

Exercice 1

1. (a) Les deux colonnes de la matrice A sont égales, donc A n'est pas inversible, A est symétrique. Comme A est symétrique et à coefficients réels, elle est diagonalisable. Elle n'est pas triangulaire.
- (b) $\det(B) = 2 \cdot 0 - i \cdot i = 1 \neq 0$, ainsi B est inversible, B est symétrique. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \lambda \in \text{Sp}(B) &\iff \det(B - \lambda I_2) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} 2 - \lambda & i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = 0 \\ &\iff (2 - \lambda) \cdot (-\lambda) - i \cdot i = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0 \iff (\lambda - 1)^2 = 0 \iff \lambda = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $\text{Sp}(B) = \{1\}$. Or,

$$\text{rg}(B - I_2) = \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - iL_1} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

(en effet la matrice est échelonnée et a un seul pivot). D'après le théorème du rang, $\dim(E_1(B)) = 2 - 1 = 1$, donc $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(B)} \dim(E_\lambda(B)) = 1 \neq 2$. Ainsi, B n'est pas diagonalisable. La matrice B n'est pas triangulaire.

- (c) $\det(C) = 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 = 0$, ainsi, C n'est pas inversible. Comme la matrice C est triangulaire, on peut en déduire que $\text{Sp}(C) = \{0\}$. Or, $\text{rg}(C) = \text{rg}(C_1, C_2) \xrightarrow{C_1=0} \text{rg}(C_2) \xrightarrow{C_2 \neq 0} 1$. Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim(E_0(C)) = 1$ et la somme des dimensions des espaces propres de C ne vaut pas 2, la matrice C n'est donc pas diagonalisable. La matrice C est triangulaire supérieure.

- (d) La matrice D est échelonnée et a trois pivots, elle est donc inversible. La matrice D n'est pas symétrique. La matrice D est triangulaire supérieure, ainsi $\text{Sp}(D) = \{1, 2\}$. Remarquons que

$$D - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ comme les deux premières colonnes sont nulles mais pas la troisième,}$$

$$\text{rg}(D - I_3) = 1, \text{ d'après le théorème du rang, } \dim(E_1(D)) = 2. \text{ De plus, } D - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cette matrice est échelonnée et a deux pivots, ainsi, $\text{rg}(D - 2I_3) = 2$, d'après le théorème du rang, $\dim(E_2(D)) = 3 - 2 = 1$. Ainsi, ici, $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(D)} \dim(E_\lambda(D)) = 2 + 1 = 3$, donc D est diagonalisable.

- (e) La matrice E est échelonnée et a trois pivots, elle est donc inversible, elle n'est pas symétrique.

$$\text{La matrice } E \text{ est triangulaire supérieure, ainsi, } \text{Sp}(E) = \{1, 2\}. E - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ comme la}$$

première colonne est nulle mais que les deux autres sont non colinéaires, $\text{rg}(E - I_3) = 2$, d'après

$$\text{le théorème du rang, } \dim(E_1(E)) = 1. E - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ la dernière ligne est nulle et}$$

les deux premières sont non colinéaires, ainsi, $\text{rg}(E - 2I_3) = 2$. D'après le théorème du rang, $\dim(E_2(E)) = 1$. Donc, $\sum_{\lambda \in \text{Sp}(E)} \dim(E_\lambda(E)) = 1 + 1 = 2 \neq 3$, ainsi, E n'est pas diagonalisable.

(f) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \operatorname{rg}(F - \lambda I_3) &\stackrel{L_2 \leftrightarrow L_3}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 7 & 5 - \lambda & -4 \\ -14 - \lambda & -10 & 10 \\ -14 & -10 & 11 - \lambda \end{pmatrix} \stackrel{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1, L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 7 & 5 - \lambda & -4 \\ -\lambda & -2\lambda & 2 \\ 0 & -2\lambda & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow 7L_2 + \lambda L_1}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 7 & 5 - \lambda & -4 \\ 0 & -\lambda(\lambda + 9) & 14 - 4\lambda \\ 0 & -2\lambda & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{L_2 \leftarrow 2L_2 - (\lambda + 9)L_3}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 7 & 5 - \lambda & -4 \\ 0 & 0 & 28 - 8\lambda - (\lambda + 9)(3 - \lambda) \\ 0 & -2\lambda & 3 - \lambda \end{pmatrix} \\
 &\stackrel{L_2 \rightarrow L_3}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 7 & 5 - \lambda & -4 \\ 0 & -2\lambda & 3 - \lambda \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ainsi, comme la matrice obtenue est triangulaire, le rang de $F - \lambda I_3$ vaut 3 ssi $-2\lambda \neq 0$ et

