \in \mathcal{U}([0; 1])$ , on pose  $Z = 8(X+Y)$  et  $W = 12XY$

1. Déterminer  $Z(\Omega)$  et  $W(\Omega)$
2. Calculer  $\mathbb{P}(Z \in \mathbb{N})$  et  $\mathbb{P}(W \in \mathbb{N})$
3. Calculer  $\mathbb{P}(Z > W)$
4. Comparer  $F_Z$  et  $F_W$
5. Déterminer la fonction de répartition de  $Z$ .
6.  $Z$  et  $W$  sont-elles à densité ?

**Exercice 7.** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$  et  $f: t \mapsto \frac{\alpha}{1+t^2}$ .

1. Pour quelles valeurs de  $\alpha$ ,  $f$  est-elle une densité de probabilité ?
2. Soit  $X$  une variable aléatoire ayant pour densité  $f$ , donner sa fonction de répartition.
3. Est-ce que  $X$  admet une espérance ?

**Exercice 8.** Soit  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$  pour  $\lambda > 0$ .

1. Est-ce que  $Y = \sqrt{X}$  est bien définie ? Déterminer sa loi.
2. Déterminer les lois de  $Z = X^2$  et  $U = X^3$ .

**Exercice 9 (\*\*).** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p \in ]0; 1[$ . On suppose que  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$  et que  $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$  est une famille de variables aléatoires uniformes sur  $[0; 1]$ . On suppose que  $X, Y_0, \dots, Y_n$  sont indépendantes.

1. Pour  $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$ , déterminer la loi de  $M_k = \min(Y_0, \dots, Y_k)$
2. Déterminer la loi de  $M = \min(Y_0, \dots, Y_n)$

**Exercice 10.** Soit  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire  $Y = X^2$ . Montrer que c'est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
2. Déterminer la loi de  $Z = -X$ .
3. Montrer que  $Y$  admet une espérance et une variance et les calculer.

**Exercice 11.** Soit  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire  $Y = e^X$ .
2. Donner une densité de  $Y$ .
3. Montrer que  $Y$  admet une espérance et que  $\mathbb{E}(Y) = \sqrt{e}$ .

**Exercice 12.** Soit  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$ . On pose  $Y = e^X$ .

1. Démontrer que  $Y$  est à densité et déterminer une densité de  $Y$ .

- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que  $Y$  admette une espérance. Dans ce cas, calculer  $\mathbb{E}(Y)$ .
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que  $Y$  admette une variance. Dans ce cas, calculer  $\mathbb{V}(Y)$ .

**Exercice 13.** Soit  $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$  avec  $\lambda > 0$ . On pose  $Y = X^2$  et  $Z = \lfloor X \rfloor + 1$ .

- Sans aucun calcul, démontrer que  $Y$  admet une espérance et donner sa valeur.
- Démontrer que  $Y$  est à densité et déterminer une densité de  $Y$ .
- Déterminer la loi de  $Z$ .
- Démontrer que  $X - \lfloor X \rfloor$  admet une espérance et déterminer-la.

**Exercice 14.** Soit  $r > 0$  et  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur  $]0, r]$ . On pose

$$U = \ln\left(\frac{X}{r}\right) \quad \text{et} \quad V = -\ln\left(\frac{Y}{r}\right).$$

- Déterminer la fonction de répartition et la densité de  $U$  et de  $V$ . Tracer l'allure de ces courbes.
- Donner la fonction de répartition ainsi qu'une densité pour la variable aléatoire  $S = U + V$ .
- On pose  $Q = \frac{X}{Y}$ . Montrer que  $Q$  est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
- Est-ce que  $Q$  admet une espérance ?

**Exercice 15.** Soit  $X$  et  $Y$  deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur  $[0; 1]$ . On définit les variables aléatoires  $U = \min(X, Y)$  et  $V = \max(X, Y)$ .

- Déterminer la fonction de répartition  $G$ , puis une densité  $g$  de  $U$ .
- Déterminer la fonction de répartition  $H$ , puis une densité  $h$  de  $V$ .
- Calculer l'espérance de  $U$ .
- Exprimer  $U + V$  en fonction de  $X$  et  $Y$ . En déduire l'espérance de  $V$ .

**Exercice 16.** Soit  $X \sim \mathcal{U}([-1; 1])$ , on définit pour  $x \in ]-1; 1[$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$  et on pose  $Y = f(X)$ .

- Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $] -1; 1 [$  vers un intervalle à déterminer.
- Déterminer  $f^{-1}$ .
- Justifier que l'on peut quand même considérer que  $Y$  est bien définie.
- Déterminer la fonction de répartition de  $Y$ .
- Vérifier que  $Y$  est à densité et donner une densité de  $Y$ .

**Exercice 17 (\*\*\*)**. Soit  $X$  et  $Y$  deux variables indépendantes à densité de même loi, calculer  $\mathbb{P}(X \leq Y)$ .

**Exercice 18 (\*\*)**. Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi  $\mathcal{E}(\lambda)$  où  $\lambda > 0$ , pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k$$

- Justifier que  $S_n$  admet une espérance et une variance et déterminer  $\mathbb{E}(S_n)$  et  $\mathbb{V}(S_n)$ .
- Déterminer la loi de  $S_2 = X_1 + X_2$ .
- Montrer que  $f_n: t \mapsto \frac{\lambda(\lambda t)^{n-1} e^{-\lambda t}}{(n-1)!} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$  est une densité de  $S_n$ .

**Exercice 19 (\*\*)**. Soit  $X$  une variable aléatoire à densité et  $f$  une densité de  $X$  telle que  $f$  est nulle sur  $\mathbb{R}_-^*$ , continue sur  $\mathbb{R}_+$  et que  $\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt$  converge.

- À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout  $a > 0$  :

$$\int_0^a \mathbb{P}(X > t) dt = a\mathbb{P}(X > a) + \int_0^a t f(t) dt$$

- Montrer que, pour tout réel  $a > 0$  :

$$0 \leq a\mathbb{P}(X > a) \leq 2 \int_{\frac{a}{2}}^a \mathbb{P}(X > t) dt$$

- En déduire que  $X$  admet une espérance et que :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t) dt$$