



Les variables aléatoires que nous avons connu jusqu'à là étaient pouvaient prendre un nombre fini de valeurs ou bien un nombre infini de valeurs mais dénombrable. On avait donc des variables aléatoires dont l'univers image pouvait être un des ensembles parmi $\llbracket 1 ; n \rrbracket$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$. Mais il était impossible d'avoir dans ce cadre, des variables aléatoires dont l'univers image est $\mathbb{R}$ ou $[0 ; 1]$ (car ces ensembles ne sont pas dénombrables). De plus, le prochain chapitre montrera que des variables aléatoires dont l'univers image est $\mathbb{R}$ jouent naturellement un rôle même pour des variables aléatoires discrètes.



Attention : utiliser un lecteur de pdf adapté

Ce polycopié contient une animation, il est donc conseillé d'utiliser un lecteur de pdf capable de lire les animations (comme Adobe Reader, Foxit PDF Reader, Okular ou autres).

Table des matières

1	Densité d'une variable aléatoire	2
2	Indépendances de variables aléatoires	3
3	Espérance	5
4	Variance	6
5	Loi normale	6
6	Tableau comparatif des trois types de variables aléatoires	10

1 Densité d'une variable aléatoire



Définition d'une densité de probabilité

On dit que $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une **densité de probabilité** si f est continue sauf en un nombre fini de points, f est positive, $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$.

- Exemples 1.**
- Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $f: x \mapsto \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a; b]}(x)$ est une densité de probabilité.
 - Pour $\lambda > 0$, $g: x \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x) \lambda e^{-\lambda x}$ est une densité de probabilité.



Définition d'une variable aléatoire à densité

On dit qu'une variable aléatoire X est **à densité** s'il existe une densité de probabilité f telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$. La fonction f est appelée densité de X .

- Remarques 1.**
- Pour des variables aléatoires à densité, trouver la loi c'est en trouver une densité.
 - Modifier la valeur de f en un nombre fini de points ne change pas la valeur de $\int_{-\infty}^x f$, il n'y a donc pas unicité de la densité.



Proposition n° 1 : existence d'une variable aléatoire à densité fixé

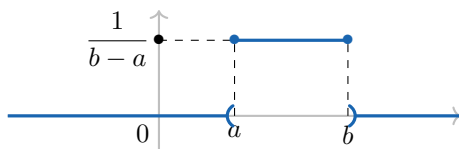
(admise)

Soit f une densité de probabilité, alors il existe X une variable aléatoire à densité dont f est une densité.

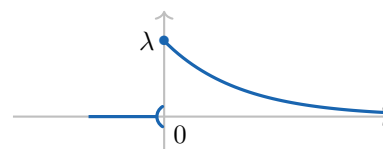


Définition de variables aléatoires usuelles à densité

1. On dit que X suit une **loi uniforme** sur $[a; b]$ (où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$) si $t \mapsto \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a; b]}(t)$ est une densité de X . On note $X \sim \mathcal{U}([a; b])$.
2. On dit que X suit une **loi exponentielle** de paramètre $\lambda > 0$ si $t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \lambda e^{-\lambda t}$ est une densité de X . On note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$.



Densité de la loi uniforme sur $[a; b]$

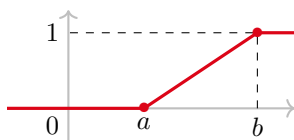


Densité de la loi exponentielle de paramètre λ .

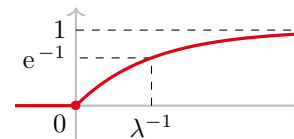


Exemples de fonctions de répartition des variables aléatoires usuelles à densité

1. Si $X \sim \mathcal{U}([a; b])$, alors $F_X: x \mapsto \frac{x-a}{b-a} \mathbb{1}_{[a; b]}(x) + \mathbb{1}_{]b; +\infty[}(x)$.
2. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors $F_X: x \mapsto (1 - e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ (ne pas oublier les parenthèses)



Fonction de répartition la loi uniforme sur $[a; b]$.



