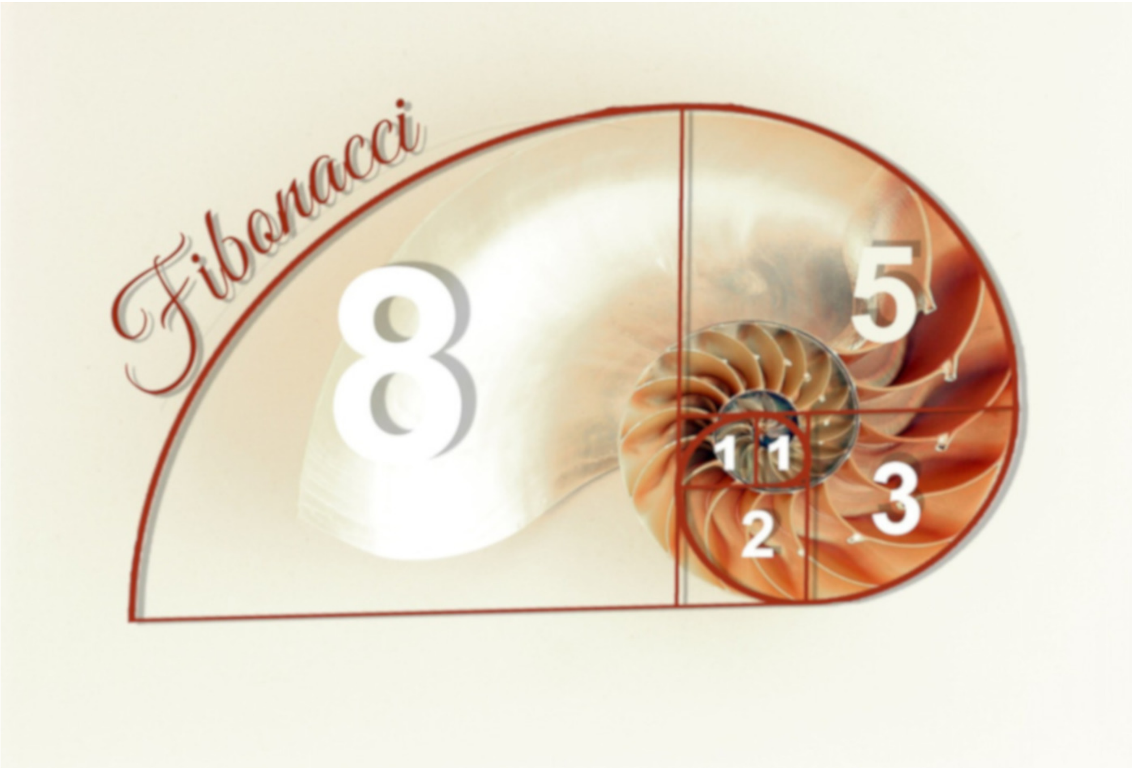
Cahier de calcul

— pratique et entraînement —



La suite de Fibonacci, définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

Elle apparaît sous de nombreuses formes biologiques, comme la ramification des arbres, la disposition des feuilles sur une tige, les fruits de l'ananas, la floraison de l'artichaut, le déroulement des feuilles de fougères, la disposition d'une pomme de pin, la coquille de l'escargot et la disposition des nuages lors des ouragans. Quant aux marguerites, elles ont le plus souvent un nombre de pétales issu de la suite de Fibonacci.

Ce cahier de calcul est une adaptation pour les classes de BCPST d'un travail réalisé initialement pour l'ensemble des classes préparatoires.

Coordination

Colas Bardavid

Équipe des participants

Vincent Bayle, Romain Basson, Olivier Bertrand, Ménard Bourgade, Julien Bureaux, Alain Camanes, Mathieu Charlot, Mathilde Colin de Verdière, Keven Commault, Miguel Concy, Rémy Eupherte, Hélène Gros, Audrey Hechner, Florian Hechner, Marie Hézard, Nicolas Laillet, Valérie Le Blanc, Thierry Limoges, Quang-Thai Ngo, Xavier Pellegrin, Fabien Pellegrini, Jean-Louis Pourtier, Valérie Robert, Jean-Pierre Técourt, Guillaume Tomasini, Marc Tenti

Adaptation BCPST

Pierre-Jean Aubry, Carine Courant, Elodie Maillet

Remerciements

Nous remercions vivement l'équipe coordonnée par Colas Bardavid pour avoir mis à disposition les sources du cahier initial.

Le pictogramme de l'horloge a été créé par Ralf Schmitzer (The Noun Project).

L'illustration de la couverture vient de
https ://www.freeimg.net/photo/512455/fibonacci-geometry-mathematics-nautilus

Version du 30 août 2022

Sommaire

Présentation et mode d'emploi

Qu'est-ce que ce cahier ?

Ce cahier est un cahier de calcul, basé sur le programme de mathématiques collège/lycée ainsi que sur le programme de première année de Post-Bac. Il ne se substitue en aucun cas aux TD donnés par votre professeur de maths mais est un outil pour vous aider à vous améliorer en calcul.