$(\lambda - 1)^2 \neq 0$. Ainsi, $\operatorname{Sp}(F) = \{0, 1\}$. Pour $\lambda = 1$, $\operatorname{rg}(F - \lambda I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ (en effet

la matrice est échelonnée et a deux pivots). Pour $\lambda = 0$, $\operatorname{rg}(F - \lambda I_3) = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 7 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$ (la

matrice est aussi échelonnée et a deux pivots). Ainsi, d'après le théorème du rang, $\dim(E_1(F)) = 3 - \operatorname{rg}(F - I_3) = 3 - 2 = 1$ de même $\dim(E_0(F)) = 1$, ainsi, $\sum_{\lambda \in \operatorname{Sp}(F)} \dim(E_\lambda(F)) = 1 + 1 = 2 \neq 3$,

la matrice F n'est pas diagonalisable.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 \lambda \in \operatorname{Sp}(A) &\iff \det(A - \lambda I_2) = 0 \iff \det \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix} = 0 \iff (1 - \lambda)^2 - 1 = 0 \\
 &\iff \lambda^2 - 2\lambda = 0 \iff \lambda(\lambda - 2) = 0
 \end{aligned}$$

De sorte que $\operatorname{Sp}(A) = \{0, 2\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $X \in E_0(A)$ ssi $AX = 0_2$ ssi $\begin{cases} x + y = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$ ssi $x = -y$ ssi

$X = \begin{pmatrix} -y \\ y \end{pmatrix}$ ssi $X \in \operatorname{vect} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de sorte que $\mathcal{B}_0 = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ soit une famille génératrice de $E_0(A)$.

$X \in E_2(A)$ ssi $(A - 2I_2)X = 0_2$ ssi $\begin{cases} -x + y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$ ssi $x = y$ ssi $X = \begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}$ ssi $X \in \operatorname{vect} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, de sorte

que $\mathcal{B}_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ soit une famille génératrice de $E_2(A)$. Ainsi, $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de

vecteurs propres de A , ainsi, $A = PDP^{-1}$ avec $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Pour E on a déjà calculé son spectre à la question 1. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $X \in E_1(D)$ ssi $(D -$

$I_3)X = 0_3$ ssi $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases} 4z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ssi $z = 0$ ssi $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $X \in \operatorname{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Donc $E_1(D) = \operatorname{vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

Passons au deuxième espace propre :

$X \in E_2(D)$ ssi $(D - 2I_3)X = 0_3$ ssi $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ssi $\begin{cases} -x = 0 \\ -y + 4z = 0 \end{cases}$ ssi $\begin{cases} x = 0 \\ y = 4z \end{cases}$ ssi

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 4z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ Ainsi } E_2(D) = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Ainsi,

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

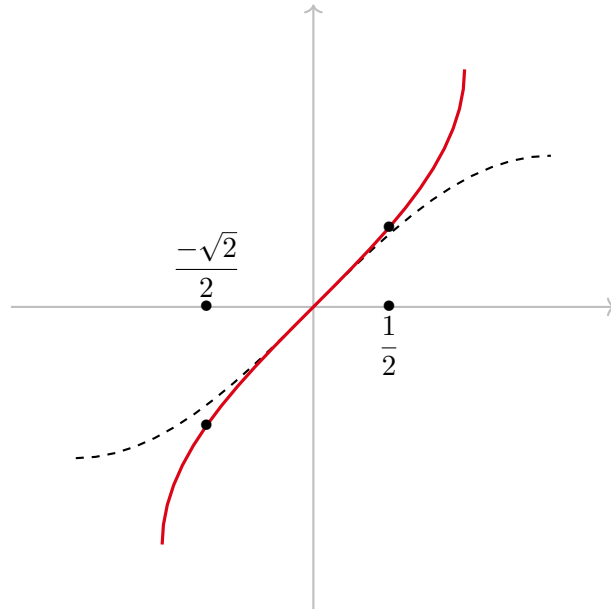
est une base de vecteurs propres de D .

$$\text{Par conséquent, } D = P\Delta P^{-1} \text{ avec } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3.
 - La matrice E est inversible mais non diagonalisable, donc l'implication «inversible implique diagonalisable» est fausse.
 - La matrice A est diagonalisable mais non inversible, donc l'implication «diagonalisable implique inversible» est fausse.
 - La matrice E est triangulaire mais non diagonalisable, donc l'implication «triangulaire implique diagonalisable» est fausse.
 - La matrice C est triangulaire mais non inversible, donc l'implication «triangulaire implique inversible» est fausse.
 - La matrice B est symétrique mais non diagonalisable, donc l'implication «symétrique implique diagonalisable» est fausse (cette implication n'est correcte que pour les matrices à coefficients réels).
 - **Bonus** : la matrice D n'a que deux valeurs propres et est diagonalisable, donc l'implication « $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ a strictement moins de n valeurs propres implique A non diagonalisable» est fausse.