Fonction de répartition la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Remarque 2. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors pour tout $(s, t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\mathbb{P}(X > s + t | X > s) = \mathbb{P}(X > t)$. On dit qu'il y a absence de mémoire ou d'invariance temporelle.



Théorème n° 1 : CNS pour qu'une variable aléatoire soit à densité

(admis)

Une VA X admet une densité ssi F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. Dans ce cas, une densité est définie par $f(x) = F'_X(x)$ si F_X est $\mathcal{C}^1$ en x et par une valeur arbitraire positive sinon.

Exemple 2. Soit X une VA dont la fonction de répartition est $F: x \mapsto \frac{x^4}{256} \mathbb{1}_{[0;4]}(x) + \mathbb{1}_{]4;+\infty[}(x)$. Montrer que X est à densité et donner une densité de X .



Comment passer de la densité à la fonction de répartition d'une variable à densité et vice-versa ?

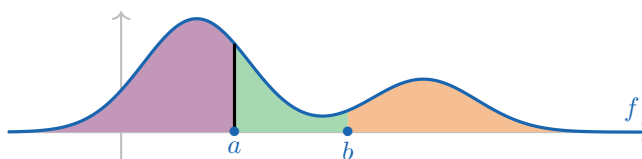
- Si on connaît f densité de X , alors la fonction de répartition s'obtient en intégrant : $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.
- Si on connaît F_X , la fonction de répartition. Si F_X est dérivable en x alors $f(x) = F'_X(x)$, si F_X est non dérivable en x , alors on peut prendre $f(x) = 0$ (ou bien $f(x) = 18$).



Proposition n° 2 : calcul de probabilité pour une variable aléatoire à densité

Soit X une VA dont f est une densité et F sa fonction de répartition. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$:

1. $\mathbb{P}(X = a) = 0$
2. $\mathbb{P}(X < a) = \mathbb{P}(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f$
3. $\mathbb{P}(X \geq b) = \mathbb{P}(X > b) = 1 - F(b) = \int_b^{+\infty} f$
4. $\mathbb{P}(a < X < b) = \mathbb{P}(a \leq x \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = \mathbb{P}(a \leq X < b) = \int_a^b f = F(b) - F(a)$



Attention la valeur de $\mathbb{P}(X = x)$ ne caractérise pas la loi d'une variable aléatoire à densité

Contrairement aux VA discrètes, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = x) = 0$, et cela ne donne pas d'information sur X .
 Une VA à densité est caractérisée soit par «sa» densité soit par sa fonction de répartition.
 Une VA discrète est caractérisée soit par $x \mapsto \mathbb{P}(X = x)$ soit par sa fonction de répartition.

Exemples 3. Soit $X \sim \mathcal{U}([0; 1])$

1. Si $0 < c < d < 1$, que vaut $\mathbb{P}(c \leq X \leq d)$?
2. Montrer que $Y = X^2$ est à densité et déterminer une densité et F_Y . Calculer $\mathbb{P}(-1/2 \leq Y \leq 1/2)$
3. Pour $\lambda > 0$, on pose $Z = -\frac{1}{\lambda} \ln(1 - X)$, déterminer la loi de Z .

Remarques 3.

- Soit X une variable aléatoire discrète (finie ou infinie), alors X n'est pas une variable à densité.
- Si X est une VA à densité, alors $Y = aX + b$ aussi si $a \neq 0$.

2 Indépendances de variables aléatoires

Remarque 4. Si $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ est une famille de VA indépendantes, alors toute sous-famille est indépendante.



Lemme des coalitions

(admis)

Si $X_1, \dots, X_{n+p}$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_n)$ et $g(X_{n+1}, \dots, X_{n+p})$ sont indépendantes.

Remarque 5. On peut faire plus de deux coalitions : les variables aléatoires $f(X_1, \dots, X_4)$, $g(X_5, \dots, X_8)$, $h(X_9, X_{10})$, ..., $m(X_{20}, \dots, X_{25})$ sont indépendantes. De même, $u_1(X_1)$, $u_2(X_2), \dots, u_n(X_n)$ sont indépendantes.



