

Exercice (Agro-Véto 2017)

1. Comme A est triangulaire, $\text{Sp}(A) = \{0\}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, alors :

$$X \in E_0(A) \iff AX = 0_{3,1} \iff \begin{cases} 0 &= 0 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{cases} \iff X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \iff X \in \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

Ainsi, $E_0 = \text{vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$, donc $\mathcal{B}_0 = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille génératrice de $E_0(A)$, comme il s'agit d'une famille ayant un seul vecteur et que ce vecteur est non nul, $\mathcal{B}_0$ est libre, ainsi, $\mathcal{B}_0$ est une base de $E_0(A)$. Ainsi, $\dim(E_0(A)) = \text{Card}(\mathcal{B}_0) = 1$, par conséquent :

$$\sum_{\lambda \in \text{Sp}(A)} \dim(E_\lambda(A)) = 1 \neq 3$$

La matrice A n'est donc pas diagonalisable.

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. (a) En développant par distributivité :

$$AM = A(\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2) = \alpha A + \beta A^2 + \gamma A^3$$

$$MA = (\alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2)A = \alpha A + \beta A^2 + \gamma A^3$$

Ainsi, $AM = MA$ donc $M \in \mathcal{S}$.

- (b) $AM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$, tandis que $MA = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ e & f & 0 \\ h & i & 0 \end{pmatrix}$, comme $AM = MA$, par unicité des coefficients d'une matrice, on obtient que $b = c = f = 0$, $a = e = i$ et $d = h$. Ainsi,

$$M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & a & 0 \\ g & d & a \end{pmatrix} = aI_3 + dA + gA^2 = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$$

Où on a posé $\alpha = a$, $\beta = d$ et $\gamma = g$.

- (c) D'après les questions précédentes, $M \in \mathcal{S}$ ssi $M \in \text{vect}(I_3, A, A^2)$.

4. (a) • $M^2 = (PAP^{-1})(PAP^{-1}) = PA(P^{-1}P)AP^{-1} = PA^2P^{-1}$. Et donc $A^2 = P^{-1}M^2P$, supposons que $M^2 = 0_3$, alors $A^2 = 0_3$, ce qui est absurde, ainsi, $M^2 \neq 0_3$.
• $M^3 = M^2M = (PA^2P^{-1})(PAP^{-1}) = PA^3P^{-1} = P0_3P^{-1} = 0_3$.

On peut en conclure que $M \in \mathcal{S}'$.

- (b) i. Par produit, $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \neq 0_3$ tandis que $M^3 = M^2M = 0_3$.

ii. • $f(E_1) = ME_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1E_1 + 1E_2 + 0E_3$.

• $f(E_2) = ME_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1E_1 + 1E_2 + 2E_3$.

- $f(E_3) = ME_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1E_1 + (-1)E_2 + 0E_3.$

De sorte que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = M$

iii. Posons $X = E_1$, alors $M^2X = M^2E_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \neq 0_{3,1}$. Ainsi, il existe bien $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que $M^2X \neq 0_{3,1}$.

iv. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Supposons $aX + bMX + cM^2X = 0_{3,1}$, alors :
$$\begin{cases} a - b + 2c = 0 \\ b = 0 \\ 2c = 0 \end{cases}$$
 Ainsi, $c = b = a = 0$, donc la famille $\mathcal{B}'$ est libre. De plus, $\dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})) = 3 = \text{Card}(\mathcal{B}')$, ainsi, $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- $f(X) = MX = 0X + 1MX + 0M^2X$
- $f(MX) = M^2X = 0X + 0MX + 1M^2X$
- $f(M^2X) = M^3X = 0_{3,1} = 0X + 0MX + 0M^2X$

De sorte que $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A.$

vi. Posons $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$, la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$, alors P est inversible et d'après la formule de changement de base, $M = PAP^{-1}$.

