

DS6 de mathématiques 2BCPST2

19 février 2026

La calculatrice, des documents, le téléphone ou tout autre appareil électronique sont interdits.

Exercice

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de la matrice A . La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Calculer A^2 et A^3 .
3. On considère $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $AM = MA$.
 - (a) Soit α, β et γ trois réels et $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}$.

(b) Réciproquement, considérons a, b, c, d, e, f, g, h et i des réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \in \mathcal{S}$.

Déterminer, en fonction des coefficients de M , trois réels α, β et γ tels que $M = \alpha I_3 + \beta A + \gamma A^2$.

- (c) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathcal{S}$.
4. On considère $\mathcal{S}'$ l'ensemble des matrices M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^3 = 0_3$ et $M^2 \neq 0_3$.
 - (a) Soit $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible et $M = PAP^{-1}$. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.

(b) Soit $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

i. Vérifier que $M \in \mathcal{S}'$.

On considère f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ défini par $f: X \mapsto MX$. On rappelle que la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est $\mathcal{B} = (E_1, E_2, E_3)$ avec $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $E_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

ii. Déterminer la matrice de f dans la base canonique.

iii. Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que M^2X soit non nul.

iv. Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (X, MX, M^2X)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

v. Déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

vi. En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.

5. On cherche à généraliser ce qui a été montré dans la question précédente. Pour cela on considère $M \in \mathcal{S}'$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont M est la matrice dans la base canonique.
 - (a) Prouver qu'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tel que M^2X soit non nul.
 - (b) En déduire qu'il existe $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $M = PAP^{-1}$.
6. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour appartenir à $\mathcal{S}'$.

Problème

Dans tout le problème λ désigne un réel strictement positif, n un entier naturel, p un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$. Si X désigne une variable aléatoire à densité alors F_X désigne la fonction de répartition de X , f_X une densité de X . Dans la partie A, on étudie quelques propriétés classiques des lois exponentielles. La partie B est consacrée au calcul d'une limite d'une probabilité conditionnelle. Dans la partie C, on étudie la somme de certaines variables aléatoires. Enfin, dans la partie E, on cherche une méthode pour estimer λ . Ces parties peuvent être abordées indépendamment les unes des autres.

Partie préliminaire : Calcul d'une intégrale

Dans cette partie, nous établirons un résultat d'intégrale que nous appliquerons ensuite en probabilité, il faudra donc traiter cette partie **sans utiliser des résultats de probabilité**.

1. (a) Démontrer que $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ converge et déterminer sa valeur.
(b) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$. À l'aide d'une intégration par parties, donner une relation entre $\int_0^x t^{n+1} e^{-\lambda t} dt$ et $\int_0^x t^n e^{-\lambda t} dt$.
(c) Démontrer par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt$ converge et que $\int_0^{+\infty} t^n e^{-\lambda t} dt = \lambda^{-n-1} n!$.

Partie A : Des lois exponentielles

On considère p techniciens qui interviennent auprès d'une machine. Pour tout $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on note X_k la variable aléatoire donnant la durée (en heure(s)) de l'intervention du k -ième technicien. On admet que les variables aléatoires $(X_k)_{k \in \llbracket 1; p \rrbracket}$ sont mutuellement indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre λ .