Théorème n° 2 : densité de la somme de deux variables aléatoires à densité indépendantes (admis)

Soient X et Y deux VA indépendantes de densité respective f et g . Alors, $X + Y$ est une VA à densité dont une densité est la fonction $f * g: x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt$, appelée **produit de convolution**.



Exemples classiques de détermination de loi

- Déterminer la loi de $X + Y$ où $X \sim \mathcal{U}([0; 1])$ et $Y \sim \mathcal{U}([0; 1])$ sont indépendantes.
- Pour les mêmes X et Y , déterminer la loi de $\max(X, Y)$
- Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une famille de VA indépendantes où pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_i \sim \mathcal{U}([0; 1])$, déterminer la loi de $\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$.

Solution des exemples 3 :

- Notons $f: t \mapsto \mathbb{1}_{[0;1]}(t)$ une densité de X et donc de Y , comme X et Y sont indépendantes, d'après le théorème 2, $X + Y$ est à densité et une densité de $X + Y$ est

$$f * f: x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0;1]}(t)\mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) dt$$

Notons h cette fonction, et soit $x \in \mathbb{R}$. Notons que $\mathbb{1}_{[0;1]}(t) = 0$ si $t < 0$ ou si $t > 1$ et $\mathbb{1}_{[0;1]}(t) = 1$ si $t \in [0; 1]$ alors en séparant en trois par Chasles, on obtient :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^0 \mathbb{1}_{[0;1]}(t)\mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) dt + \int_0^1 \mathbb{1}_{[0;1]}(t)\mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) dt + \int_1^{+\infty} \mathbb{1}_{[0;1]}(t)\mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^0 0 \cdot \mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) dt + \int_0^1 1 \cdot \mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) dt + \int_1^{+\infty} 0 \cdot \mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) dt = \int_0^1 \mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) dt \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0; 1]$. Alors, $\mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) = 1$ ssi $0 \leq x-t \leq 1$ ssi $-x \leq -t \leq 1-x$ ssi $x-1 \leq t \leq x$.

(une telle égalité exige, en particulier, que $x \geq t \geq 0$ et que $x-1 \leq t \leq 1$ donc que $x \leq 2$).

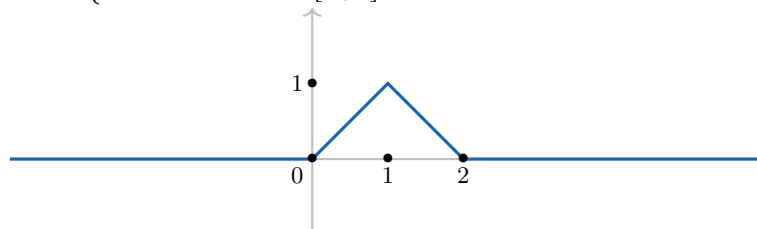
- Si $x < 0$, alors comme $t \geq 0$, l'inégalité $t \leq x < 0$ ne peut pas être vérifiée, ainsi, pour tout $t \in [0; 1]$, $\mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) = 0$ et donc $h(x) = 0$.
- Si $x > 2$, alors comme $t \leq 1$, l'inégalité $1 < x-1 \leq t$ ne peut pas être vérifiée, ainsi, pour tout $t \in [0; 1]$, $\mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) = 0$ et donc $h(x) = 0$.
- Si $x \leq 2$ et $x \geq 1$, alors l'inégalité, $t \leq x$ est vérifiée. Or, comme $t \in [0; 1]$ et $x-1 \in [0; 1]$, l'inégalité $x-1 \leq t$ n'est pas vérifiée si $t \in [0; x-1[$ et est vérifiée pour $t \in [x-1; 1]$. Ainsi, on coupe l'intégrale en $x-1$, on obtient

$$h(x) = \int_0^{x-1} \mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) dt + \int_{x-1}^1 \mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) dt = 0 + \int_{x-1}^1 dt = 2 - x$$

