



Le but de ce chapitre est d'étudier le produit scalaire dans \mathbb{R}^n .

Table des matières

1	Produit scalaire et norme euclidienne	2
2	Orthogonalité	2
3	Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n	3
4	Distance	4
5	Théorème spectral	5
6	Interprétation de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés	5
7	Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (hors programme)	6

Dans ce chapitre, on travaille dans \mathbb{R}^n avec $n \in \mathbb{N}^*$, on considère F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n et on note $d = \dim(F)$.

1 Produit scalaire et norme euclidienne



Définition du produit scalaire dans \mathbb{R}^n

On définit le **produit scalaire** de $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et de $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ par $\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k$.



Proposition n° 1 : propriétés du produit scalaire

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire (bilinéaire)
2. Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ (symétrique) 3. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, x \rangle \geq 0$
4. $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, x \rangle = 0 \implies x = 0_{\mathbb{R}^n}$
5. Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^n , alors en notant $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$, $\langle x, y \rangle = X^T Y$.



Définition de la norme euclidienne

Soit $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On définit la **norme euclidienne** de x par : $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}$.



Proposition n° 2 : propriétés de la norme euclidienne, identité remarquable

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ et $(v_1, v_2, \dots, v_d) \in (\mathbb{R}^n)^d$ et $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|x\| \geq 0$
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$
3. $\|x\| = 0 \implies x = 0_{\mathbb{R}^n}$
4. $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x, y \rangle + \|y\|^2$
5. $\left\| \sum_{i=1}^d v_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^d \|v_i\|^2 + 2 \times \sum_{1 \leq i < j \leq d} \langle v_i, v_j \rangle$

Exemple 1. Si $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_{\mathbb{R}^n}\}$, posons $y = \frac{1}{\|x\|} x$, alors $\|y\| = 1$.



Théorème n° 1 : inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$: $\langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \times \langle y, y \rangle$ et $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$
 De plus, $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \times \|y\|$ ssi (x, y) est liée (i.e. il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).



Proposition n° 3 : inégalité triangulaire et cas d'égalité

Pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$
 De plus pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$ $\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \iff \exists \lambda \geq 0 \quad x = \lambda y \quad \text{ou} \quad y = \lambda x$


2 Orthogonalité



Définition de l'orthogonalité de deux vecteurs

On dit que x et y sont **orthogonaux** si $\langle x, y \rangle = 0$.


- Exemples 2.**
- Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de \mathbb{R}^n (y compris à lui même).
 - Dans \mathbb{R}^3 , $u = (1, 3, 1)$ et $v = (0, 1, -3)$ sont orthogonaux.

 **Définition de deux matrices colonnes orthogonales**


| Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$, on dit que X et Y sont **orthogonaux** si $X^T Y = 0$.

 **Théorème n° 2 de Pythagore** *(le logo colle au théorème pour une fois)*

| Si x et y sont orthogonaux, alors $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ (et réciproquement).


 **Proposition n° 4 : liberté d'une famille orthogonale ne contenant pas le vecteur nul**

| Une famille de vecteurs **non nuls** deux à deux orthogonaux est libre.

 **Définition d'une base orthonormale**

| Soit $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \dots, f_d)$ une base de F , on dit que \mathcal{B} est **orthonormale** si les vecteurs de \mathcal{B} sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux, c'est-à-dire si : $\forall (i, j) \in \llbracket 1 ; d \rrbracket^2 \quad \langle f_i, f_j \rangle = \delta_{i,j}$

- Exemples 3.**
1. La base canonique de \mathbb{R}^n est orthonormale.
 2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, posons $f_1 = (\cos(\theta), \sin(\theta))$ et $f_2 = (-\sin(\theta), \cos(\theta))$, alors (f_1, f_2) est une base orthonormale de \mathbb{R}^2 .

 **Proposition n° 5 : calculs dans une base orthonormale**

Soit $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ une base orthonormale de \mathbb{R}^n (pas forcément la base canonique) et $(x, y) \in (\mathbb{R}^n)^2$. Il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$ et $y = \sum_{i=1}^n \mu_i f_i$.


1. $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mu_i$
2. $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2}$
3. $\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \lambda_i = \langle x, f_i \rangle$
4. $x = \sum_{i=1}^n \langle x, f_i \rangle f_i$.

