

Correction de l'exercice 1.

Correction de l'exercice 2.

Correction de l'exercice 3.

Correction de l'exercice 4. 1. f est une fonction positive sur $\mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2, 3\}$. $\int_{-\infty}^2 f$ converge et vaut 0 (car f est nulle sur $] -\infty; 2[$). $\int_3^{+\infty} f$ converge et vaut 0 (car f est nulle sur $] 3; +\infty[$). $\int_2^3 f$ converge (car $t \mapsto \frac{2}{5}t$ est continue sur $[2; 3]$). Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} f$ converge. De plus,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^2 0 + \int_2^3 \frac{2}{5}t dt + \int_3^{+\infty} 0 = \left[\frac{t^2}{5} \right]_2^3 = 1$$

Ainsi, f est une densité de probabilité. Pour g , on reconnaît une densité d'une loi uniforme sur $[-1; 1]$.

2. Comme X et Y sont à densité et indépendantes, $X + Y$ est aussi à densité, dont une densité est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2t}{5} \mathbb{1}_{[2;3]}(t) \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1;1]}(x-t) dt$$

Comme $\mathbb{1}_{[2;3]}(t) = 0$ si $t < 2$ ou si $t > 3$, on découpe l'intégrale en trois morceaux par Chasles :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^2 \frac{t}{5} \cdot 0 \cdot \mathbb{1}_{[-1;1]}(x-t) dt + \int_2^3 \frac{t}{5} \cdot 1 \cdot \mathbb{1}_{[-1;1]}(x-t) dt + \int_3^{+\infty} \frac{t}{5} \cdot 0 \cdot \mathbb{1}_{[-1;1]}(x-t) dt \\ &= \int_2^3 \frac{t}{5} \mathbb{1}_{[-1;1]}(x-t) dt \end{aligned}$$

Soit $t \in [2; 3]$. Alors $\mathbb{1}_{[-1;1]}(x-t) = 1$ ssi $x-t \in [-1; 1]$ ssi $-1 \leq x-t \leq 1$ ssi $-1-x \leq -t \leq 1-x$ ssi $x-1 \leq t \leq x+1$ ssi $t \in [x-1; x+1]$.

Ainsi,

$$h(x) = \int_{[2;3] \cap [x-1; x+1]} \frac{t}{5} dt$$

On va donc étudier l'intersection des intervalles $[2; 3]$ et $[x-1; x+1]$, ce qui explique l'apparition de différents cas suivant la valeur de x .

- Si $x < 1$ ou $x > 4$, les intervalles $[2; 3]$ et $[x-1; x+1]$ sont disjoints, donc

$$h(x) = 0$$

- Si $x \in [2; 3]$, alors $[2; 3] \subset [x-1; x+1]$, d'où

$$h(x) = \int_2^3 \frac{t}{5} dt = \left[\frac{t^2}{10} \right]_2^3 = \frac{1}{2}$$

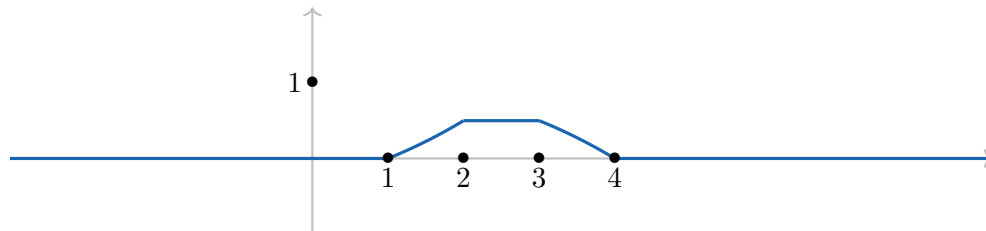
- Si $x \in]1; 2[$, alors $[2; 3] \cap [x-1; x+1] = [2; x+1]$, d'où

$$h(x) = \int_2^{x+1} \frac{t}{5} dt = \left[\frac{t^2}{10} \right]_2^{x+1} = \frac{(x+1)^2 - 4}{10}$$

- Si $x \in]3; 4[$, alors $[2; 3] \cap [x-1; x+1] = [x-1; 3]$, d'où

$$h(x) = \int_{x-1}^3 \frac{t}{5} dt = \left[\frac{t^2}{10} \right]_{x-1}^3 = \frac{9 - (x-1)^2}{10}$$

Ainsi, $h: x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \text{ ou } x > 4 \\ \frac{(x+1)^2 - 4}{10} & \text{si } x \in]1; 2[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x \in [2; 3] \\ \frac{9 - (x-1)^2}{10} & \text{si } x \in]3; 4[\end{cases}$ est une densité de $X + Y$.



3. Ne pas tenter de calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} h(x) dx$ c'est possible mais, y a plus court ! Comme $Y \in \mathcal{U}([-1; 1])$, Y admet une espérance et $\mathbb{E}(Y) = \frac{-1+1}{2} = 0$. De plus, la fonction $x \mapsto xf(x)$ est nulle en dehors de $[2; 3]$ et est continue sur $[2; 3]$. Ainsi, $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge absolument et X admet une espérance qui vaut :

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_2^3 \frac{2x^2}{5} dx = \left[\frac{2x^3}{15} \right]_2^3 = 2 \cdot \frac{27-8}{15} = \frac{38}{15}$$

Ainsi, par linéarité, $X + Y$ admet une espérance et $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{38}{15} + 0 = \frac{38}{15}$.