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrer que la variable aléatoire X_k admet un moment d'ordre n (c'est-à-dire que X_k^n admet une espérance) et que ce moment (l'espérance de X_k^n), noté $m_n(X_k)$, vaut $m_n(X_k) = \frac{n!}{\lambda^n}$.
(b) Déterminer la nature et la somme de la série de terme général $\frac{1}{m_n(X_k)}$ (pour $n \in \mathbb{N}$).
3. On note $Y_p = \min(X_1, \dots, X_p)$.
(a) Calculer $P(X_1 > t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
(b) En considérant $P(Y_p > t)$ (pour $t \in \mathbb{R}$), démontrer que la variable aléatoire Y_p suit une loi exponentielle de paramètre $p\lambda$.
(c) Exprimer $E(Y_p)$ et $\text{Var}(Y_p)$ en fonction de λ .
4. On suppose, dans cette question uniquement, que $p = 2$ et que la durée moyenne de l'intervention du premier technicien est de deux heures. Calculer alors les probabilités ci-dessous.
(a) probabilité que la durée de l'intervention du second technicien soit inférieure ou égale à 2 heures.
(b) probabilité que le minimum des durées des interventions des deux techniciens soit inférieur ou égal à 1 heure sachant que la durée de l'intervention du second technicien est supérieure ou égale à 2.
(c) probabilité que le minimum des durées des interventions des deux techniciens soit inférieur ou égal à 1 heure sachant que la durée de l'intervention du second technicien est inférieure ou égale à 2.

Partie B : Calcul d'une limite d'une probabilité

5. On note $Z_2 = \max(X_1, X_2)$.
(a) Démontrer que la variable aléatoire Z_2 admet une densité que l'on exprimera à l'aide de densités de lois exponentielles.

- (b) Démontrer que la variable aléatoire Z_2 admet une espérance et obtenir une égalité entre $E(Y_2) + E(Z_2)$ et $E(X_1 + X_2)$. Pourrait-on anticiper cette égalité ?
- (c) Justifier enfin l'existence de $\text{Var}(Z_2)$ et la calculer.
6. Soient $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$.
- (a) Calculer $P(Z_2 \geq n + x)$ et démontrer que $P(Z_2 \geq n + x)$ est équivalent (quand n tend vers $+\infty$) au terme général d'une suite géométrique dont on précisera la raison et le terme initial
- (b) Démontrer que :
- $$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(Z_2 \geq n + x \mid Z_2 \geq n) = P(X_1 \geq x)$$
- (c) La formule précédente est-elle encore exacte si on remplace la variable aléatoire Z_2 par la variable aléatoire X_1 ?

Partie C : Sommes de variables aléatoires

7. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \times \mathbb{R}$.
- (a) Démontrer que la variable aléatoire $aX_2 + b$ admet une densité définie par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_{aX_2+b}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{a} e^{-\frac{\lambda}{a}(t-b)} & \text{si } t \geq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- (b) Démontrer que les variables aléatoires X_1 et $aX_2 + b$ sont indépendantes.
8. On note $T = X_1 + aX_2 + b$ et on rappelle que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de densités f_X et f_Y alors $X + Y$ est une variable aléatoire dont une densité est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x-t)f_Y(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)f_Y(x-t) dt$$

- (a) Démontrer que T admet une densité définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_T(x) = \begin{cases} \frac{\lambda}{1-a} \left(e^{-\lambda(x-b)} - e^{-\frac{\lambda}{a}(x-b)} \right) & \text{si } x \geq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

- (b) Démontrer qu'il existe un unique couple $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} \times \mathbb{R}$ tel que Z_2 (cf. partie B) et T suivent la même loi.
9. On prolonge l'étude précédente et on considère la variable aléatoire : $T_p = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} X_k$.
- (a) Calculer $E(T_p)$ et $\text{Var}(T_p)$. En déduire la nature (convergence ou divergence) des suites $(E(T_p))_{p \geq 2}$ et $(\text{Var}(T_p))_{p \geq 2}$.
- (b) Démontrer par récurrence que T_p admet une densité définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{T_p}(x) = \begin{cases} \lambda p e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{p-1} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie D : Estimer λ

10. (a) Donner un énoncé du théorème central limite.
Il en existe plusieurs formes, vous êtes libre de choisir celle que vous voulez pour cette question.
- (b) On suppose que p est grand, et on cherche à estimer λ qui est inconnu. À l'aide du théorème central limite appliqué à la variable aléatoire M_p^* où M_p désigne la moyenne empirique de $X_1, \dots, X_p$, déterminer un intervalle auquel appartient λ avec une probabilité supérieure ou égale à 95%. On rappelle que $\Phi(1.95) \simeq 0.975$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.