5. (a) Observons que M^2E_1 est égal à la première colonne de M^2 , M^2E_2 est égal à la deuxième colonne de M^2 et M^2E_3 est égale à la troisième colonne de M^2 . Or, M^2 n'est pas la matrice nulle, en particulier, une de ses trois colonnes n'est pas la colonne nulle. Ainsi, parmi M^2E_1 , M^2E_2 et M^2E_3 , au moins une de ces trois matrices est non nulle. Ceci prouve qu'il existe $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que M^2X n'est pas la matrice nulle.
- (b) L'application $X \mapsto MX$ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que la matrice de cet endomorphisme dans la base canonique soit M . Ainsi, nécessairement, $f: X \mapsto MX$. Soit $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que M^2X soit non nul. Considérons $\mathcal{B}' = (X, MX, M^2X)$. Soit $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. Supposons que $\alpha X + \beta MX + \gamma M^2X = 0_{3,1}$, en multipliant par M^2 à gauche, on obtient

$$\alpha M^2X + \beta M^3X + \gamma M^4X = 0_{3,1}$$

Or, $M^3 = 0_3$ et donc $M^4 = M^3M = 0_3$, ainsi, il reste $\alpha M^2X = 0_{3,1}$. Comme $M^2X \neq 0_{3,1}$, on obtient $\alpha = 0$. Donc $\beta MX + \gamma M^2X = 0_{3,1}$, en multipliant par M à gauche, on obtient

$$\beta M^2X + \gamma M^3X = 0_{3,1}$$

Donc $\beta M^2X = 0_{3,1}$, puis $\beta = 0$, il reste $\gamma M^2X = 0_{3,1}$, et donc $\gamma = 0$, ainsi, la famille $\mathcal{B}'$ est libre. Comme $\text{Card}(\mathcal{B}') = \dim(\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$, on en déduit que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. De la même façon qu'à la question 4(b)v, la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$ est A . On en déduit, d'après la formule de changement de base, que $M = PAP^{-1}$ avec P la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

6. Grâce aux questions 4a et 5b, on en déduit que $M \in \mathcal{S}'$ ssi M est semblable à A .

Problème (G2E 2015)

1. (a) La fonction $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est continue sur $[0; +\infty[$. Soit $x \geq 0$, alors

$$\int_0^x e^{-\lambda t} dt = \left[\frac{-1}{\lambda} e^{-\lambda t} \right]_0^x = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 + \frac{1}{\lambda}$$

Où on a utilisé $\lambda > 0$ pour le passage à la limite. Ainsi, $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge et $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$

- (b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. On pose $u: t \mapsto t^{n+1}$ et $v: t \mapsto -\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}$, alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; x]$, par intégration par parties :

$$\int_0^x t^{n+1} e^{-\lambda t} dt = \left[t^{n+1} \cdot \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} \right]_0^x - \int_0^x (n+1)t^n \cdot \frac{-e^{-\lambda t}}{\lambda} dt = \frac{-x^{n+1}e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{n+1}{\lambda} \int_0^x t^n e^{-\lambda t} dt$$

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{P}(n)$: « $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt = \lambda^{-n-1}n!$ ».

- Pour $n = 0$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt$ converge d'après la question 1a, et cette intégrale vaut $\frac{1}{\lambda}$. Or, $\lambda^{-n-1}n! = \frac{1}{\lambda}$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. La fonction $t \mapsto t^{n+1}e^{-\lambda t}$ est continue sur $[0; +\infty[$. Soit $x \geq 0$, d'après la question précédente :

$$\int_0^x t^{n+1} e^{-\lambda t} dt = \frac{-x^{n+1}e^{-\lambda x}}{\lambda} + \frac{n+1}{\lambda} \int_0^x t^n e^{-\lambda t} dt$$

Or, par croissance comparée, $-x^{n+1}e^{-\lambda x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, et $\int_0^x t^n e^{-\lambda t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \lambda^{-n-1}n!$ (d'après l'hypothèse de récurrence), on en déduit que

$$\int_0^x t^{n+1} e^{-\lambda t} dt \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 + \frac{n+1}{\lambda} \cdot \lambda^{-n-1}n! = (n+1)! \lambda^{-n-2}$$