Exercice 2

1. La fonction $\sin$ est dérivable sur $[-\pi/2; \pi/2]$ et pour tout $x \in [-\pi/2; \pi/2]$, $\sin'(x) = \cos(x) \geq 0$, et $\cos(x) = 0$ ssi $x = \pm\pi/2$. Ainsi, sur $[-\pi/2; \pi/2]$, la dérivée de $\sin$ est positive et ne s'annule qu'un nombre fini de fois, donc $\sin$ est strictement croissante sur $[-\pi/2; \pi/2]$. De plus, $\sin$ est continue sur $[-\pi/2; \pi/2]$, d'après le théorème de la bijection, $\sin$ réalise une bijection de $[-\pi/2; \pi/2]$ vers $[f(-\pi/2); f(\pi/2)] = [-1; 1]$.
2.
 - Comme $\sin(\pi/6) = 1/2$. En appliquant la fonction A , on obtient $A(\sin(\pi/6)) = A(1/2)$. Or, $A \circ \sin = \text{Id}_{[-\pi/2; \pi/2]}$ et $\pi/6 \in [-\pi/2; \pi/2]$, donc $\pi/6 = A(1/2)$.
 - De même, $\sin(-\pi/4) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. En appliquant la fonction A , on obtient que $A(\sin(-\pi/4)) = A(-\frac{\sqrt{2}}{2})$. Comme $-\pi/4 \in [-\pi/2; \pi/2]$, $-\pi/4 = A(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.
3. On trace en pointillé la courbe de la fonction $\sin$ sur $[-\pi/2; \pi/2]$, afin de tracer la courbe de la fonction A par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$.



4. Soit $x \in [-1; 1]$, $\cos(A(x))^2 + \sin(A(x))^2 = 1$. Or, $\sin \circ A = \text{Id}_{[-1; 1]}$, donc $\sin(A(x)) = x$. De sorte que $\cos(A(x))^2 = 1 - x^2$. Comme $A: [-1; 1] \rightarrow [-\pi/2; \pi/2]$, nécessairement $A(x) \in [-\pi/2; \pi/2]$. En particulier, $\cos(A(x)) \geq 0$, donc $\cos(A(x)) = \sqrt{1 - x^2}$.
5. Soit $x \in]-1; 1[$. Remarquons que $\sin$ est dérivable en $A(x)$. De plus, $-1 < x < 1$, en appliquant la fonction A qui est strictement croissante, $A(-1) < x < A(1)$ donc $-\pi/2 < A(x) < \pi/2$, donc $\sin'(A(x)) = \cos(A(x)) \neq 0$. Ainsi, d'après le théorème de dérivabilité de la bijection réciproque, A est dérivable en x et

$$A'(x) = \frac{1}{\sin'(A(x))} = \frac{1}{\cos(A(x))} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(où on a utilisé le résultat de la question précédente)

6. (a) En utilisant le développement limité de $x \mapsto (1 + x)^\alpha$ en 0 à l'ordre 1 avec $\alpha = -\frac{1}{2}$, on obtient,

$$\frac{1}{\sqrt{1+t}} = (1+t)^{-1/2} \underset{0}{=} 1 - t/2 + o(t)$$

- (b) En utilisant le développement limité précédent avec $t = -x^2$ on obtient :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

D'après le théorème de primitivation d'un développement limité, on obtient que

$$A(x) = A(0) + x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

De plus, comme $\sin(0) = 0$, $A(\sin(0)) = A(0)$, comme $0 \in [-\pi/2; \pi/2]$, on en déduit que $A(\sin(0)) = 0$. Bref, $0 = A(0)$. On peut donc en conclure que :

$$A(x) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

7. Remarquons que $\Theta(\Omega) = [0; \pi/2]$, ainsi $X(\Omega) = [0; 1]$.
- Soit $x < 0$, $F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = 0$.
 - Soit $x \in [0; 1]$, alors $(X \leq x) = (\sin \Theta \leq x) = (\Theta \leq A(x))$ (en effet, $\sin$ est strictement croissante sur $[0; \pi/2]$). Comme Θ suit une loi uniforme sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, pour tout $y \in [0; \pi/2]$, $\mathbb{P}(\Theta \leq y) = \frac{y - 0}{\pi/2 - 0} = \frac{2y}{\pi}$. Or, $A(x) \in [0; \pi/2]$, donc, $\mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(\Theta \leq A(x)) = \frac{2A(x)}{\pi}$.
 - Soit $x > 1$. Comme $X \leq 1 < 1$, $\mathbb{P}(X \leq x) = 1$.