- Si $x \geq 0$ et $x < 1$, alors l'inégalité, $x-1 \leq t$ est vérifiée (car $t \geq 0$ et $x-1 < 0$). Mais comme $x \in [0; 1]$ et $t \in [0; 1]$, l'inégalité $t \leq x$ est vérifiée si $t \in [0; x]$ et non vérifiée si $t \in]x; 1]$. Ainsi, on coupe l'intégrale en x , on obtient

$$h(x) = \int_0^x \mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) dt + \int_x^1 \mathbb{1}_{[0;1]}(x-t) dt = \int_0^x dt + 0 = x$$

On peut en conclure que $h: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \text{ ou } x < 2 \\ x & \text{si } x \in [0; 1[\\ 2-x & \text{si } x \in [1; 2] \end{cases}$ est une densité de $X + Y$.



Courbe de h une densité de $X + Y$ où X et Y suivent des lois uniformes sur $[0; 1]$ et indépendantes.

3 Espérance



Définition de l'espérance d'une variable aléatoire à densité

On dit que X - une VA à densité dont f est une densité - **admet une espérance** si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge absolument, on définit alors l'**espérance** de X par : $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$. On dit que X est **centré** si $\mathbb{E}(X) = 0$.



Exemples d'espérance des variables aléatoires usuelles à densité

1. Si $X \sim \mathcal{U}([a; b])$, alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \frac{a+b}{2}$
2. Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors X admet une espérance et $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$

Exemple 4. Si, pour $t < 1$, $f(t) = 0$ et pour $t \geq 1$, $f(t) = \frac{1}{t^2}$ et f une densité de X , est-ce que X admet une espérance ?



Proposition n° 3 : propriétés de l'espérance

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des espérances et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

1. $\lambda X + Y$ admet une espérance et $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$ *linéarité de l'espérance (admise)*
2. Si $X \geq 0$ (pour tout $\omega \in \Omega$, $X(\omega) \geq 0$), alors $\mathbb{E}(X) \geq 0$ *positivité de l'espérance*
3. Si $X \leq Y$ ($\forall \omega \in \Omega$, $X(\omega) \leq Y(\omega)$) alors, $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$ *croissance de l'espérance*

Remarque 6. On peut appliquer la linéarité de l'espérance que X et Y soient discrètes ou à densité sans savoir si $\lambda X + Y$ est discrète ou à densité.



Théorème n° 3 : formule de transfert

(admise)

Si X est une VA à densité f et $\phi: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle I privé d'un nombre fini de points, avec $X(\Omega) \subset I$, alors $\phi(X)$ admet une espérance ssi $\int_I \phi f$ converge absolument. Dans ce cas : $\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_I \phi(x)f(x) dx$



Proposition n° 4 : inégalité de Markov

Soient $a > 0$ et X une variable aléatoire **positive** admettant une espérance. Alors $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$



Proposition n° 5 : espérance du produit de variables aléatoires indépendantes

(admise)

- Si X et Y deux VA indépendantes admettent des espérances, alors XY aussi et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$
- Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes admettent des espérances, alors $\prod_{i=1}^n X_i$ aussi et $\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$



Définition d'un moment d'ordre k

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que X admet un **moment d'ordre k** si X^k admet une espérance.

Remarque 7. Si X admet un moment d'ordre 2, alors X admet un moment d'ordre 1.

4 Variance



Définition de la variance et de l'écart-type

- Si X et $(X - \mathbb{E}(X))^2$ ont une espérance, on définit la **variance** de X par $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2)$
- On appelle **écart-type** de X le réel positif $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.
- Si X admet une variance et que $\mathbb{E}(X) = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 1$, on dit que X est **centrée réduite**.



Proposition n° 6 : propriétés de la variance

Soient X, Y deux variables aléatoires telles que X admet une variance et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, alors :

1. $\mathbb{V}(X) \geq 0$
2. $aX + b$ a une variance et $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$ (la variance est quadratique)
3. Y a une variance ssi Y a un moment d'ordre 2, alors $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(Y))^2$ (formule de König-Huygens)
4. Si $\mathbb{V}(X) > 0$, alors $X^* = \frac{X - \mathbb{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite, X^* est appelée variable **centrée réduite** associée à X .