Ceci montre que $\int_0^{+\infty} t^{n+1} e^{-\lambda t} dt$ converge et que cette intégrale vaut $(n+1)! \lambda^{-n-2}$. On a donc montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par récurrence, on a montré que la propriété demandée est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$, d'après la question précédente, $\int_0^{+\infty} x^n f_{X_k}(x) dx = \int_0^{+\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx$ converge par linéarité (et même absolument car l'intégrande est positive), comme X_k est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et que $x \mapsto x^n$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, la formule de transfert permet de conclure que X_k^n admet une espérance et que

$$\mathbb{E}(X_k^n) = \int_0^{+\infty} x^n \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda n! \lambda^{-n-1} = \frac{n!}{\lambda^n}$$

- (b) $\sum \frac{1}{m_n(X^k)} = \sum \frac{\lambda^n}{n!}$ converge d'après le cours (c'est une série exponentielle). Toujours d'après le cours :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{m_n(X^k)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^\lambda$$

3. (a) Soit $t \in \mathbb{R}$, alors en utilisant la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre λ :

$$\mathbb{P}(X_1 > t) = 1 - \mathbb{P}(X_1 \leq t) = 1 - F_{X_1}(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t})\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

Ainsi, $\mathbb{P}(X_1 > t) = 1$ si $t < 0$ et $\mathbb{P}(X_1 > t) = e^{-\lambda t}$ si $t \geq 0$.

- (b) Soit $t \in \mathbb{R}$, alors $(Y_p > t) = \bigcap_{k=1}^p (X_k > t)$, par indépendance des X_k , $\mathbb{P}(Y_p > t) = \prod_{k=1}^p \mathbb{P}(X_k > t)$.

Si $t < 0$, alors $\mathbb{P}(Y_p > t) = \prod_{k=1}^p 1 = 1$. Si $t \geq 0$, alors

$$\mathbb{P}(Y_p > t) = \prod_{k=1}^p e^{-\lambda t} = (e^{-\lambda t})^p = e^{-\lambda p t}$$

Ainsi, en repassant au complémentaire, on a démontré que $F_{Y_p}(t) = 0$ si $t < 0$ et $F_{Y_p}(t) = 1 - e^{-\lambda p t}$ si $t \geq 0$. On reconnaît que la fonction de répartition de Y_p est celle d'une exponentielle de paramètre λp . Ainsi, Y_p suit une loi exponentielle de paramètre λp .

- (c) D'après le cours et en utilisant la question précédente, Y_p admet une espérance et une variance et $\mathbb{E}(Y_p) = \frac{1}{p\lambda}$ et $\mathbb{V}(Y_p) = \frac{1}{(p\lambda)^2}$.

4. Comme $\mathbb{E}(X_1) = 2 = \frac{1}{\lambda}$, on en déduit que, dans cette question, $\lambda = \frac{1}{2}$.

- (a) On calcule $\mathbb{P}(X_2 \leq 2) = F_{X_2}(2) = 1 - e^{-2\lambda} = 1 - e^{-1}$
- (b) On calcule $\mathbb{P}(Y_2 \leq 1 | X_2 \geq 2)$. Or, si $X_2 \geq 2$ le minimum des durées sera inférieur ou égal à 1 si et seulement si $X_1 \leq 1$, donc $\mathbb{P}(Y_2 \leq 1 | X_2 \geq 2) = \mathbb{P}(X_1 \leq 1 | X_2 \geq 2)$. De plus, X_1 et X_2 sont indépendantes, donc $\mathbb{P}(X_1 \leq 1 | X_2 \geq 2) = \mathbb{P}(X_1 \leq 1)$. On peut donc en conclure que

$$\mathbb{P}(Y_2 \leq 1 | X_2 \geq 2) = \mathbb{P}(X_1 \leq 1) = F_{X_1}(1) = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-1/2}$$