$$\text{Donc : } F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2A(x)}{\pi} & \text{si } x \in [0; 1] \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

8. • La fonction $x \mapsto 0$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$, la fonction $x \mapsto \frac{2A(x)}{\pi}$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1[$ (en effet, A est dérivable sur $]0; 1[$, et par composée de fonctions continues, A' est continue sur $]0; 1[$, $x \mapsto 1$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]1; +\infty[$. Ainsi, la fonction F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.
 • De plus, comme $\sin$ est continue sur $[-\pi/2; \pi/2]$, d'après le théorème de la bijection, A est continue sur $[-1; 1]$, ainsi :
 — Si $x \in]0; 1[$, $F_X(x) = \frac{2A(x)}{\pi} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{2A(0)}{\pi} = 0$ et si $x < 0$, $F_X(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0 = F_X(0)$, donc F_X est continue en 0.
 — Si $x \in]0; 1[$, $F_X(x) = \frac{2A(x)}{\pi} \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \frac{2A(1)}{\pi} = 1 = F_X(1)$ et pour $x > 1$, $F_X(x) = 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1 = F_X(1)$, donc F_X est continue en 1.

Dès lors, F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points. D'après la caractérisation des variables aléatoires à densité, X est à densité. De plus, une densité de X est donnée par $f_X : x \mapsto \begin{cases} F_X'(x) & \text{si } x \notin \{0, 1\} \\ 0 & \text{si } x = 0 \text{ ou } x = 1 \end{cases}$. En utilisant l'expression la dérivée de A obtenue

$$\text{précédemment, } f_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \text{ ou } x \geq 1 \\ \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0; 1[\end{cases}$$

9. La fonction $\sin$ est continue sur $[0; \pi/2]$ et l'intégrale $\int_0^{\pi/2} \sin(x) f_\Theta(x) dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cdot \frac{2}{\pi} dx$ converge (et même absolument), ainsi, d'après la formule de transfert, X admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(\sin(\Theta)) = \int_0^{\pi/2} \sin(x) f_\Theta(x) dx = \int_0^{\pi/2} \sin(x) \frac{2}{\pi} dx = \left[-\frac{2}{\pi} \cos(x) \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}$$

10. Notons $\mathcal{A}$ l'aire du parallélogramme, alors $\mathcal{A} = abX$, puis par linéarité de l'espérance, $\mathbb{E}(\mathcal{A}) = ab\mathbb{E}(X) = \frac{2ab}{\pi}$. Cela veut dire qu'en moyenne l'aire du parallélogramme vaut $\frac{2ab}{\pi}$.

11. On cherche à montrer que l'intégrale $\int_0^1 x^2 f_X(x) dx$ converge absolument. La fonction $x \mapsto x^2 f_X(x)$ est continue sur $]0; 1[$. Comme il s'agit d'une fonction positive, la convergence suffit. On pose $t = A(x)$, comme $x \in [0; 1]$, cela est équivalent à $\sin(t) = x$. La fonction qui à $x \in [0; 1[$ associe $t = A(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement monotone. $A(0) = 0$ et $A(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1} A(1) = \frac{\pi}{2}$ (par continuité de A en 1), de plus, $dx = \cos(t) dt$, ainsi, les intégrales $\int_0^1 x^2 \frac{2}{\pi\sqrt{1-x^2}} dx$ et $\int_0^{\pi/2} \sin^2(t) \frac{2}{\pi\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cos(t) dt$ ont même nature et sont égales en cas de convergence. Or, pour $t \in]0; \pi/2]$, $\sin^2 \frac{2}{\pi\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cos(t) = \frac{2}{\pi} \sin(t)^2$ (par positivité de $\cos(t)$ sur cet intervalle). Or, $\int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} \sin^2(t) dt$ converge (fonction continue sur un segment). Ainsi, comme l'intégrale converge absolument, d'après la formule de transfert, X^2 possède une espérance et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_0^1 x^2 f_X(x) dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{\pi} \sin^2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

12. (a) Par linéarité de l'espérance M_n admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{n} \cdot (n\mathbb{E}(X)) = \mathbb{E}(X) = \frac{2}{\pi}$$

