

SOUTIEN : FRACTIONS, SOMMES, PRODUITS

CALCULS AVEC DES FRACTIONS

1 Ecrire les nombres suivants sous forme de fractions irréductibles :

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right)$

b) $\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \times \frac{21}{24}$

c) $\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$

2 Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $8^3 \times \frac{1}{4^2}$

b) $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$

c) $\frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$

SOMMES

3 Calculer pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$

a) $A = \sum_{k=2}^n 2^{3k+1}$

b) $B = \sum_{i=0}^{2n} i(i+1)$

c) $C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

4 Calculer $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$ en séparant les termes d'indices pairs et impairs.

5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$

b) $\sum_{i=2}^{10} \sum_{j=0}^9 i^2 5^{2j-1}$

c) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} i$

d) $\sum_{i=2}^{n+1} \sum_{j=1}^n (i-1) \ln(j).$

6 Soit n un entier naturel. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 4^n$

b) $\sum_{k=1}^n 2^k \binom{n}{k}$

c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$

d) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}.$

7 Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$. Calculer en fonction de a , b et n :

a) $\sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} a^{-j-1}$

b) $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} b^k$

c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^j b^{k-j}$

8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $S_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $T_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$.

1) Montrer que $S_n + T_n = 2^n$ et $S_n - T_n = 0$.

2) En déduire la valeur de S_n et T_n .

PRODUITS

9 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\prod_{k=1}^n (2k)$ puis en déduire $\prod_{k=1}^n (2k+1)$.

10 Calculer les produits suivants : a) $\prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ avec $n \geq 2$ b) $\prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{2^i}$ avec $n \geq 1$.

CORRECTION

1 Correction :

a) On développe :

$$\begin{aligned}
 (2 \times 3 \times 5 \times 7) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} \right) &= \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{5} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{7} \\
 &= 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 5 \times 7 + 2 \times 3 \times 7 + 2 \times 3 \times 5 \\
 &= 105 + 70 + 42 + 30 = 247.
 \end{aligned}$$

b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10} \right) \times \frac{21}{24} &= \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{31}{5} \right) \times \frac{7}{8} \\
 &= \left(\frac{136}{15} + \frac{3}{5} \right) \times \frac{7}{8} \\
 &= \left(\frac{136}{15} + \frac{9}{15} \right) \times \frac{7}{8} \\
 &= \frac{145}{15} \times \frac{7}{8} = \frac{29}{3} \times \frac{7}{8} \\
 &= \frac{203}{24}.
 \end{aligned}$$

c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\begin{aligned}
 \frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} &= \frac{5^{10} \times 7^3 - 5^{10} \times 7^4}{5^9 \times 7^3 + 5^9 \times 7^3 \times 2^3} \\
 &= \frac{5^{10} \times 7^3 (1 - 7)}{5^9 \times 7^3 (1 + 2^3)} \\
 &= \frac{5 \times (-6)}{9} = \frac{-10}{3}.
 \end{aligned}$$

2 Correction :

$$a) 8^3 \times \frac{1}{4^2} = (2 \times 4)^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4^3 \times \frac{1}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5$$

$$b) \frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{(3^3)^{-1} \times (2^2)^2}{3^{-4} \times 2^4} = \frac{3^4}{3^3} = 3$$

$$\begin{aligned}
 c) \frac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}} &= \frac{(-2) \times (-2)^{2k} \times 3^{2k} \times 3^{-1}}{4^k \times 3^{-k} \times 3} \\
 &= \frac{(-2) \times 4^k \times 3^{2k} \times 3^k}{4^k \times 3^2} \\
 &= -2 \times 3^{3k-2}
 \end{aligned}$$

3 Calculer pour un entier $n \in \mathbb{N}^*$

a) $A = \sum_{k=2}^n 2^{3k+1}$

b) $B = \sum_{i=0}^{2n} i(i+1)$

c) $C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$

Correction :

a) $A = 2 \sum_{k=2}^n 8^k = 2 \times 8^2 \frac{1 - 8^{n-2+1}}{1 - 8} \text{ car } 8 \neq 1$
 $= \frac{128}{7} (8^{n-1} - 1)$

b) $B = \sum_{i=0}^{2n} i^2 + i = \sum_{i=0}^{2n} i^2 + \sum_{i=0}^{2n} i$
 $= \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6} + \frac{2n(2n+1)}{2}$
 $= \frac{2n(2n+1)}{6} (4n+1+3)$
 $= \frac{n(2n+1)}{3} (4n+4)$
 $= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{3}$

c)  $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}^*)$
 $C = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$
 $= 1 - \frac{1}{n+1} \text{ (somme télescopique)}$
 $= \frac{n}{n+1}$

4 Calculer $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$ en séparant les termes d'indices pairs et impairs.

Correction :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{2k} 2k + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{2k+1} (2k+1) \\ &= 2 \sum_{k=0}^{n-1} k + 2n - 2 \sum_{k=0}^{n-1} k - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= 2n - n = n \end{aligned}$$