À quoi sert-il ?

En mathématiques, la technique et le calcul sont fondamentaux.

Sans technique, il est impossible de correctement appréhender une question mathématique. De même que l'on doit faire des gammes et beaucoup pratiquer lorsque l'on apprend un instrument, on doit calculer régulièrement lorsque l'on pratique les mathématiques, notamment en CPGE et dans les études Post-Bac.

Comment est-il organisé ?

Ce cahier comporte plusieurs parties :

- Un sommaire vous permettant d'avoir d'un seul coup d'œil les différentes fiches de ce cahier de calcul, et de noter celles que vous avez déjà faites ou pas.
- Une partie de **calculs élémentaires**, faisables dès le début de la première année, et centrée sur les calculs « de base » : développement, factorisation, racines carrées, fractions, *etc.* Cela peut vous paraître simple, mais sachez que ce type d'erreur de calcul est toujours fréquent, même en spé, même sur les copies de concours. Travailler les techniques élémentaires de calcul vous facilitera grandement la vie !
- Une partie liée au programme de première année : sont indiqués précisément les chapitres nécessaires pour pouvoir aborder chaque fiche de calculs.
- Enfin, quelques fiches portant sur le programme de deuxième année : les chapitres nécessaires sont clairement indiqués.
- Les réponses brutes ainsi que les corrigés détaillés, qui sont à la fin du cahier.

Chaque fiche de calculs est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis (notamment, pour des techniques propres à certaines filières, on précise de quelle filière il s'agit)
- Une liste de calculs, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité du calcul) est symbolisé par une (), deux (), trois () ou quatre () horloges.
- Vous êtes invité à écrire directement les réponses dans les cadres prévus à cet effet.

Comment l'utiliser ?

Un travail personnalisé.

Ce cahier de calcul est prévu pour être **utilisé en autonomie**.

Choisissez les calculs que vous faites en fonction des difficultés que vous rencontrez et des chapitres que vous étudiez, ou bien en fonction des conseils de votre professeur de mathématiques.

Pensez aussi à l'utiliser à l'issue d'un DS ou d'une colle, lorsque vous vous êtes rendu compte que certains points de calcul étaient mal maîtrisés.

Enfin, ne cherchez pas à faire linéairement ce cahier : les fiches ne sont pas à faire dans l'ordre, mais en fonction des points que vous souhaitez travailler.

Un travail régulier.

Essayez de pratiquer les calculs à un rythme régulier : **une quinzaine de minutes par jour** par exemple. Privilégiez un travail régulier sur le long terme plutôt qu'un objectif du type « faire 10 fiches par jour pendant les vacances » .

Point important : pour réussir à calculer, il faut répéter. C'est pour cela que nous avons mis plusieurs exemples illustrant chaque technique de calcul.

Il peut être utile de parfois refaire certains calculs : n'hésitez pas à cacher les réponses déjà écrites dans les cadres, ou à écrire vos réponses dans les cadres au crayon à papier.

Un travail efficace.

Attention à l'utilisation des réponses et des corrigés : il est important de chercher suffisamment par soi-même avant de regarder les réponses et/ou les corrigés. Il faut vraiment **faire les calculs** afin que le corrigé vous soit profitable.

N'hésitez pas à ne faire qu'en partie une feuille de calculs : il peut être utile de revenir plusieurs fois à une même feuille, afin de voir à quel point telle technique a bien été assimilée.

La progression

Avoir une solide technique de calcul s'acquiert sur le long terme, mais si vous étudiez sérieusement les fiches de ce cahier, vous verrez assez rapidement des progrès apparaître, en colle, en DS, *etc.* Une bonne connaissance du cours combinée à une plus grande aisance en calcul, c'est un très beau tremplin vers la réussite en prépa ou dans vos études !

Une erreur ? Une remarque ?

Si jamais vous voyez une erreur d'énoncé ou de corrigé, ou bien si vous avez une remarque à faire, n'hésitez pas à écrire à l'adresse `cahierdecalculs@prepasbio.org`.

Énoncés

Fiche de calcul n° 1

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.

Dès le début de la 1ère année.

Calculs dans l'ensemble des rationnels

Calcul 1.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ ....

b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ ....

c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ ....

d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$ ....

Calcul 1.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ ....

b) $\dfrac{2}{3} - 0{,}2$ ....

c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ ....

d) $-\dfrac{2}{15} \div (-\dfrac{6}{5})$ ....

Calcul 1.3

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7})$ ....

b) $\left(\dfrac{136}{15} - \dfrac{28}{5} + \dfrac{62}{10}\right) \times \dfrac{21}{24}$ ....

c) $\dfrac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3}$ ....

d) $\dfrac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 980 \times 21 + 1958}{1\ 980 \times 1\ 979 - 1\ 978 \times 1\ 979}$ ....

Calcul 1.4 — Des nombres décimaux et des fractions.

