

Dans ce TD, on pourra utiliser la calculatrice pour obtenir des valeurs de $\Phi(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ et Φ la loi de répartition de la loi normale centrée réduite.

Convergence en probabilité

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à densité (et de même densité) possédant un moment d'ordre 2.

- On définit la fonction de répartition empirique par : $F_n: x \mapsto \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{]-\infty; x]}(X_k)$, que peut-on dire de la convergence en probabilité de $F_n(x)$ quand $n \rightarrow +\infty$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, on définit de même $H_n(a) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{[a; a+h]}(X_k)$, que peut-on dire de la convergence en probabilité de $H_n(a)$ quand $n \rightarrow +\infty$?
- Pourquoi est-ce important en informatique ?

Exercice 2. Considérons $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \sim \mathcal{B}(p_n)$ avec $p_n \in [0; 1]$, démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i \right| \geq \varepsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Convergence en loi

Exercice 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère X_n une variable aléatoire suivant une loi uniforme dans $\left\{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}\right\}$, étudier la convergence en loi de (X_n) .

Exercice 4. On considère $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $[0; 1]$. On pose $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$, étudier la convergence en loi de $(M_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 5. Soit $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > \lambda$, on définit une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_p^{(n)})_{p \in \mathbb{N}^*}$ suivant toutes une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{\lambda}{n}$. On pose

$$Y_n = \frac{1}{n} \min \left\{ p \in \mathbb{N}^* : X_p^{(n)} = 1 \right\}$$

- Quelle est la loi de nY_n ?
- Montrer que la suite (Y_n) converge en loi vers une variable aléatoire $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$.

Théorème central limite

Exercice 6. Soit X qui suit une loi binomiale de paramètres 1000 et 1/2.

- À l'aide d'un programme Python, déterminer la valeur numérique que $\mathbb{P}(480 \leq X \leq 520)$.
- Déterminer une approximation de cette probabilité.
- Comparer l'approximation à la valeur numérique.

Exercice 7. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre 1.

- Donner la loi de $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ (attention S_n désigne une somme et non un écart-type empirique)
- En utilisant le théorème central limite, déterminer la limite de $(\mathbb{P}(S_n \leq n))_{n \in \mathbb{N}^*}$
- En déduire un équivalent de $\sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Exercice 8. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0; 1[$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires indépendante de même loi que X . À l'aide du théorème central limite, déterminer un intervalle dépendant de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ tel que p appartienne à cet intervalle avec une probabilité supérieure ou égale à 0.95 (on pourra utiliser les valeurs de Φ fourni dans le cours)