- (c) On cherche à calculer $\mathbb{P}(Y_2 \leq 1 | X_2 \leq 2)$. Remarquons que $\mathbb{P}(X_2 \leq 2) = 1 - e^{-2\lambda} = 1 - e^{-1} > 0$, ainsi :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_2 \leq 1 | X_2 \leq 2) &= 1 - \mathbb{P}(Y_2 > 1 | X_2 \leq 2) = 1 - \frac{\mathbb{P}(Y_2 > 1) \cap (X_2 \leq 2)}{\mathbb{P}(X_2 \leq 2)} \\ &= 1 - \frac{\mathbb{P}((X_1 > 1) \cap (X_2 > 1 \cap X_2 \leq 2))}{1 - e^{-1}} \end{aligned}$$

Par indépendance de X_1 et de X_2 ,

$$\mathbb{P}(Y_2 \leq 1 | X_2 \leq 2) = 1 - \frac{\mathbb{P}(X_1 > 1)\mathbb{P}(1 < X_2 \leq 2)}{1 - e^{-1}} = 1 - \frac{e^{-1/2}(e^{-1/2} - e^{-1})}{1 - e^{-1}}$$

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x < 0$, alors comme le maximum de nombres positifs ou nuls est positif ou nul, $F_{Z_2}(x) = \mathbb{P}(Z_2 \leq x) = 0$. Si $x \geq 0$, alors $\mathbb{P}(Z_2 \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x \cap X_2 \leq x)$. Par indépendance de X_1 et X_2 , on obtient que

$$F_{Z_2}(x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)\mathbb{P}(X_2 \leq x) = (1 - e^{-\lambda x})^2$$

- On remarque que $x \mapsto 0$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ et que $x \mapsto (1 - e^{-\lambda x})^2$ est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (par composée de fonctions qui le sont). Ainsi, F_{Z_2} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
- De plus, par continuité de l'exponentielle en 0, pour $x > 0$,

$$F_{Z_2}(x) = (1 - e^{-\lambda x})^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 = F_{Z_2}(0)$$

Pour $x < 0$, $F_{Z_2}(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0^-} 0 = F_{Z_2}(0)$. Ainsi, F_{Z_2} est continue en 0.

Dès lors, F_{Z_2} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points (un seul), donc Z_2 est à densité et une densité de Z_2 et donné par $f_{Z_2}(x) = F'_{Z_2}(x)$ si $x \neq 0$ et $f_{Z_2}(0) = 0$ (valeur arbitraire). Dès lors, pour $x \leq 0$, $f_{Z_2}(x) = 0$ et pour $x > 0$,

$$f_{Z_2}(x) = 2\lambda e^{-\lambda x}(1 - e^{-\lambda x}) = 2\lambda e^{-\lambda x} - 2\lambda e^{-2\lambda x} = 2f_{X_1}(x) - f_{Y_2}(x)$$

Ainsi, $f_{Z_2} = 2f_{X_1} - f_{Y_2}$

- (b) Comme $X_1 \sim \mathcal{E}(\lambda)$, X_1 admet une espérance et $\mathbb{E}(X_1) = \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda}$ (l'intégrale converge absolument), de plus, $Y_2 \sim \mathcal{E}(2\lambda)$, Y_2 admet aussi une espérance et que $\mathbb{E}(Y_2) = \int_0^{+\infty} x2\lambda e^{-2\lambda x} dx = \frac{1}{2\lambda}$. Ainsi, par combinaison linéaire d'intégrales absolument convergentes, on en déduit que $\int_0^{+\infty} 2x(f_{X_1}(x) - f_{Y_2}(x)) dx$ converge absolument et donc que Z_2 admet une espérance et que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_2) &= \int_0^{+\infty} x(2f_{X_1}(x) - f_{Y_2}(x)) dx = 2 \int_0^{+\infty} x f_{X_1}(x) dx - \int_0^{+\infty} x f_{Y_2}(x) dx = 2\mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(Y_2) \\ &= 2\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda} = \frac{3}{2\lambda} \end{aligned}$$

De plus, $\mathbb{E}(Y_2) = \frac{1}{2\lambda}$, de sorte que $\mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Z_2) = \frac{1}{2\lambda} + \frac{3}{2\lambda} = \frac{2}{\lambda}$. De plus, par linéarité de l'espérance, $X_1 + X_2$ admet une espérance et

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$$

On a donc vérifié $\mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Z_2) = \mathbb{E}(X_1 + X_2)$. Ce résultat était prévisible, car

$$Y_2 + Z_2 = \min(X_1, X_2) + \max(X_1, X_2) = X_1 + X_2$$

(en effet si X_1 est le minimum alors X_2 est le maximum et vice-versa).