Dans chaque cas, donner le résultat sous forme d'une fraction irréductible.

a) $0{,}2$ ....

b) $0{,}36$ ....

c) $1{,}35$ ....

d) $1{,}5 + \dfrac{2}{3}$ ....

e) $\dfrac{1}{3} - 0{,}3$ ....

f) $\dfrac{13{,}5}{18{,}2 - 3{,}2}$ ....

Calcul 1.5 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible. ....

Calcul 1.6 — Le calcul littéral à la rescousse.

En utilisant les identités remarquables et le calcul littéral, calculer les nombres suivants.

a) $\dfrac{2\ 022}{(-2\ 022)^2+(-2\ 021)(2\ 023)}$ ..

c) $\dfrac{1\ 235\times 2\ 469-1\ 234}{1\ 234\times 2\ 469+1\ 235}$ ....

b) $\dfrac{2\ 021^2}{2\ 020^2+2\ 022^2-2}$ ....

d) $\dfrac{4\ 002}{1\ 000\times 1\ 002-999\times 1\ 001}$ ...

Calcul 1.7 — Les fractions et le calcul littéral.

Mettre sous la forme d'une seule fraction, qu'on écrira sous la forme la plus simple possible.

a) $\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ ....

b) $\dfrac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\dfrac{(a+b)^2}{a-b}$ pour $(a,b)\in\mathbb{Z}^3$, distincts deux à deux. ....

c) $\dfrac{\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\frac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}$ pour $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1,2\}$. ....

Calcul 1.8 — Le quotient de deux sommes de Gauss.

Simplifier $\dfrac{\sum_{k=0}^{n^2} k}{\sum_{k=0}^{n} k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, en utilisant la formule $1+2+\cdots+p=\dfrac{p(p+1)}{2}$. .....

Calcul 1.9 — Décomposition en somme d'une partie entière et d'une partie décimale.

Soit $k\in\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et $x\in\mathbb{R}\backslash\{2\}$. Écrire les fractions suivantes sous la forme $a+\dfrac{b}{c}$ avec $b<c$.

a) $\dfrac{29}{6}$ ......

b) $\dfrac{k}{k-1}$ ...

c) $\dfrac{3x-1}{x-2}$ ..

Calcul 1.10 — Un produit de fractions.

Soit $t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On donne $A=\dfrac{1}{1+t^2}-\dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B=\big(1+t^2\big)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible. ....

Comparaison

Calcul 1.11 — Règles de comparaison.

Comparer les fractions suivantes avec le signe « $>$ », « $<$ » ou « $=$ ».

a) $\dfrac{3}{5}\cdots\dfrac{5}{9}$ ....

b) $\dfrac{12}{11}\cdots\dfrac{10}{12}$ ......

c) $\dfrac{125}{25}\cdots\dfrac{105}{21}$ ....

Calcul 1.12 — Produit en croix.

Les nombres $A=\dfrac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B=\dfrac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ? ....

Calcul 1.13 — Produit en croix.

On pose $A=\dfrac{100\ 001}{1\ 000\ 001}$ et $B=\dfrac{1\ 000\ 001}{10\ 000\ 001}$: a-t-on $A>B$, $A=B$ ou $A<B$? ....

► Réponses et corrigés page 83

Fiche de calcul n° 2

Puissances

Prérequis
Opérations sur les puissances (produits, quotients), sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Dès le début de la 1ère année

Calcul 2.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$ ....

b) $(10^5)^3$ ....

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$ ....

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$ ....

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$ ....

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$ ....

Calcul 2.2 — Des nombres décimaux.

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $0{,}001$ ....

b) $10^3 \cdot 0{,}01^3$ ....

c) $\dfrac{0{,}01^2}{0{,}1^5}$ ....

d) $0{,}001^{-2} \cdot 1000^2$ ....

e) $\dfrac{1000 \cdot 0{,}01^3}{0{,}1^3 \cdot 0{,}01^2}$ ....

f) $\dfrac{\left(0{,}01^3\right)^{-2}}{0{,}1^{-3} \cdot \left(100^{-2}\right)^{-3}}$ ....

Calcul 2.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$ ....

b) $(5^3)^{-2}$ ....

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$ ....

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$ ....

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$ ....

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$ ....

Calcul 2.4

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$ ....

b) $2^{21} + 2^{22}$ ....

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$ ....

d) $\dfrac{\left(3^2 \cdot (-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5 \cdot 2^3\right)^{-2}}$ ....

Calcul 2.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$ ....

b) $\dfrac{55^2 \cdot 121^{-2} \cdot 125^2}{275 \cdot 605^{-2} \cdot 25^4}$ ....

c) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$ ....

d) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$ ....

Calcul 2.6

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$ ....

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$ ....

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$ ....

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$ ....

► Réponses et corrigés page 87

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Dès le début de la 1ère année

Développer, réduire et ordonner

Dans cette section, on tâchera de mener les calculs avec le minimum d'étapes. La variable x représente un nombre réel (ou complexe).