Proposition n° 7 : variance de la somme de variables aléatoires indépendantes

1. Si X et Y sont indépendantes et admettent des variances, alors $X + Y$ aussi et $\mathbb{V}(X + Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$
2. Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et admettent des variances, alors $\sum_{i=1}^n X_i$ aussi et $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i)$



Exemples de variances des lois usuelles

- Si $X \sim \mathcal{U}([a; b])$, alors X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = \frac{(b - a)^2}{12}$
- Si $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.



Théorème n° 4 : inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soient X une variable aléatoire admettant une variance et $a > 0$, alors $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$

5 Loi normale



Définition de la loi normale centrée réduite

On dit que X suit la **loi normale centrée réduite** si $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est une densité de X . On note $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$.



Proposition n° 8 : espérance et variance de la loi normale centrée réduite

Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, alors X a une espérance, une variance et $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{V}(X) = 1$ (d'où le nom de centrée réduite).

- Remarques 8.** • On ne dispose pas d'expression de la fonction de répartition d'une loi normale : $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ne se calcule pas. On peut soit utiliser une table de valeurs soit la calculatrice.
- Si $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$, et $x > 0$ alors $\mathbb{P}(X \leq -x) = \mathbb{P}(X \geq x)$.



Définition de la loi normale

On dit que X suit la **loi normale** de paramètres $\mu \in \mathbb{R}$ et σ^2 (avec $\sigma > 0$) si $t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ est une densité de X . On note $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Densité de la loi normale de paramètres μ et σ^2 .

Fonction de répartition de la loi normale de paramètres μ et σ^2 .



Proposition n° 9 : espérance et variance de la loi normale

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors X admet une espérance et une variance et $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathbb{V}(X) = \sigma^2$.

Démonstration de la proposition n° 9 :

- Montrons que $\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ converge (et même absolument) et déterminer sa valeur. On pose $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ de sorte que $x = \sigma t + \mu$ et $dx = \sigma dt$. Comme $x \mapsto \frac{x-\mu}{\sigma}$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ont même nature et sont égales en cas de convergence. Or, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge (car une loi normale centrée réduite admet une espérance qui vaut 0) et $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge (densité d'une loi normale centrée réduite). Par combinaison linéaires d'intégrales convergentes $\int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma + \mu) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt + \mu \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sigma \cdot 0 + \mu \cdot 1 = \mu$$

Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ converge et vaut μ . De plus, par Chasles, les intégrales suivantes convergent :

$$\int_0^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_0^{+\infty} |x| e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^0 -|x| e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

Par linéarité, $\int_{-\infty}^0 |x| e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ converge aussi. Ceci montre la convergence absolue de $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$. On peut en conclure que X admet une espérance et que $\mathbb{E}(X) = \mu$.

- Montrons que $(X - \mathbb{E}(X))^2 = (X - \mu)^2$ admet une espérance, pour cela on cherche à appliquer la formule de transfert et donc on a besoin de montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ converge absolument et déterminer sa valeur. On pose $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$ de sorte que $x - \mu = \sigma t$ et $dx = \sigma dt$. Comme $x \mapsto \frac{x-\mu}{\sigma}$ est $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone, $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ ont même nature et sont égales en cas de convergence. Or, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge (car une loi normale centrée réduite admet une variance qui vaut 1), Donc par linéarité, $\int_{-\infty}^{+\infty} (t\sigma)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ converge et vaut σ^2 . Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$ converge (et même absolument car fonction positive) et vaut σ^2 . D'après la formule de transfert $(X - \mu)^2$ admet une espérance, ainsi, X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}((X - \mu)^2) = \sigma^2$.