- (c) Comme X_1 et Y_2 admettent des moments d'ordre 2, $\int_0^{+\infty} x^2 f_{X_1}(x) dx$ converge absolument et, d'après la formule de transfert, cette intégrale vaut $\mathbb{E}(X_1^2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{E}(X_1)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$ (d'après la formule de König-Huygens). De même, $\int_0^{+\infty} x^2 f_{Y_2}(x) dx$ converge absolument et cette intégrale vaut $\mathbb{E}(Y_2^2) = \mathbb{V}(Y_2) + \mathbb{E}(Y_2)^2 = \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{4\lambda^2}$. Par combinaison linéaires d'intégrales absolument convergentes, $\int_0^{+\infty} x^2 (2f_{X_1}(x) - f_{Y_2}(x)) dx$ converge absolument. Ainsi, d'après la formule de transfert, Z_2^2 admet une espérance et

$$\mathbb{E}(Z_2^2) = 2\mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(Y_2^2) = \frac{4}{\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^2} = \frac{7}{2\lambda^2}$$

D'après la formule de König-Huygens, Z_2 admet une variance et

$$\mathbb{V}(Z_2) = \mathbb{E}(Z_2^2) - \mathbb{E}(Z_2)^2 = \frac{7}{2\lambda^2} - \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{5}{4\lambda^2}$$

6. (a) $\mathbb{P}(Z_2 \geq n+x) = 1 - \mathbb{P}(Z_2 < n+x)$ comme Z_2 est à densité, on obtient,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_2 \geq n+x) &= 1 - F_{Z_2}(n+x) = 1 - (1 - e^{-\lambda(n+x)})^2 \\ &= 2e^{-\lambda(n+x)} - e^{-2\lambda(n+x)} \sim 2e^{-\lambda(n+x)} = 2e^{-\lambda x} \times (e^{-\lambda})^n \end{aligned}$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2e^{-\lambda x}(e^{-\lambda})^n$, alors $(u_n)_n$ est bien une suite géométrique de raison $e^{-\lambda}$ et de premier terme $2e^{-\lambda x}$.

- (b) En utilisant le calcul fait à la question précédente avec $x = 0$, on obtient que $\mathbb{P}(Z_2 \geq n) \neq 0$, ainsi :

$$\mathbb{P}(Z_2 \geq n+x | Z_2 \geq n) = \frac{\mathbb{P}((Z_2 \geq n+x) \cap (Z_2 \geq n))}{\mathbb{P}(Z_2 \geq n)} = \frac{\mathbb{P}(Z_2 \geq n+x)}{\mathbb{P}(Z_2 \geq n)}$$

La dernière égalité est vraie car $x \geq 0$. En utilisant les équivalents trouvés à la question précédente,

$$\mathbb{P}(Z_2 \geq n+x | Z_2 \geq n) \sim \frac{2e^{-\lambda(n+x)}}{2e^{-\lambda n}} = e^{-\lambda x}. \text{ Ainsi, } \mathbb{P}(Z_2 \geq n+x | Z_2 \geq n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda x}.$$

- (c) D'après le cours, une loi exponentielle est sans mémoire, donc $\mathbb{P}(X_1 \geq n+x | X_1 \geq n) = \mathbb{P}(X_1 \geq x)$. En particulier, cette égalité reste vraie en faisant tendre n vers $+\infty$.