Calcul 3.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x - \dfrac{1}{2}\right)^3$ ....

b) $(x-1)^3\left(x^2+x+1\right)$ ....

c) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)$ ....

d) $(x+1)^2(x-1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

e) $(x-1)^2(x+1)\left(x^2+x+1\right)$ ....

f) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-x+1\right)$ ....

Calcul 3.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x-2)^2\left(-x^2+3x-1\right) - (2x-1)(x^3+2)$ ....

b) $(2x+3)(5x-8) - (2x-4)(5x-1)$ ....

c) $\left((x+1)^2(x-1)\left(x^2-x+1\right)+1\right)x - x^6 - x^5 + 2$ ....

d) $(x+1)(x-1)^2 - 2\left(x^2+x+1\right)$ ....

e) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$ ....

f) $\left(x^2+x+1\right)^2$ ....

Factoriser

Calcul 3.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1) + 36x^2 - 49$ ....

b) $25 - (10x+3)^2$ ....

c) $(6x-8)(4x-5) + 36x^2 - 64$ ....

d) $(-9x-8)(8x+8) + 64x^2 - 64$ ....

Calcul 3.4 — À l'aide de la forme canonique.

Donner la forme canonique puis factoriser les polynômes de degré deux suivants.

On rappelle que la forme canonique de $ax^2 + bx + c$ est $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right]$ (où $a \neq 0$).

a) $x^2 - 2x + 1$ ....

b) $x^2 + 4x + 4$ ....

c) $x^2 + 3x + 2$ ....

d) $3x^2 + 7x + 1$ ....

e) $2x^2 + 3x - 28$ ....

f) $-5x^2 + 6x - 1$ ....

Calcul 3.5 — Avec plusieurs variables.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $(x + y)^2 - z^2$ ....

b) $x^2 + 6xy + 9y^2 - 169x^2$ ....

c) $xy + x + y + 1$ ....

d) $xy - x - y + 1$ ....

e) $x^3 + x^2y + 2x^2 + 2xy + x + y$ ..

f) $y^2\left(a^2 + b^2\right) + 16x^4\left(-a^2 - b^2\right)$ ..

Calcul 3.6 — On passe au niveau supérieur.

Factoriser sur $\mathbb{R}$ les expressions polynomiales suivantes dont les variables représentent des nombres réels.

a) $x^4 - 1$ ....

b) $\left(-9x^2 + 24\right)\left(8x^2 + 8\right) + 64x^4 - 64$ ....

c) $x^4 + x^2 + 1$ ....

d) $(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$ ....

e) $(ap + bq + cr + ds)^2 + (aq - bp - cs + dr)^2 + (ar + bs - cp - dq)^2 + (as - br + cq - dp)^2$.

► Réponses et corrigés page 89

Fiche de calcul n° 4

004A

Racines carrées

Prérequis
Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Dès le début de la 1ère année

Premiers calculs

Calcul 4.1 — Définition de la racine carrée.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(-5)^2}$ ....

b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ ....

c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ ....

d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$ ....

e) $\sqrt{(3-\pi)^2}$ ....

f) $\sqrt{(3-a)^2}$ ....

Calcul 4.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ ....

b) $(2+\sqrt{5})^2$ ....

c) $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ ....

d) $\sqrt{11+6\sqrt{2}}$ ....

e) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ ....

f) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ ....

g) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$ ....

h) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$ ....

Avec la méthode de la quantité conjuguée

Calcul 4.3

Rendre rationnels les dénominateurs des expressions suivantes.

a) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ ....

b) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ ....

c) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

d) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$ ....

e) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$ ....

g) $\dfrac{5+2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{5-2\sqrt{6}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ ....

h) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$ ....

Calcul 4.4

Exprimer la quantité suivante sans racine carrée au dénominateur.

$\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ ....

Calculs variés

Calcul 4.5 — Avec une variable.

On considère la fonction f qui à $x > 1$ associe $f(x) = \sqrt{x-1}$. Pour tout $x > 1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x) + \dfrac{1}{f(x)}$ ....

b) $\dfrac{f(x+2) - f(x)}{f(x+2) + f(x)}$ ....

c) $\sqrt{x + 2f(x)}$ ....

d) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ ....

e) $f(x) + 4f''(x)$ ....

f) $\dfrac{f(x)}{f''(x)}$ ....

Calcul 4.6 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

Calcul 4.7 — Méli-mélo.

Donner une écriture simplifiée des réels suivants.

a) $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}}$ ....

b) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ ....

c) $\sqrt{\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}$ ....

d) $3\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\ln 3}$ ....

e) $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}}$ ....

f) $\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ ....

▶ Réponses et corrigés page 91

Fiche de calcul n° 5 **005A**

Expressions algébriques

Prérequis
Identités remarquables. Nombres complexes.

Dès le début de la 1ère année

Calcul 5.1 — Cubique.

Soit a un nombre réel tel que $a^3 - a^2 + 1 = 0$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $xa^2 + ya + z$ où x, y, z sont trois nombres rationnels.

a) $(a+2)^3$ ....

b) $a^5 - a^6$ ....

c) a^{12} ....