- Remarques 1.**
- La proposition 5 montre que les calculs de normes et de produits scalaires s'effectuent avec les mêmes formules que la définition du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale.
 - La proposition 5 s'adapte si $\mathcal{B} = (f_1, f_2, \dots, f_d)$ est une base orthonormale de F : pour $(x, y) \in F^2$, il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_d) \in \mathbb{R}^d$ et $(\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{R}^d$ tel que $x = \sum_{i=1}^d \lambda_i f_i$ et $y = \sum_{i=1}^d \mu_i f_i$, alors $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^d \lambda_i \mu_i$ et $x = \sum_{i=1}^d \langle x, f_i \rangle f_i$.

 **Théorème n° 3 : existence de base orthonormale** *(admis)*

| Soit F un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n non réduit à $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, alors F admet au moins une base orthonormale.

3 Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n

 **Définition de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel**

| L'**orthogonal** de F est défini comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les éléments de F : $F^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall f \in F \quad \langle x, f \rangle = 0\}$

Exemple 4. Dans \mathbb{R}^3 , si $F = \text{vect}((1, 0, 0))$ que vaut F^\perp ? et dans le cas où $F = \text{vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$?



Proposition n° 6 : propriétés de l'orthogonal

1. F^\perp est un SEV de \mathbb{R}^n
2. $\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \exists!(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp \quad x = x_F + x_{F^\perp}$



Définition de la projection orthogonale

Soit $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ tel que $x = x_F + x_{F^\perp}$. On pose alors $p(x) = x_F$. La fonction $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est appelée **projection orthogonale** sur F .



Théorème n° 4 : propriétés de la projection orthogonale

Soit p la projection orthogonale sur F .

1. $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$
2. $p \circ p = p$
3. $\text{Im}(p) = F$
4. $\text{Ker}(p) = F^\perp$
5. $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$
6. p est le seul endomorphisme de \mathbb{R}^n tel que $p \circ p = p$, $\text{Im}(p) = F$ et $\text{Ker}(p) = F^\perp$.
7. Si (g_1, g_2, \dots, g_d) est une base **orthonormale** de F , alors on a

$$p: x \mapsto \sum_{i=1}^d \langle x, g_i \rangle g_i$$

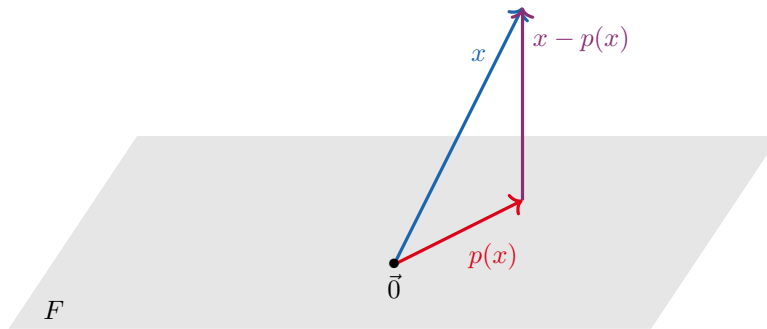


FIGURE 1 – La projection orthogonale sur F du vecteur x .

Exemple 5. Notons $F = \text{vect}((1, 0, 0), (1, 2, 3))$, déterminer la projection orthogonale sur F .

4 Distance



Définition de la distance entre deux vecteurs

Soient $u \in \mathbb{R}^n$ et $v \in \mathbb{R}^n$, le réel $d(u, v) = \|u - v\|$ est appelé **distance** entre u et v .



Définition de la distance d'un vecteur à une partie de \mathbb{R}^n

Soient $u \in \mathbb{R}^n$ et X une partie de \mathbb{R}^n non vide, on définit la **distance** de u à X par :

$$d(u, X) = \inf \{d(u, x) \mid x \in X\}$$

Exemple 6. Dans \mathbb{R}^2 , si X est le cercle unité, $u = (0, 0)$ et $v = (3, 0)$, que valent $d(u, X)$ et $d(v, X)$?



Théorème n° 5 : minimisation de la distance entre un vecteur et un SEV de \mathbb{R}^n

Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Le vecteur $p(x)$ est l'unique vecteur de F vérifiant $\|x - p(x)\| = d(x, F)$.

Exemple 7. On note $D = \text{vect}((1, 2, 3))$, soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, déterminer $d(u, D)$.

