Soutien Manipulations d'inégalités

1 Est-il vrai que, quels que soient les réels, a, b, c et d, si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$, alors $a - c \leqslant b - d$?

2 Soit n dans $\mathbb{N}$. Est-il vrai que, quel que soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $x \leqslant y$, alors $x^n \leqslant y^n$?
Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \leqslant y$. Est-il vrai que quelque soit n dans $\mathbb{N}$, $x^n \leqslant y^n$?

3 Montrer que, pour tout a dans $\mathbb{R}$ et tout n dans $\mathbb{N}$, si $|a| \geqslant 1$, alors $|a^n| \geqslant 1$ et que $|a^{n+1}| \geqslant |a^n|$.
Montrer que pour tout a dans $\mathbb{R}$, et tout n dans $\mathbb{N}$, si $|a| \leqslant 1$, alors $|a^n| \leqslant 1$ et $|a^{n+1}| \leqslant |a^n|$.

4 Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n \, \mathrm{d}x$. Comparer I_n et I_{n+1}.

5 Soit x un réel. Montrer que si $|x - 2| \leqslant \dfrac{1}{4}$, alors $|1 - \dfrac{x}{2}| \leqslant \dfrac{1}{8}$ et $|1 - \dfrac{2}{x}| \leqslant \dfrac{1}{7}$ et $|x^2 - 4| \leqslant \dfrac{17}{16}$

6 Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = 5$ ainsi que la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$$

est bien définie et minorée par 2,le raisonnement suivant est-il correct ?

$u_0 = 5$
si u_n est défini et $u_n \geqslant 2$, alors $4u_n - 2 \geqslant 8 - 2 = 6$ et $u_n + 1 \geqslant 3$
donc u_{n+1} est défini et $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1} \geqslant \dfrac{6}{3} = 2$

S'il ne l'est pas, comment montrer simplement que cette suite est définie et minorée par 2 ?

7 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \geqslant \frac{1}{2}$. En déduire que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k} \geqslant \frac{n}{2}$