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{a^2}$ ....

Calcul 5.2 — Introduction aux nombres complexes.

Soit i un nombre tel que $\mathrm{i}^2 = -1$.
Exprimer les quantités suivantes sous la forme $x + \mathrm{i}y$ où x, y sont deux réels.

a) $(3+\mathrm{i})^2$ ....

b) $(3-\mathrm{i})^2$ ....

c) $(3-\mathrm{i})^3$ ....

d) $(3-2\mathrm{i})^3$ ....

Calcul 5.3

Même exercice.

a) $(4-5\mathrm{i})(6+3\mathrm{i})$ ....

b) $(2+3\mathrm{i})^3(2-3\mathrm{i})^3$ .....

c) $\left(-4+\mathrm{i}\sqrt{5}\right)^3$ ....

d) $\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$ ....

Calcul 5.4 — Puissance cinquième.

Soit a un nombre distinct de 1 tel que $a^5 = 1$. Calculer les nombres suivants :

a) $a^7 - 3a^6 + 4a^5 - a^2 + 3a - 1$ ....

b) $a^{1234} \times a^{2341} \times a^{3412} \times a^{4123}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=0}^{1234} a^k$ ....

Calcul 5.5 — Inverse.

Soit x un réel non nul. On pose $a = x - \dfrac{1}{x}$. Exprimer les quantités suivantes en fonction de a uniquement.

a) $x^2 + \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) $x^3 - \dfrac{1}{x^3}$ ....

c) $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ ....

Calcul 5.6

Soit p un réel de $]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.

Simplifier les expressions suivantes.

a) $pq \times \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2}$ ....

b) $\dfrac{pq}{(1-p)^2} - \dfrac{1}{q}$ ....

c) $\dfrac{1}{pq} - \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{1}{1-p}$ ....

d) $p^3 + 3pq + q^3$ ....

Calcul 5.7 — Résoudre une équation en physique.

Résoudre les équations suivantes en exprimant l'inconnue en fonction des autres grandeurs.

a) $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ avec pour inconnue k ....

b) $\dfrac{2mg}{a}\rho - \dfrac{mC^2}{\rho^3} = 0$ avec pour inconnue ρ avec $\rho > 0$ ....

c) $\dfrac{1}{2}mv^2 + \dfrac{mgd^2}{2R} = \dfrac{mgR}{2}$ avec pour inconnue v. ....

▶ Réponses et corrigés page 93

Équations du second degré

Prérequis
Relations entre coefficients et racines.

Dès le début de la 1ère année

Dans cette fiche :

- tous les trinômes considérés sont réels ;
- on ne s'intéresse qu'à leurs éventuelles **racines réelles** ;
- tous les paramètres sont choisis de telle sorte que l'équation considérée soit bien de degré 2.

Les formules donnant explicitement les racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant **ne servent nulle part** dans cette fiche d'exercices !

Recherche de racines

Calcul 6.1 — Des racines vraiment évidentes.

Résoudre mentalement les équations suivantes. *Les racines évidentes sont à chercher parmi* $0, 1, -1, 2, -2$ *ainsi éventuellement que* 3 *et* -3.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$ ....

b) $9x^2 + 6x + 1 = 0$ ....

c) $x^2 + 4x - 12 = 0$ ....

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$ ....

e) $x^2 - 5x = 0$ ....

f) $2x^2 + 3x = 0$ ....

g) $2x^2 + 3 = 0$ ....

h) $x^2 + 4x - 5 = 0$ ....

Calcul 6.2 — Somme et produit.

Résoudre mentalement les équations suivantes.

a) $x^2 - 13x + 42 = 0$ ....

b) $x^2 + 8x + 15 = 0$ ....

c) $x^2 + 18x + 77 = 0$ ....

d) $x^2 - 8x - 33 = 0$ ....

e) $x^2 - (a + b)x + ab = 0$ ....

f) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ ....

Calcul 6.3 — L'une grâce à l'autre.

Calculer la seconde racine des équations suivantes.

a) $3x^2 - 14x + 8 = 0$ sachant que $x = 4$ est racine ....

b) $7x^2 + 23x + 6 = 0$ sachant que $x = -3$ est racine ....

c) $mx^2 + (2m + 1)x + 2 = 0$ sachant que $x = -2$ est racine ....

d) $(m + 3)x^2 - (m^2 + 5m)x + 2m^2 = 0$ sachant que $x = m$ est racine ....

Calcul 6.4 — Racine évidente.

Trouver une racine des équations suivantes et calculer l'autre en utilisant les relations entre les coefficients du trinôme et ses racines.

a) $(b-c)x^2+(c-a)x+(a-b)=0$ ....

b) $a(b-c)x^2+b(c-a)x+c(a-b)=0$ ....

c) $(x+a)(x+b)=(m+a)(m+b)$ ....

Recherche d'équations

Calcul 6.5 — À la recherche de l'équation.

