

DM5: à rendre le mardi 17 février 2026

Exercice 1

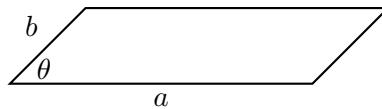
Cet exercice est facultatif si vous avez pris le sujet ENS ou si vous avez eu plus de 8 au DS5. On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -14 & -10 & 10 \\ 7 & 5 & -4 \\ -14 & -10 & 11 \end{pmatrix}$$

1. Pour chacune des matrices définies ci-dessus, indiquez si elle est inversible (en justifiant), symétrique, diagonalisable (en justifiant), triangulaire.
2. Diagonaliser les matrices qui sont diagonalisables.
3. Au vu des réponses précédentes que penser des implications «inversible implique diagonalisable», «diagonalisable implique inversible», «triangulaire implique diagonalisable», «triangulaire implique inversible», «symétrique implique diagonalisable»? Justifier vos réponses.

Exercice 2

On considère un réseau dont la maille élémentaire est un parallélogramme, structure présente notamment en cristallographie. Cette maille élémentaire a alors pour aire $ab \sin \theta$.



On suppose que l'angle θ est la réalisation d'une variable aléatoire Θ suivant une loi uniforme sur $[0; \pi/2]$. L'étude de la variable aléatoire $\sin \Theta$ nécessite certaines connaissances sur une fonction intermédiaire notée A qui seront établies dans la partie I. Puis nous étudierons cette variable aléatoire en partie II.

Partie I : Définition et propriétés de la fonction A

1. Montrer que la fonction sinus réalise une bijection de $[-\pi/2; \pi/2]$ dans $[-1; 1]$. On note alors A la réciproque de la fonction
$$\begin{cases} [-\pi/2; \pi/2] \longrightarrow [-1; 1] \\ x \longmapsto \sin x \end{cases}.$$
2. Déterminer $A(1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$.
3. Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4. Soit x appartenant à $[-1; 1]$, montrer que $\cos(A(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
5. Montrer que la fonction A est dérivable sur $] -1; 1 [$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.
6. (a) Déterminer le développement limité à l'ordre un de la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+t}}$.
(b) Montrer que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par

$$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3).$$

Partie II : Étude d'une variable aléatoire

On considère une variable aléatoire Θ suivant une loi uniforme sur $[0; \pi/2]$ et on s'intéresse à la variable aléatoire $X = \sin \Theta$.

7. Déterminer la fonction de répartition F_X de X .
8. En déduire que X est une variable aléatoire à densité dont une densité est

$$f_X : x \mapsto \begin{cases} \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0; 1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

9. Montrer que la variable aléatoire X possède une espérance et donner sa valeur.
10. Quelle est la signification de ce résultat par rapport au contexte proposé dans le préambule du problème ?
11. Montrer que la variable aléatoire X^2 possède une espérance et donner sa valeur. On pourra utiliser, avec justification, le changement de variable $x = \sin t$.
12. On s'intéresse, dans cette question au comportement asymptotique d'un échantillonnage de même loi que X .

Pour cela, on considère un entier naturel n non nul ainsi qu'un n -échantillon $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ formé par n variables aléatoires indépendantes et de même loi que X .

On introduit la «moyenne empirique» $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$.

- (a) Que valent l'espérance et la variance de M_n ?
- (b) Énoncer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- (c) En déduire, en fonction de n , de l'espérance et de la variance de X , un intervalle $[a_n; b_n]$ tel que

$$\mathbb{P}(M_n \in [a_n; b_n]) \geq 95\%$$

13. On s'intéresse, dans cette question, à des événements «rares» associés à la variable aléatoire X .
 - (a) À l'aide de la question 6 de la partie I, prouver l'existence de constantes A et B telles que :

$$\mathbb{P}\left(X \leq \frac{1}{n}\right) - \frac{A}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{B}{n^3}$$

- (b) Pour tout entier n non nul, on pose $p_n = \mathbb{P}\left(X \geq 1 - \frac{1}{n}\right)$.

- i. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

- ii. Prouver que, pour tout entier n non nul, on a $\sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - p_n)\right) = 1 - \frac{1}{n}$.

- iii. Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre deux de la fonction cos.

- iv. En déduire une constante c telle que $p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{n}}$.

14. Écrire une fonction **SimulX** qui simule X , on utilisera une simulation d'une loi uniforme sur $[0; 1]$.
15. En déduire une fonction **EstimPn(n)** qui estime p_n .
16. En déduire une estimation de c , votre résultat est-il cohérent avec l'expression de c trouvée ?