■



Proposition n° 10 : translation et dilatation d'une loi normale

Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, soit $(a, b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, alors $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. En particulier, $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Démonstration de la proposition n° 10 : Posons $Y = aX + b$ distinguons les cas suivant le signe de a :

- Si $a > 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(aX + b \leq x) = \mathbb{P}(X \leq \frac{x-b}{a}) = F_X(\frac{x-b}{a})$ (car $a > 0$), ainsi,

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \int_{-\infty}^{\frac{x-b}{a}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt. \text{ Posons } u = b + at, \text{ remarquons que } t \mapsto b + at \text{ est strictement monotone et } \mathcal{C}^1, \text{ de plus,}$$

$$du = a dt \text{ et } t = \frac{u-b}{a} \text{ et donc } dt = \frac{1}{a} du, \text{ ainsi par changement de variable,}$$

$$F_Y(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{u-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{a} du = \int_{-\infty}^x \frac{1}{a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-(b+a\mu))^2}{2(a\sigma)^2}} du$$

Ainsi, on reconnaît que $aX + b$ admet comme densité la densité de la loi normale de paramètres $b + a\mu$ et $(a\sigma)^2$

- Si $a < 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(aX + b \leq x) = \mathbb{P}(X \geq \frac{x-b}{a})$ (car $a < 0$), ainsi, $\mathbb{P}(Y \leq x) = \int_{\frac{x-b}{a}}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt$. Posons $u = b + at$, remarquons que $t \mapsto b + at$ est strictement monotone et $\mathcal{C}^1$, de plus, $du = a dt$ et $t = \frac{u-b}{a}$ et donc $dt = \frac{1}{a} du$, ainsi par changement de variable,

$$F_Y(x) = \int_x^{-\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\frac{u-b}{a}-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{a} du = \int_{-\infty}^x \frac{1}{-a\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(u-(b+a\mu))^2}{2(a\sigma)^2}} du$$

Ainsi, on reconnaît que $aX + b$ admet comme densité la densité de la loi normale de paramètres $b + a\mu$ et $(a\sigma)^2$.

- On remarque que si $a = 0$, alors $Y = b$ est une variable aléatoire constante donc discrète donc ne peut pas être une loi normale (car les lois normales sont à densité et aucune variable aléatoire ne peut être discrète et à densité). ■



Proposition n° 11 : sommes de variables aléatoires normales indépendantes

- Si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu', \sigma'^2)$ sont indépendantes, alors $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + \mu', \sigma^2 + \sigma'^2)$.
- Si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, alors $\sum_{i=1}^n X_i \sim \mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_i, \sum_{i=1}^n \sigma_i^2\right)$

Démonstration de la proposition n° 11 : Prenons $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\mu', \sigma'^2)$ indépendantes. Notons f et g des densités respectives de X et Y , et $Z = X + Y$. Puisque X et Y sont des variables aléatoires indépendantes à densité, Z est une variable à densité. D'après la formule du produit de convolution, une densité h de Z vérifie, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma'\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t-\mu')^2}{2\sigma'^2}} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma\sigma'} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{\sigma'^2(t-\mu)^2 + \sigma^2(x-t-\mu')^2}{2\sigma^2\sigma'^2}\right) dt$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, mettons le numérateur dans l'exponentielle sous forme canonique :