En utilisant la somme et le produit des racines d'une équation du second degré, former l'équation du second degré admettant comme racines les nombres suivants.

a) 9 et 13 ....

b) -11 et 17 ....

c) $2+\sqrt{3}$ et $2-\sqrt{3}$ ....

Calcul 6.6 — Avec le discriminant.

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

a) $x^2-(2m+3)x+m^2=0$ ....

b) $(m+2)x^2-2(m-1)x+4=0$ ....

Factorisations et signe

Calcul 6.7 — Factorisation à vue.

Déterminer de tête les valeurs des paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x.

a) $2x^2+7x+6=(x+2)(ax+b)$ ....

b) $-4x^2+4x-1=(2x-1)(ax+b)$ ....

c) $-3x^2+14x-15=(x-3)(ax+b)$ ....

Calcul 6.8 — Signe d'un trinôme.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2-(\sqrt{2}+1)x+\sqrt{2}$ ....

b) $-x^2+2x+15$ ....

c) $(x+1)(3x-2)$ ....

► Réponses et corrigés page 95

Fiche de calcul n° 7 **006A**

Exponentielle et Logarithme

Prérequis

Exponentielle, logarithme.

Dès le début de la 1ère année

Logarithmes

Calcul 7.1

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

a) $\ln(16)$ ....

b) $\ln(512)$ ....

c) $\ln(0{,}125)$ ....

d) $\dfrac{1}{8}\ln\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{1}{8}\right)$ ....

e) $\ln(72) - 2\ln(3)$ ....

f) $\ln(36)$ ....

Calcul 7.2

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

a) $\ln\left(\dfrac{1}{12}\right)$ ....

b) $\ln(2{,}25)$ ....

c) $\ln(21) + 2\ln(14) - 3\ln(0{,}875)$ ..

d) $\ln(500)$ ....

e) $\ln\left(\dfrac{16}{25}\right)$ ....

f) $\ln(6{,}25)$ ....

Calcul 7.3

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln(2)$, $\ln(3)$ et $\ln(5)$.

$\ln\left(\dfrac{1}{2}\right) + \ln\left(\dfrac{2}{3}\right) + \cdots + \ln\left(\dfrac{98}{99}\right) + \ln\left(\dfrac{99}{100}\right)$ ....

Exponentielles

Calcul 7.4

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $e^{3\ln(2)}$ ....

b) $\ln(\sqrt{e})$ ....

c) $\ln(e^{\frac{1}{3}})$ ....

d) $e^{-2\ln(3)}$ ....

e) $\ln(e^{-\frac{1}{2}})$ ....

f) $e^{\ln(3)-\ln(2)}$ ....

Calcul 7.5

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $-\mathrm{e}^{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)}$ ....

b) $\mathrm{e}^{-\ln(\ln(2))}$ ....

c) $\ln\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^{17}}\right)$ ....

d) $\ln(\sqrt{\mathrm{e}^4}) - \ln(\sqrt{\mathrm{e}^2})$ ....

Études de fonctions

Calcul 7.6 — Parité.

Étudier la parité des fonctions suivantes.

a) $f_1 : x \longmapsto \ln\left(\dfrac{2022+x}{2022-x}\right)$ ....

b) $f_2 : x \longmapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ ....

c) $f_3 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ ....

d) $f_4 : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$ ....

Calcul 7.7 — Limites d'une fonction.

On note $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}$.

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$. ....

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$. ....

Calcul 7.8

On note $f : x \longmapsto \ln(1+x)$.

Calculer et simplifier les expressions suivantes pour tout $x \in \mathbb{R}$ pour lequel elles sont définies.

a) $f(2\mathrm{e}^x - 1)$ ....

b) $\mathrm{e}^{x-\frac{1}{2}f(x)}$ ....

c) $\dfrac{1}{2}f(x^2-2x)$ ....

d) $xf'(x) - 1$ ....

Équations, inéquations

Calcul 7.9

Résoudre les équations et inéquations suivantes (d'inconnue x).

a) $\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$ ....

b) $1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$ ....

c) $\mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2$ ....

d) $\mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$ ....

► Réponses et corrigés page 97

Fiche de calcul n° 8

007A

Trigonométrie

Prérequis
Cercle trigonométrique. Relation $\cos^2 + \sin^2 = 1$. Symétrie et périodicité de sin et cos. Fonction tangente.

Dès le début de la 1ère année

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Valeurs remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.1

Donner les valeurs :

a) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ ......

b) $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ ....

c) $\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ ......

d) $\cos(7\pi)$ ....

e) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ ....

f) $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ ......

Calcul 8.2

Simplifier :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)+\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

b) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ ....

c) $\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\tan\left(\frac{3\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{7\pi}{6}\right)$

d) $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)+\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ ....

e) $\cos^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)-\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}\right)$ ....

Signe du cosinus et du sinus

Calcul 8.3

Donner le signe :

a) $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ ......

b) $\sin\left(\frac{7\pi}{5}\right)$ ......

c) $\cos\left(\frac{8\pi}{5}\right)$ ......

d) $\tan\left(\frac{13\pi}{5}\right)$ .....

e) $\sin\left(\frac{14\pi}{5}\right)$ ....

f) $\tan\left(-\frac{3\pi}{5}\right)$ ....