7. (a) Comme X_2 prend des valeurs positives, $aX_2 + b$ prend des valeurs supérieures ou égales à b (car $a > 0$). Ainsi, si $t < b$, alors $\mathbb{P}(aX_2 + b \leq t) = 0$. Si $t \geq b$, alors comme $a > 0$,

$$\mathbb{P}(aX_2 + b \leq t) = \mathbb{P}\left(X_2 \leq \frac{t-b}{a}\right) = 1 - e^{-\lambda \frac{t-b}{a}}$$

Ainsi, $F_{aX_2+b}(t) = 0$ si $t < b$ et $F_{aX_2+b}(t) = 1 - e^{-\lambda \frac{t-b}{a}}$.

- Remarquons que $t \mapsto 0$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty; b[$ et $t \mapsto 1 - e^{-\lambda \frac{t-b}{a}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] b; +\infty[$ (par composée de fonctions qui le sont).
- Si $x < b$, $F_{aX_2+b}(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow b^-} 0 = F_{aX_2+b}(b)$ et si $x > b$, par continuité d'exponentielle en 0, $F_{aX_2+b}(x) = 1 - e^{-\lambda \frac{x-b}{a}} \xrightarrow{x \rightarrow b^+} 0 = F_{aX_2+b}(b)$. Ainsi, F_{aX_2+b} est continue en b .

Donc F_{aX_2+b} est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points (un seul b). On peut en conclure que $aX_2 + b$ est une variable aléatoire à densité. Ainsi, si $t \neq b$, $f_{aX_2+b}(t) = F'_{aX_2+b}(t)$ et $f_{aX_2+b}(b) = \frac{\lambda}{a}$ (valeur arbitraire). En dérivant, on obtient que si $t < b$, alors $f_{aX_2+b}(t) = 0$ et si $t > b$, alors $f_{aX_2+b}(t) = \frac{\lambda}{a} e^{-\lambda \frac{t-b}{a}}$.

- (b) Comme X_1 et X_2 sont indépendantes, d'après le lemme des coalitions, $f(X_1) = X_1$ et $g(X_2) = aX_2 + b$ sont indépendantes avec $f: x \mapsto x$ et $g: x \mapsto ax + b$.

8. (a) T est la somme de X_1 une variable à densité et de $aX_2 + b$ une autre variable à densité. De plus, d'après la question précédente, X_1 et $aX_2 + b$ sont indépendantes, ainsi T est une variable à densité et d'après le résultat rappelé une densité de T est donné par :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad f_T(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{aX_2+b}(t) f_{X_1}(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} \mathbf{1}_{[b; +\infty[}(t) \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt \\ &= \int_b^{+\infty} \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} \lambda e^{-\lambda(x-t)} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt \end{aligned}$$

De plus, pour $t \geq b$, $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) = 1$ ssi $x-t \geq 0$ ssi $t \leq x$ (ainsi si cette inégalité est vérifiée, on a nécessairement $b \leq t \leq x$), il y a donc deux cas :

- Si $x < b$, alors pour tout $t \geq b$, $x-t < b-t \leq 0$ de sorte que $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) = 0$, ainsi, $f_T(x) = 0$.
- Si $x \geq b$, alors $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) = 1$ ssi $t \leq x$, on sépare alors l'intégrale en deux :

$$\begin{aligned} f_T(x) &= \int_b^x \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} \lambda e^{-\lambda(x-t)} dt + \int_b^{+\infty} \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} \lambda e^{-\lambda(x-t)} \cdot 0 dt \\ &= \frac{\lambda^2}{a} e^{\lambda(\frac{b}{a}-x)} \int_b^x e^{\lambda t(1-1/a)} dt = \frac{\lambda^2}{a} e^{\lambda(\frac{b}{a}-x)} \left[\frac{e^{\lambda t(1-1/a)}}{\lambda(1-1/a)} \right]_b^x \\ &= \frac{\lambda}{a-1} e^{\lambda(\frac{b}{a}-x)} \left(e^{\lambda x(1-1/a)} - e^{\lambda b(1-1/a)} \right) \\ &= \frac{\lambda}{1-a} \left(e^{-\lambda(x-b)} - e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)} \right) \end{aligned}$$