$$\begin{aligned} \sigma'^2(t-\mu)^2 + \sigma^2(-t+(x-\mu'))^2 &= \sigma'^2 t^2 - 2t\mu\sigma'^2 + \sigma'^2 \mu^2 + \sigma^2 t^2 - 2t(\sigma^2(x-\mu')) + \sigma^2(x-\mu')^2 \\ &= (\sigma'^2 + \sigma^2)t^2 - 2t(\sigma'^2 \mu + \sigma^2(x-\mu')) + \sigma'^2 \mu^2 + \sigma^2(x-\mu')^2 \\ &= (\sigma'^2 + \sigma^2) \left(t^2 - 2t \frac{\sigma'^2 \mu + \sigma^2(x-\mu')}{\sigma^2 + \sigma'^2} \right) + \sigma'^2 \mu^2 + \sigma^2(x-\mu')^2 \\ &= (\sigma'^2 + \sigma^2) \left(t - \frac{\sigma'^2 \mu + \sigma^2(x-\mu')}{\sigma^2 + \sigma'^2} \right)^2 - \frac{(\sigma'^2 \mu + \sigma^2(x-\mu'))^2}{\sigma^2 + \sigma'^2} + \sigma'^2 \mu^2 + \sigma^2(x-\mu')^2 \\ &= (\sigma'^2 + \sigma^2) \left(t - \frac{\sigma'^2 \mu + \sigma^2(x-\mu')}{\sigma^2 + \sigma'^2} \right)^2 + \frac{\sigma^2 \sigma'^2 \mu^2 + \sigma^2 \sigma'^2 (x-\mu')^2 - 2\sigma^2 \sigma'^2 \mu(x-\mu')}{\sigma^2 + \sigma'^2} \\ &= (\sigma'^2 + \sigma^2) \left(t - \frac{\sigma'^2 \mu + \sigma^2(x-\mu')}{\sigma^2 + \sigma'^2} \right)^2 + \frac{\sigma^2 \sigma'^2 (\mu^2 + 2\mu(\mu' - x) + (x-\mu')^2)}{\sigma^2 + \sigma'^2} \\ &= (\sigma'^2 + \sigma^2) \left(t - \frac{\sigma'^2 \mu + \sigma^2(x-\mu')}{\sigma^2 + \sigma'^2} \right)^2 + \frac{\sigma^2 \sigma'^2 (\mu + \mu' - x)^2}{\sigma^2 + \sigma'^2} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$h(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(\mu + \mu' - x)^2}{2(\sigma^2 + \sigma'^2)}\right)}{2\pi\sigma\sigma'} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(\sigma'^2 + \sigma^2)\left(t - \frac{\sigma'^2\mu + \sigma^2(x - \mu')}{\sigma^2 + \sigma'^2}\right)^2}{2\sigma^2\sigma'^2}\right) dt$$

On pose alors $y = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}}{\sigma\sigma'} \left(t - \frac{\sigma'^2\mu + \sigma^2(x - \mu')}{\sigma^2 + \sigma'^2}\right)$, la fonction $t \mapsto \frac{\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}}{\sigma\sigma'} \left(t - \frac{\sigma'^2\mu + \sigma^2(x - \mu')}{\sigma^2 + \sigma'^2}\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, de plus, $dy = \frac{\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}}{\sigma\sigma'} dt$, et donc $dt = \frac{\sigma\sigma'}{\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}} dy$, ainsi, par changement de variable :

$$h(x) = \frac{\exp\left(-\frac{(\mu + \mu' - x)^2}{2(\sigma^2 + \sigma'^2)}\right)}{2\pi\sigma\sigma'} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} \frac{\sigma\sigma' dy}{\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}} = \frac{\exp\left(-\frac{(\mu + \mu' - x)^2}{2(\sigma^2 + \sigma'^2)}\right)}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Or, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = 1$ car c'est l'intégrale d'une densité de la loi normale centrée réduite. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\mu + \mu' - x)^2}{2(\sigma^2 + \sigma'^2)}\right) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x - m)^2}{2s^2}\right)$$

Où on a posé $s = \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2}$ et $m = \mu + \mu'$. Ainsi, on reconnait une densité de la loi normale de paramètres $m = \mu + \mu'$ et $s^2 = \sigma^2 + \sigma'^2$. On a donc montré que $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu + \mu', \sigma^2 + \sigma'^2)$. Le deuxième point se montre par récurrence, le premier point faisant office d'initialisation pour $n = 2$. ■

6 Tableau comparatif des trois types de variables aléatoires

Considérons un univers Ω muni d'une tribu $\mathcal{T}$ et d'une probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $\mathcal{T}$.