Propriétés remarquables de cosinus et sinus

Calcul 8.4

Simplifier :

a) $\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ ....

b) $\sin(-x)+\cos(\pi+x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$

c) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ ....

d) $\cos(x-\pi)+\sin\left(-\frac{\pi}{2}-x\right)$ ....

Formules de duplication

On rappelle les formules suivantes : $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ et $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

Calcul 8.5

En remarquant qu'on a $\dfrac{\pi}{4} = 2 \times \dfrac{\pi}{8}$, calculer :

a) $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ ....

b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ ....

c) $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ ....

Calcul 8.6

Simplifier pour $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$,

a) $\dfrac{1 - \cos(2x)}{\sin(2x)}$ ....

b) $\dfrac{\cos(2x)}{\cos(x)} - \dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$ ....

Équations trigonométriques

Calcul 8.7

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, dans $[-\pi, \pi]$, puis dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

a) $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$ ....

b) $\sin(x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ .....

c) $\sin(x) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

d) $\tan(x) = -1$ ....

e) $\cos^2(x) = \dfrac{1}{2}$ ....

f) $|\tan(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ .....

Inéquations trigonométriques

Calcul 8.8

Résoudre dans $[0, 2\pi]$, puis dans $[-\pi, \pi]$, les inéquations suivantes :

a) $\cos(x) \geqslant -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ....

b) $\cos(x) \leqslant \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$ .....

c) $\sin(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

d) $|\sin(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$ ....

e) $\tan(x) \geqslant 1$ ....

f) $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) \geqslant 0$ ......

► Réponses et corrigés page 99

Notation arccos, arcsin, arctan

Prérequis
Trigonométrie. Fonction arctangente.
Définition de $\arccos(x)$ et $\arcsin(x)$ pour $x \in [-1;1]$.

Après le cours de première année.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Calcul 9.1

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin\left(\dfrac{1}{2}\right)$ ....

b) $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}$ ....

c) $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ....

d) $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ....

e) $\arctan(1)$ ....

f) $\arccos\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\right)$ ....

Calcul 9.2

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin(\sin(\pi))$ ....

b) $\arcsin(\cos(0))$ ....

c) $\arccos(\sin(0))$ ....

d) $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$ ....

e) $\arctan(\tan(3\pi))$ ....

f) $\arctan\left(\tan\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)\right)$ ....

Calcul 9.3

Calculer les valeurs suivantes.

a) $\arcsin(\sin(1))$ ....

b) $\arcsin(\sin(2))$ ....

c) $\arccos(\cos(3))$ ....

d) $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{17}\right)\right)$ ....

e) $\arctan(\tan(3))$ ....

f) $\arctan\left(\tan\left(-\dfrac{8\pi}{7}\right)\right)$ ....

Calcul 9.4 — Équations avec les fonctions circulaires réciproques.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in [-1,1]$ pour les deux premiers calculs, et $x \in \mathbb{R}$ pour les autres.

a) $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$ ....

b) $\cos(\arccos(x)) = 0$ ....

c) $\arccos(\cos(x)) = 0$ ....

d) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{\pi}{3}$ ....

e) $\arcsin(\sin(x)) = \dfrac{1}{3}$ ....

f) $\tan(\arctan(x)) = 1$ ....

Calcul 9.5 — Calcul de dérivées.

Déterminer une expression de la dérivée des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto \arctan(2x)$ sur $\mathbb{R}$ ....

b) $x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) + \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}^*$ ....

c) $x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}\right)$ sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right\}$ ....

► Réponses et corrigés page 101

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Dès le début de 1ère année, sauf pour les composées : après le cours de 1ère année.

Application des formules usuelles

Calcul 10.1 — Avec des produits.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^3 + 3x + 2)(x^2 - 5)$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$. ....

d) $x \in]2, +\infty[$ et $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$ ....

Calcul 10.2 — Avec des puissances.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (x^2 - 5x)^5$. ....

b) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2x^3 + 4x - 1)^2$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (\sin(x) + 2\cos(x))^2$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (3\cos(x) - \sin(x))^3$. ....

Calcul 10.3 — Avec des fonctions composées.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. ....

b) $x \in]1, +\infty[$ et $f(x) = \ln(\ln(x))$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$. ....

d) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \exp(3\sin(2x))$. ....

e) $x \in]0, \pi[$ et $f(x) = \sqrt{\sin(x)}$. ....

f) $x \in]0, +\infty[$ et $f(x) = \sin\left(\sqrt{x}\right)$. ....

Calcul 10.4 — Avec des quotients.

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{2\sin(x)+3}$. ....

b) $x \in]0,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x+2}$. ....

c) $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \dfrac{\cos(2x+1)}{x^2+1}$. ....

d) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{2x^2+3x}{\ln(x)}$. ....