Or, comme X admet un moment d'ordre 2, d'après la formule de König-Huygens, X admet une variance et $\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2}$. De plus, comme la variance est quadratique :

$$\mathbb{V}(M_n) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k\right) = \frac{1}{n^2} \mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)$$

Or, comme les X_k sont indépendantes, on obtient :

$$\mathbb{V}(M_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{n^2} \cdot n \mathbb{V}(X) = \frac{1}{n} \mathbb{V}(X) = \frac{\pi^2 - 8}{2\pi^2 n}$$

(b) Si Y est une variable aléatoire admettant un moment d'ordre 2 et $\varepsilon > 0$, alors $\mathbb{P}(|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(Y)}{\varepsilon^2}$.

(c) Soit $\varepsilon > 0$, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à M_n , on obtient

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{V}(M_n)}{\varepsilon^2}$$

En passant au complémentaire,

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < \varepsilon) = 1 - \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(M_n)}{\varepsilon^2}$$

Or, $(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < \varepsilon) \subset (|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \leq \varepsilon)$, donc par croissance de la probabilité,

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| < \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \leq \varepsilon)$$

Ainsi, $\mathbb{P}(-\varepsilon \leq M_n - \mathbb{E}(M_n) \leq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(M_n)}{\varepsilon^2}$, donc

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(M_n) - \varepsilon \leq M_n \leq \mathbb{E}(M_n) + \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathbb{V}(M_n)}{\varepsilon^2}$$

Il suffit donc de choisir $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{\mathbb{V}(M_n)}{\varepsilon^2} = 0.05$. Ainsi, $\varepsilon = \sqrt{20\mathbb{V}(M_n)}$ convient. On pose donc $a_n = \mathbb{E}(M_n) - \sqrt{20\mathbb{V}(M_n)}$ et $b_n = \mathbb{E}(M_n) + \sqrt{20\mathbb{V}(M_n)}$, ainsi :

$$\mathbb{P}(M_n \in [a_n; b_n]) \geq 95\%$$

13. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X \leq 1/n) = F_X(1/n) = \frac{2}{\pi} A(1/n)$. Comme $1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, on peut utiliser le développement limité de A en 0,

$$\mathbb{P}(X \leq 1/n) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{6n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \right)$$

ainsi,

$$\mathbb{P}(X \leq 1/n) - \frac{2}{\pi n} = \frac{1}{3\pi n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \sim \frac{1}{3\pi n^3}$$

Ainsi, $A = 2/\pi$ et $B = \frac{1}{3\pi}$ conviennent.

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, comme X est une variable à densité,

$$p_n = 1 - \mathbb{P}(X < 1 - 1/n) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 1 - 1/n) = 1 - F_X(1 - 1/n)$$

Or F_X est continue en 1. De plus, $1 - 1/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ ainsi, $F_X(1 - 1/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} F_X(1) = 1$, donc $p_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

ii. Soit $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{\pi}{2}(1 - p_n)\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{2}\mathbb{P}(X < 1 - \frac{1}{n})\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\mathbb{P}(X \leq 1 - \frac{1}{n})\right) \\ &= \sin\left(\frac{\pi}{2}F_X(1 - \frac{1}{n})\right) = \sin(A(1 - 1/n)) = 1 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

iii. $\cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$.

iv. En utilisant les formules de symétries de cosinus et sinus, on obtient, $\cos\left(\frac{\pi}{2}p_n\right) = 1 - \frac{1}{n}$.

Ainsi, $1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}p_n\right) = \frac{1}{n}$. Or, d'après le développement limité de cosinus, $1 - \cos(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x^2}{2}$,

ainsi, $\frac{\left(\frac{\pi}{2}p_n\right)^2}{2} \sim \frac{1}{n}$. Comme les équivalents sont conservés par passage à la puissance et par

multiplication, on obtient que $p_n \sim \sqrt{\frac{8}{n\pi^2}}$, ainsi, $p_n \sim \frac{c}{\sqrt{n}}$ avec $c = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

14. `import random as rd`
`import math as m`

```
def SimulX():
    x = rd.random()# Uniforme dans [0,1]
    theta = m.pi*x/2 # Uniforme dans [0,pi/2]
    return m.sin(theta)
```

15. `def EstimPn(n):`
`C = 0`
`for k in range(10**6):`
 `if SimulX() > 1-1/n:`
 `C = C + 1`
`return C/10**6`

16. La commande `10**2*EstimPn(10**4)` devrait être une approximation de c .