Dans toute cette feuille d'exercice, on supposera connue la densité de $X+Y$ si X et Y sont deux variables à densité et indépendantes (la formule est dans le cours).

Variables aléatoires à densité

Exercice 1. Si $X \sim \mathscr{U}([\,0\,;1\,])$, $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]\,0\,;1\,[$, que valent les lois des variables aléatoires suivantes ?

1. $a + (b-a)X$
2. $1 + \lfloor nX \rfloor$
3. $\mathbb{1}_{X<p}$

Exercice 2. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f : t \mapsto a\mathrm{e}^{-|t|}$.

1. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que f soit une densité de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Expliciter sa fonction de répartition F_X.
3. Déterminer la loi de $Y = |X|$, Y admet-elle une densité ? Si oui déterminer-là.
4. Est-ce que X a une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 3 ($\star\star\star\star$). Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ tel que $\mathbb{P}(X > 0) > 0$ tel que X soit sans mémoire : pour tout $(s,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$: $\mathbb{P}(X > s+t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t)$, démontrer que X suit une loi exponentielle.

Exercice 4.

1. On pose $f : t \mapsto \frac{2}{5}t\mathbb{1}_{[\,2\,;3\,]}(t)$ et $g : t \mapsto \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[\,-1\,;1\,]}(t)$ Démontrer que f et g sont des densités de probabilité. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densité respectives f et g.
2. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Déterminer l'espérance de $X + Y$.

Exercice 5 ($\star\star$). Démontrer que pour tout $x > 0$,

$$\int_{-x}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \geqslant 1 - \frac{1}{x^2}$$

Exercice 6 ($\star$). Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes tel que $X \sim \mathscr{B}(2, 1/3)$ et $Y \in \mathscr{U}([\,0\,;1\,])$, on pose $Z = 8(X+Y)$ et $W = 12XY$

1. Déterminer $Z(\Omega)$ et $W(\Omega)$
2. Calculer $\mathbb{P}(Z \in \mathbb{N})$ et $\mathbb{P}(W \in \mathbb{N})$
3. Calculer $\mathbb{P}(Z > W)$
4. Comparer F_Z et F_W
5. Déterminer la fonction de répartition de Z.
6. Z et W sont-elles à densité ?

Exercice 7. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $f : t \mapsto \dfrac{\alpha}{1+t^2}$.

1. Pour quelles valeurs de α, f est-elle une densité de probabilité ?
2. Soit X une variable aléatoire ayant pour densité f, donner sa fonction de répartition.
3. Est-ce que X admet une espérance ?

Exercice 8. Soit $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ pour $\lambda > 0$.

1. Est-ce que $Y = \sqrt{X}$ est bien définie ? Déterminer sa loi.
2. Déterminer les lois de $Z = X^2$ et $U = X^3$.

Exercice 9 ($\star\star$). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in]\,0\,;1\,[$. On suppose que $X \sim \mathscr{B}(n,p)$ et que $(Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$ est une famille de variables aléatoires uniformes sur $[\,0\,;1\,]$. On suppose que $X, Y_0, \dots, Y_n$ sont indépendantes.

1. Pour $k \in [\![\,0\,;n\,]\!]$, déterminer la loi de $M_k = \min(Y_0, \dots, Y_k)$
2. Déterminer la loi de $M = \min(Y_0, \dots, Y_X)$

Exercice 10. Soit $X \sim \mathscr{N}(0,1)$.

1. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = X^2$. Montrer que c'est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
2. Déterminer la loi de $Z = -X$.
3. Montrer que Y admet une espérance et une variance et les calculer.

Exercice 11. Soit $X \sim \mathscr{N}(0,1)$.

1. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire $Y = \mathrm{e}^X$.
2. Donner une densité de Y.
3. Montrer que Y admet une espérance et que $\mathbb{E}(Y) = \sqrt{\mathrm{e}}$.

Exercice 12. Soit $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On pose $Y = \mathrm{e}^X$.

1. Démontrer que Y est à densité et déterminer une densité de Y.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que Y admette une espérance. Dans ce cas, calculer $\mathbb{E}(Y)$.

3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que Y admette une variance Dans ce cas, calculer $\mathbb{V}(Y)$.

Exercice 13. Soit $X \sim \mathscr{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On pose $Y = X^2$ et $Z = \lfloor X \rfloor + 1$.

1. Sans aucun calcul, démontrer que Y admet une espérance et donner sa valeur.
2. Démontrer que Y est à densité et déterminer une densité de Y.
3. Déterminer la loi de Z.
4. Démontrer que $X - \lfloor X \rfloor$ admet une espérance et déterminer-là.

Exercice 14. Soit $r > 0$ et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $]0, r]$. On pose

$$U = \ln\left(\frac{X}{r}\right) \qquad \text{et} \qquad V = -\ln\left(\frac{Y}{r}\right).$$

1. Déterminer la fonction de répartition et la densité de U et de V. Tracer l'allure de ces courbes.
2. Donner la fonction de répartition ainsi qu'une densité pour la variable aléatoire $S = U + V$.
3. On pose $Q = \dfrac{X}{Y}$. Montrer que Q est une variable aléatoire à densité et en donner une densité.
4. Est-ce que Q admet une espérance ?

Exercice 15. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\,0\,;1\,]$. On définit les variable aléatoires $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la fonction de répartition G, puis une densité g de U.
2. Déterminer la fonction de répartition H, puis une densité h de V.
3. Calculer l'espérance de U.
4. Exprimer $U + V$ en fonction de X et Y. En déduire l'espérance de V.

Exercice 16. Soit $X \sim \mathscr{U}([\,-1\,;1\,])$, on définit pour $x \in \,]\,-1\,;1\,[$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ et on pose $Y = f(X)$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $]\,-1\,;1\,[$ vers un intervalle à déterminer.
2. Déterminer f^{-1}
3. Justifier que l'on peut quand même considérer que Y est bien définie.
4. Déterminer la fonction de répartition de Z.
5. Vérifier que Z est à densité et donner une densité de Z.

Exercice 17 ($\star\star\star$). Soit X et Y deux variables indépendantes à densité de même loi, calculer $\mathbb{P}(X \leqslant Y)$.

Exercice 18 ($\star\star$). Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes une loi $\mathscr{E}(\lambda)$ où $\lambda > 0$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$

1. Justifier que S_n admet une espérance et une variance et déterminer $\mathbb{E}(S_n)$ et $\mathbb{V}(S_n)$.
2. Montrer que $f_n : t \mapsto \dfrac{\lambda(\lambda x)^{n-1}\mathrm{e}^{-\lambda x}}{(n-1)!}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)$ est une densité de S_n.
3. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} x^n \,\mathrm{d}x$ converge et déterminer sa valeur.

Exercice 19 ($\star\star$). Soit X une variable aléatoire à densité et f une densité de X telle ue f est nulle sur $\mathbb{R}_-^*$, continue sur $\mathbb{R}_+$ et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$ converge.

1. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $a > 0$:

$$\int_0^a \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t = a\mathbb{P}(X > a) + \int_0^a tf(t)\,\mathrm{d}t$$

2. Montrer que, pour tout réel $a > 0$:

$$0 \leqslant a\mathbb{P}(X > a) \leqslant 2\int_{\frac{a}{2}}^{a} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$$

3. En déduire que X admet une espérance et que :

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$$