5 Théorème spectral



Proposition n° 7 : orthogonalité de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes

Soit A une matrice symétrique réelle. Soient X et Y deux vecteurs propres associés respectivement à λ et à μ avec $\lambda \neq \mu$, alors X et Y sont orthogonaux.

Remarque 2. Soit \mathcal{B}' une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et \mathcal{B} la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ vérifie $P^\top P = I_n = PP^\top$, on dit que P est une matrice **orthogonale**.



Théorème n° 6 : théorème spectral

(admis)

Soit S une matrice **symétrique à coefficients réels**, alors il existe une base orthonormale de vecteurs propre de S : S est diagonalisable dans une base orthonormale. Il existe P une matrice inversible et D une matrice diagonale telles que $S = PDP^{-1}$ avec $P^{-1} = P^\top$.



Exemple classique de diagonalisation de matrice dans une base orthonormale

Considérons $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Justifier que J est diagonalisable.
2. Calculer J^2 et en déduire que les valeurs propres de J sont racines de l'équation $x^2 - 3x = 0$.
3. Déterminer une base de $\text{Ker}(J - \lambda I_3)$ pour chaque λ racine.
4. En notant (X_1, X_2) une base de l'espace propre de dimension 2, déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $X_2 - \alpha X_1$ soit orthogonal à X_1 . En déduire une base orthonormale de cet espace propre.
5. Déterminer une base orthonormale du second espace propre.
6. En déduire une base orthonormale de vecteurs propres de J puis déterminer D et P telles que $J = PDP^{-1}$ avec D diagonale et $P^{-1} = P^\top$.

Remarque 3. Si S est une matrice symétrique réelle, alors une base de vecteurs propres de S n'est pas forcément orthonormale.

6 Interprétation de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés

Si on dispose de points (x_i, y_i) pour $1 \leq i \leq n$ (avec les x_i deux à deux distincts). On cherche «la meilleure» droite qui explique ces points. La méthode des moindres carrés consiste à trouver le couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ qui minimise (si existence) la fonction $f: (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$. Notons $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $u = (1, 1, \dots, 1)$. Ainsi, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $f(a, b) = \|y - (ax + bu)\|^2$. Posons $F = \text{vect}(x, u)$ (sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^n) alors

$$\min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} f(a, b) = \min_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \|y - (ax + bu)\|^2 = \min_{f \in F} \|y - f\|^2 = d(y, F)^2 = \|y - p(y)\|^2$$

Où on a noté p la projection orthogonale sur F . Remarquons que $p(y) \in F = \text{vect}(x, u)$. Par définition de F , (x, u) est une famille génératrice de F . De plus, (x, u) est une famille de deux vecteurs non colinéaires donc il existe un unique couple $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p(y) = \hat{a}x + \hat{b}u$. Ainsi, il suffit de déterminer \hat{a} et \hat{b} . Pour cela, proposons deux méthodes :

- On sait que $y - p(y) \in F^\perp$. En particulier, $y - p(y)$ et x sont orthogonaux ainsi que $y - p(y)$ et u . Ainsi, $\langle y - p(y), x \rangle = 0$ et $\langle y - p(y), u \rangle = 0$. Donc, par linéarité à gauche du produit scalaire, on obtient donc ce système linéaire à deux inconnues et à deux équations :

$$\begin{cases} \langle y, x \rangle &= \hat{a} \langle x, x \rangle + \hat{b} \langle u, x \rangle \\ \langle y, u \rangle &= \hat{a} \langle x, u \rangle + \hat{b} \langle u, u \rangle \end{cases} \iff \begin{cases} \langle u, u \rangle \langle y, x \rangle - \langle y, u \rangle \langle u, x \rangle &= \hat{a} (\langle x, x \rangle \langle u, u \rangle - \langle u, x \rangle^2) \\ \langle y, u \rangle - \hat{a} \langle x, u \rangle &= \hat{b} \langle u, u \rangle \end{cases}$$

Pour alléger, remarquons que $\langle u, u \rangle = n$ et introduisons les notations suivantes :

$$- \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \frac{1}{n} \langle u, x \rangle \text{ (moyenne empirique de la série des } x_i)$$

$$- \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = \frac{1}{n} \langle u, y \rangle \text{ (moyenne empirique de la série des } y_i)$$

$$- s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k^2 - \bar{x}^2 \text{ (variance empirique de la série des } x_i)$$

$$- s_{x,y} = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k y_k - \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i \right) \text{ (covariance des séries } x_i \text{ et } y_i)$$

En divisant par n^2 la première ligne du système, on obtient alors $s_{x,y} = \hat{a} s_x^2$, avec $s_x^2 \neq 0$, on obtient $\hat{a} = \frac{s_{x,y}}{s_x^2}$,

puis la seconde ligne fournit $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a} \bar{x}$.