(b)

9. (a) Comme tous les X_k admettent une espérance, par linéarité T_p aussi et

$$\mathbb{E}(T_p) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} \mathbb{E}(X_k) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda k}$$

Or, $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ est une famille de variables indépendantes, d'après le lemme des coalitions, $\left(X_1, \frac{1}{2}X_2, \frac{1}{3}X_3, \dots, \frac{1}{p}X_p\right)$ est une famille de variables indépendantes, comme les X_k admettent toutes une variance, $\frac{1}{k}X_k$ aussi (la variance est quadratique), en tant que somme de variables aléatoires indépendantes et possédant une variance, on peut en déduire que T_p admet une variance et

$$\mathbb{V}(T_p) = \sum_{k=1}^p \mathbb{V}\left(\frac{1}{k}X_k\right) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} \mathbb{V}(X_k) = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k^2} \frac{1}{\lambda^2}$$

De plus, on sait que $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), ainsi, $\mathbb{E}(T_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} +\infty$. En outre, $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, ainsi, la suite $(\mathbb{V}(T_p))_p$ converge.

(b)

10. (a) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi, possédant une espérance μ et une variance $\sigma^2 > 0$. Alors, $(M_n^*)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une loi normale centrée réduite. Où $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ et M_n^* désigne la variable aléatoire centrée réduite associée à M_n .

(b) Les variables X_k sont indépendantes et admettent une variance $\frac{1}{\lambda^2} > 0$, on peut donc appliquer le théorème central limite à M_p^* . Avec $M_p = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p X_k$. Comme les X_k admettent une espérance, M_p aussi par linéarité et $\mathbb{E}(M_p) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \mathbb{E}(X_k) = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$. De plus, comme les X_k sont indépendantes et admettent une variance, $\sum_{k=1}^p X_k$ admet une variance et M_p aussi (car la variance est quadratique). Ainsi,

$$\mathbb{V}(M_p) = \frac{1}{p^2} \mathbb{V} \left(\sum_{k=1}^p X_k \right) = \frac{1}{p^2} \sum_{k=1}^p \mathbb{V}(X_k) = \frac{1}{p\lambda^2}$$

Dès lors,

$$M_p^* = \frac{M_p - \mathbb{E}(M_p)}{\sigma(M_p)} = \frac{M_p - \frac{1}{\lambda}}{\frac{1}{\lambda\sqrt{p}}} = \sqrt{p}(\lambda M_p - 1)$$

Soit $z > 0$ et $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Alors, on aimerait que $\mathbb{P}(-z \leq Z \leq z) \geq 0.95\%$. Donc on cherche z tel que $\Phi(z) - \Phi(-z) \geq 0.95\%$. Or, $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$. Donc $\mathbb{P}(-z \leq Z \leq z) \geq 0.95\%$ ssi $2\Phi(z) - 1 \geq 0.95$ ssi $\Phi(z) \geq \frac{1 + 0.95}{2} = 0.975$. Ainsi, $z = 1.95$ convient. Comme p est grand, on peut, d'après le théorème centrale limite, approximer $\mathbb{P}(-z \leq M_p^* \leq z)$ par $\mathbb{P}(-z \leq Z \leq z)$. Donc, $\mathbb{P}(-z \leq M_p^* \leq z) \simeq 0.95$. Or,

$$\begin{aligned} -z \leq M_p^* \leq z &\iff -z \leq \sqrt{p}(\lambda M_p - 1) \leq z \iff \frac{-z}{\sqrt{p}} \leq \lambda M_p - 1 \leq \frac{z}{\sqrt{p}} \\ &\iff \frac{1}{M_p} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{p}} \right) \leq \lambda \leq \frac{1}{M_p} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{p}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, λ appartient à l'intervalle $\left[\frac{1}{M_p} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{p}} \right) ; \frac{1}{M_p} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{p}} \right) \right]$ avec une probabilité supérieure ou égale à 0.95% si p est assez grand.