5 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes :

a) $\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij$

b) $\sum_{i=2}^{10} \sum_{j=0}^9 i^2 5^{2j-1}$

c) $\sum_{1 \leq i < j \leq n} i$

d) $\sum_{i=2}^{n+1} \sum_{j=1}^n (i-1) \ln(j).$

Correction :

- a)
$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^j ij = \sum_{j=1}^n j \times \frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j^3 + \sum_{j=1}^n j^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right)$$

$$= \frac{n(n+1)}{24} (3n(n+1) + 2(2n+1))$$

$$= \frac{n(n+1)}{24} (3n^2 + 7n + 2) = \frac{n(n+1)(3n+1)(n+2)}{24}$$
- b)
$$\sum_{i=2}^{10} \sum_{j=0}^9 i^2 5^{2j-1} = \sum_{i=2}^{10} i^2 \times \left(\sum_{j=0}^9 25^j \times \frac{1}{5} \right) = \left(\frac{10 \times 11 \times 21}{6} - 1 \right) \times \frac{1}{5} \left(\frac{1 - 25^{10}}{1 - 25} \right)$$

$$= (385 - 1) \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{24} (25^{10} - 1) = \frac{16}{5} (25^{10} - 1)$$
- c)
$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} i = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{j=i+1}^n i \right) = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)i = n \sum_{i=1}^{n-1} i - \sum_{i=1}^{n-1} i^2 = n \cdot \frac{(n-1)n}{2} - \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

$$= \frac{n(n-1)(n+1)}{6}$$
- d)
$$\sum_{i=2}^{n+1} \sum_{j=1}^n (i-1) \ln(j) = \sum_{i=2}^{n+1} \left((i-1) \sum_{j=1}^n \ln(j) \right) = \left(\sum_{i=2}^{n+1} (i-1) \right) \times \ln \left(\prod_{j=1}^n j \right) = \left(\sum_{i=2}^{n+1} (i-1) \right) \ln(n!)$$

$$= \ln(n!) \sum_{k=1}^n k \quad (k = i-1)$$

$$= \ln(n!) \frac{n(n+1)}{2}$$

6 Soit n un entier naturel. Calculer les sommes suivantes :

- a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 4^n$ b) $\sum_{k=1}^n 2^k \binom{n}{k}$ c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ d) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$.

Correction :

- a) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 4^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k 4^k 4^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (12)^k 4^{n-k} = (12+4)^n = 16^n$
- b) $\sum_{k=1}^n 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} - \binom{n}{0} 2^0 = (2+1)^n - 1 = 3^n - 1$.
- c) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n - 1 = 2^n$.
- d) $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} = n \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n-1}{i} = n 2^{n-1}$ RAPPEL : $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

7 **Correction :**

- a) $\sum_{j=0}^n \binom{n}{n-j} a^{-j-1} = a^{-1} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left(\frac{1}{a} \right)^j = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{a} \right)^n$

$$b) \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} b^k \underset{(i=k-1)}{=} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} b^{i+1} = b \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} b^i = b \cdot (1+b)^{n-1}$$

$$c) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} a^j b^{k-j} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a+b)^k = (1+a+b)^n$$

$$\boxed{8} \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ et soit } S_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} \text{ et } T_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k}.$$

1) Montrer que $S_n + T_n = 2^n$ et $S_n - T_n = 0$.

2) En déduire la valeur de S_n et T_n .

Correction :

$$1) S_n + T_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$

$$= (1+1)^n = 2^n \text{ d'après la formule du binôme de Newton}$$

$$S_n - T_n = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^n \binom{n}{k} (-1)^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^n \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (-1+1)^n = 0 \text{ d'après la formule du binôme de Newton}$$

2) On a $S_n - T_n = 0$ donc $S_n = T_n$.

De plus, comme $S_n + T_n = 2^n$, on a donc $S_n + S_n = 2^n$ d'où $2S_n = 2^n$

$$\boxed{S_n = T_n = 2^{n-1}}$$

$$\boxed{9} \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Simplifier } \prod_{k=1}^n (2k) \text{ puis en déduire } \prod_{k=1}^n (2k+1).$$

Correction :

$$\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n! \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^n (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^n (2k+1) \times \prod_{k=1}^n (2k)}{\prod_{k=1}^n (2k)} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

$$\boxed{10} \text{ Calculer les produits suivants : a) } \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \text{ avec } n \geq 2 \quad \text{b) } \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{2^i} \text{ avec } n \geq 1.$$

Correction :

$$\begin{aligned} \text{a) } \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) &= \prod_{k=2}^n \frac{k^2-1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{k-1}{k} \times \prod_{k=2}^n \frac{k+1}{k} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1)}{2 \times 3 \times \dots \times n} \times \frac{3 \times 4 \times \dots \times (n+1)}{2 \times 3 \times \dots \times n} \\ &= \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$

$$\text{b) } \prod_{i=1}^n \frac{\sqrt{i}}{2^i} = \frac{\prod_{i=1}^n \sqrt{i}}{\prod_{i=1}^n 2^i} = \frac{\sqrt{\prod_{i=1}^n i}}{2^{\sum_{i=1}^n i}} = \frac{\sqrt{n!}}{2^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$