Correction de l'exercice 5.

Correction de l'exercice 6.

Correction de l'exercice 7.

Correction de l'exercice 8.

Correction de l'exercice 9.

Correction de l'exercice 10.

Correction de l'exercice 11.

Correction de l'exercice 12.

Correction de l'exercice 13.

Correction de l'exercice 14. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$, en utilisant la croissance stricte d'exponentielle,

$$F_U(x) = \mathbb{P}(U \leq x) = \mathbb{P}(\ln(X/r) \leq x) = \mathbb{P}(X/r \leq e^x) = \mathbb{P}(X \leq re^x) = F_X(re^x)$$

Or, d'après le cours, comme $X \sim \mathcal{U}(]0; r])$, $F_X: y \mapsto \frac{y-0}{r-0} \mathbb{1}_{[0; r]}(y) + \mathbb{1}_{]r; +\infty[}(y)$, donc

$$F_U(x) = \frac{re^x}{r} \mathbb{1}_{[0; r]}(re^x) + \mathbb{1}_{]r; +\infty[}(re^x)$$

Or, $re^x \leq r$ ssi $x \leq 0$. Ainsi, si $x \leq 0$, $F_U(x) = e^x$ et si $x > 0$, $F_U(x) = 1$. On observe que $x \mapsto 1$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ et $x \mapsto e^x$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-$ donc F_U est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$. De plus, si $x > 0$, $F_U(x) = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1$ et si $x \leq 0$, $F_U(x) = e^x \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 1$ (par continuité d'exponentielle en 0), ainsi, $F_U(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 = F_U(0)$, ainsi, F_U est continue en 0 et donc continue sur $\mathbb{R}$, ainsi, U est une variable aléatoire à densité et une densité

de U est donnée par $f(x) = F'_U(x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$ (valeur arbitraire), ainsi, $f: x \mapsto e^x \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(x)$ est une densité de U .

De même,

$$F_V(x) = \mathbb{P}(V \leq x) = \mathbb{P}(-\ln(Y/r) \leq x) = \mathbb{P}(Y \geq re^{-x}) = 1 - \mathbb{P}(Y < re^{-x}) = 1 - F_Y(re^{-x})$$

(comme Y est à densité, $F_Y(a) = \mathbb{P}(Y \leq a) = \mathbb{P}(Y < a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$), ainsi,

$$F_V(x) = 1 - \frac{re^{-x} - 0}{r - 0} \mathbb{1}_{[0; r]}(re^{-x}) - \mathbb{1}_{]r; +\infty[}(re^{-x})$$

Ainsi, si $x \geq 0$, $F_V(x) = 1 - e^{-x}$ et si $x < 0$, $F_V(x) = 0$. Bref, $F_V: x \mapsto (1 - e^{-x}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$. On reconnaît que $V \sim \mathcal{E}(1)$ et donc $g: x \mapsto e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ est une densité de V .

2. Comme U et V sont indépendantes, d'après le cours $U + V$ admet comme densité la fonction :

$$h: x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^t \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(t) e^{-(x-t)} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors comme $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_-^*}(t) = 1$ si $t < 0$ et 0 si $t \geq 0$, on coupe l'intégrale en deux par Chasles :

$$h(x) = \int_{-\infty}^0 e^t \cdot 1 \cdot e^{-x+t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt + \int_0^{+\infty} e^t \cdot 0 \cdot e^{-x+t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt = \int_{-\infty}^0 e^{-x+2t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \leq 0$, $\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) = 1$ ssi $x-t \geq 0$ ssi $t \leq x$ (comme t est négatif, on remarque que cette condition est automatiquement vérifiée si $x \geq 0$, on distingue donc les cas).

- Si $x \geq 0$, alors pour tout $t \in]-\infty; 0]$, $t \leq 0 \leq x$ de sorte que $x-t \geq 0$, ainsi,

$$h(x) = \int_{-\infty}^0 e^{-x+2t} \cdot 1 dt = \left[\frac{1}{2} e^{-x+2t} \right]_{-\infty}^0 = \frac{e^{-x}}{2}$$

- Si $x < 0$, alors il y a deux cas possibles : $t \in]-\infty; x]$ (et dans ce cas $t \leq x$ et l'indicatrice vaut 1) ou $t \in]x; 0]$ (et dans ce cas $t > x$ et l'indicatrice vaut 0). On coupe alors l'intégrale en deux par Chasles :

$$h(x) = \int_{-\infty}^x e^{-x+2t} \cdot 1 dt + \int_x^0 e^{-x+2t} \cdot 0 dt$$

$$\text{Donc } h(x) = \left[\frac{1}{2} e^{-x+2t} \right]_{-\infty}^x = \frac{e^{-x}}{2}.$$

Dans tous, les cas, on a montré que $h(x) = \frac{e^{-|x|}}{2}$, ainsi $x \mapsto \frac{e^{-|x|}}{2}$ est une densité de $X + Y$.

Correction de l'exercice 15.

Correction de l'exercice 16.

Correction de l'exercice 17.

Correction de l'exercice 18.

Correction de l'exercice 19.