- Comme (\hat{a}, \hat{b}) minimise f , nécessairement, (\hat{a}, \hat{b}) est un point critique de f . Calculons donc le gradient de f , pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f}{\partial a}(a, b) = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - ax_i - b) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial b}(a, b) = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)$$

On obtient ainsi, $\sum_{i=1}^n x_i y_i - \hat{a} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \hat{b} \sum_{i=1}^n x_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n y_i - \hat{a} \sum_{i=1}^n x_i - n\hat{b} = 0$. On obtient alors les mêmes équations que dans la première méthode.

Remarque 4. Si on cherche la «meilleure courbe» $f: x \mapsto a + bx + ce^x$ pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on procède de la même manière en calculant la projection orthogonale du vecteur y sur $F = \text{vect}(u, x, e)$ où $e = (e^{x_1}, \dots, e^{x_n})$.

7 Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt (hors programme)

Remarque 5. Soit (e_1, e_2, \dots, e_d) une famille orthonormale, si on cherche un vecteur orthogonal à tous les e_i , posons $F = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_d)$, alors $x - p(x) = x - \sum_{k=1}^d \langle x, e_k \rangle e_k \in F^\perp$, convient (où p est la projection orthogonale sur F).



Comment obtenir des bases orthonormales ?

- Si $\dim(F) = 1$ et $\mathcal{B} = (f_1)$ est une base de F , alors, on pose $g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$. Ainsi, $\mathcal{B}' = (g_1)$ est une base orthonormale de F .
- Si $\dim(F) = 2$ et que $\mathcal{B} = (f_1, f_2)$ est une base de F , alors, on pose
 - $g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$
 - $u = f_2 - p(f_2) = f_2 - \langle f_2, g_1 \rangle g_1$ (où p est la projection orthogonale sur $\text{vect}(g_1)$) puis $g_2 = \frac{u}{\|u\|}$
 Ainsi, $\mathcal{B}' = (g_1, g_2)$ est une base orthonormale de F .
- Si $\dim(F) = 3$ et $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de F , alors, on pose
 - $g_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|}$
 - $u = f_2 - p(f_2) = f_2 - \langle f_2, g_1 \rangle g_1$ (où p est la projection orthogonale sur $\text{vect}(g_1)$) puis $g_2 = \frac{u}{\|u\|}$
 - $v = f_3 - p(f_3) = f_3 - \langle f_3, g_1 \rangle g_1 - \langle f_3, g_2 \rangle g_2$ (où p est la projection orthogonale sur $\text{vect}(g_1, g_2)$) puis $g_3 = \frac{v}{\|v\|}$
 Ainsi, $\mathcal{B}' = (g_1, g_2, g_3)$ est une base orthonormale de F .
- On procède ainsi quelle que soit la dimension de F .

Remarque 6. Une telle famille n'est pas unique, car à chaque étape, on peut poser $g_i = \pm u / \|u\|$.

Exemple 8. Appliquer Gram-Schmidt à $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ dans \mathbb{R}^4 avec $f_1 = (1, 1, 0, 0)$, $f_2 = (0, 1, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 1, 1, 1)$.

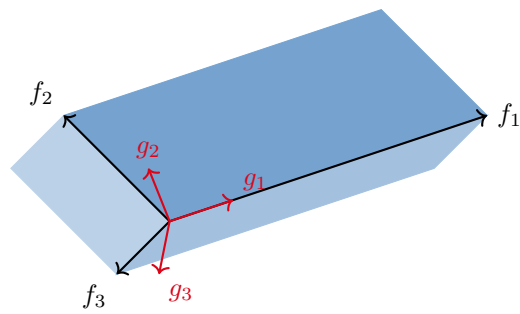


FIGURE 2 – Principe de Gram-Schmidt : g_1 est de norme 1 et proportionnel à f_1 , g_2 est de norme 1 et appartient au plan engendré par f_1 et f_2 , g_3 est de norme 1 et appartenant à l'espace engendré par f_1 , f_2 et f_3 .