Définition VA	$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tel que pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(X \leq a) \in \mathcal{T}$		
Types de VA	VA finie : $X(\Omega) = \{x_0, \dots, x_n\}$ fini	VA discrète infinie : $X(\Omega) = \{x_k \mid k \in \mathbb{N}\}$	VA à densité : $\mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f$ avec f densité
Définition F_X	La fonction de répartition F_X est définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_X: x \mapsto \mathbb{P}(X \leq x)$		
Existence d'une VA dont la loi est imposée	Si $(p_k)_{0 \leq k \leq n} \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ et $\sum_{k=0}^n p_k = 1$, et $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, alors il existe X tel que pour tout i , $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$. En particulier, $F_X(x_k) = \sum_{i=1}^k p_i$	Si $\sum p_n$ SATP converge de somme 1 et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ strictement croissante, alors il existe X telle que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = x_n) = p_n$. En particulier, $F_X(x_k) = \sum_{i=1}^k p_i$.	Si f positive, continue sauf un nombre fini de points, $\int_{\mathbb{R}} f$ converge et vaut 1 (définition d'une densité de probabilité), alors il existe X telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.
SCE associé à X	$(X = x_k)_{k \in \llbracket 0; n \rrbracket}$	$(X = x_n)_{n \in \mathbb{N}}$	Pas de SCE associé à X (car $X(\Omega)$ non dénombrable)
Loi à partir de F_X	$\mathbb{P}(X = x_k) = F_X(x_k) - F_X(x_{k-1})$ (presque une dérivée) pour $k > 0$.		$f(x) = F'_X(x)$ si f continue en x , valeur arbitraire sinon
Propriétés F_X	F_X est croissante $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$ $F_X(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$		
	Constante sur $[x_k; x_{k+1}[$, F_X discontinue en x_k ssi $\mathbb{P}(X = x_k) > 0$		Continue sur $\mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf un nombre fini de points
Def espérance	$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n x_k \mathbb{P}(X = x_k)$	$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} x_n \mathbb{P}(X = x_n)$ si ACV	$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ si ACV
Propriétés de $\mathbb{E}$	Si X et Y ont des espérances, alors $\lambda X + Y$ aussi $\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$, $\mathbb{E}(\lambda) = \lambda$. $X \geq 0 \implies \mathbb{E}(X) \geq 0$. $Y \leq X \implies \mathbb{E}(Y) \leq \mathbb{E}(X)$		
Formule transfert	$\mathbb{E}(\phi(X)) = \sum_{i=0}^n \phi(x_i) \mathbb{P}(X = x_i)$ $\mathbb{E}(\phi(X, Y)) = \sum_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq p}} \phi(x_i, y_j) \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j)$	$\mathbb{E}(\phi(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi(x_n) \mathbb{P}(X = x_n)$ ssi ACV	$\mathbb{E}(\phi(X)) = \int_I \phi(x) f(x) dx$ ssi ACV , ϕ définie sur $I \supset X(\Omega)$, continue sur I privé d'un nombre fini de points
Définition indépendance	Les VA $X_0, \dots, X_n$ sont indépendantes si, pour tout $(I_0, I_1, \dots, I_n)$ famille d'intervalles, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^n (X_i \in I_i)\right) = \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(X_i \in I_i)$		
	Les VA $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendantes si pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout $(I_0, I_1, \dots, I_n)$ famille d'intervalles, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^n (X_i \in I_i)\right) = \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(X_i \in I_i)$		
Caractérisation de l'indépendance	$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ indépendantes ssi $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall (x_0, x_1, \dots, x_n)$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=0}^n (X_i = x_i)\right) = \prod_{i=0}^n \mathbb{P}(X_i = x_i)$		Pas de caractérisation car $\mathbb{P}(X_i = x_i) = 0$
Variance	Def : $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$ si existence. KH : X a une variance ssi X^2 a une espérance alors $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$. $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$		
Markov/BT	Si $a > 0$ et X positive admet une espérance, alors $\mathbb{P}(X \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{a}$. Si X admet une variance, alors $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq a) \leq \frac{\mathbb{V}(X)}{a^2}$		
Si $X_1, \dots, X_n$ indépendantes	Si les X_i ont des espérances, alors $\prod_{i=1}^n X_i$ aussi et $\mathbb{E}(\prod_{i=1}^n X_i) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$. Si les X_i ont des variances, alors $\sum_{i=1}^n X_i$ aussi et $\mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_i)$		
Loi de $X + Y$ si X et Y indépendantes	Si X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X + Y = n) = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) \mathbb{P}(Y = n - k)$		Si X (resp. Y) a pour densité f (resp. g), alors $X + Y$ a pour densité $x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(x - t) dt$.