Opérations et fonctions composées

Calcul 10.5

Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour f définie par :

a) $x \in \mathbb{R}^*$ et $f(x) = x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$. ....

b) $x \in]-3,3[$ et $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9-x^2}}$. ....

c) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}\right)$ ....

d) $x \in]0,\pi[$ et $f(x) = \ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$. ....

Dériver pour étudier une fonction

Calcul 10.6

Calculer $f'(x)$ et écrire le résultat sous forme factorisée.

a) $x \in \mathbb{R} \setminus 3,-2$ et $f(x) = \dfrac{1}{3-x} + \dfrac{1}{2+x}$. ....

b) $x \in]-1,+\infty[$ et $f(x) = x^2 - \ln(x+1)$ ....

c) $x \in]1,+\infty[$ et $f(x) = \ln(x^2+x-2) - \dfrac{x+2}{x-1}$. ....

d) $x \in]-1,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{x}{x+1} + x - 2\ln(x+1)$. ....

e) $x \in]0,e[\cup]e,+\infty[$ et $f(x) = \dfrac{1+\ln(x)}{1-\ln(x)}$. ....

► Réponses et corrigés page 103

Primitives

Prérequis
Intégration de Terminale. Dérivée d'une fonction composée.
Trigonométrie directe et réciproque.

Dès le début de la 1ère année

Pour chaque fonction à intégrer on pourra commencer par chercher les domaines où elle admet des primitives.

Calculs directs

Calcul 11.1

Déterminer directement une primitive des expressions suivantes.

a) $\dfrac{1}{t+1}$ ....

b) $\dfrac{3}{(t+2)^2}$ ....

c) $\dfrac{3}{(t+2)^3}$ ....

d) $\sin(4t)$ ....

e) $\sqrt{1+t} - \sqrt[3]{t}$ ....

f) e^{2t+1} ....

Utilisation des formulaires

Calcul 11.2 — Dérivée d'une fonction composée.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\dfrac{2t^2}{1+t^3}$ ....

b) $t\sqrt{1+2t^2}$ ....

c) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

d) $\dfrac{7t}{\sqrt[3]{1+7t^2}}$ ....

e) $\dfrac{t}{1+3t^2}$ ....

f) $\dfrac{12t}{(1+3t^2)^3}$ ....

Calcul 11.3 — Dérivée d'une fonction composée – *bis*.

Même exercice.

a) $\dfrac{\ln^3(t)}{t}$ ....

b) $\dfrac{1}{t\sqrt{\ln(t)}}$ ....

c) $\dfrac{8\mathrm{e}^{2t}}{(3-\mathrm{e}^{2t})^3}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^2\sqrt{t}}$ ....

e) $\dfrac{\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t}$ ....

f) $\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}{t^2}$ ....

Calcul 11.4 — Trigonométrie.

Déterminer une primitive des expressions suivantes en reconnaissant la dérivée d'une fonction composée.

a) $\cos^2(t)\sin(t)$ .....

b) $\cos(t)\mathrm{e}^{\sin(t)}$ ......

c) $\tan(t)$ ....

d) $\dfrac{\cos(t)}{1-\sin(t)}$ ....

e) $\dfrac{\sin(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}$ ....

f) $\tan^2(t)$ ....

g) $\dfrac{1}{\cos^2(t)\sqrt{\tan(t)}}$ ..

h) $\dfrac{\cos(t)}{(1-\sin(t))^3}$ ....

i) $\dfrac{1}{1+4t^2}$ ....

Dériver puis intégrer, intégrer puis dériver

Calcul 11.5

Pour chacune des expressions suivantes :

- dériver puis factoriser l'expression ;
- donner une primitive de l'expression.

a) t^2-2t+5 .....

b) $\dfrac{1}{t^2}+\dfrac{1}{t}$ ....

c) $\sqrt{t}-\dfrac{1}{t^3}$ ....

d) $\dfrac{1}{t^4}+\dfrac{1}{t\sqrt{t}}$ ....

e) $\mathrm{e}^{2t}+\mathrm{e}^{-3t}$ ......

f) e^{3t-2} ....

g) $\sin(t)\cos^2(t)$ ...

h) $\dfrac{1}{t^2}\sin\left(\dfrac{1}{t}\right)$ .....

i) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{2+\mathrm{e}^t}$ ....

j) $\dfrac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^{2t}}$ ....

k) $\dfrac{\sin(t)}{2+3\cos(t)}$ ....

l) $\dfrac{t}{\sqrt{1-t^2}}$ ....

m) $t\mathrm{e}^{-t^2}$ ....

n) $\dfrac{1-\ln(t)}{t}$ ....

o) $\dfrac{1}{t\ln(t)}$ ....

p) $\dfrac{\sin(\ln(t))}{t}$ ......

► Réponses et corrigés page 106

Fiche de calcul n° 12

Calcul d'intégrales

Prérequis
Primitives usuelles, composées simples.

Dès le début de 1ère année, sauf pour les composées : après le cours de 1ère année.

Intégrales et aires algébriques

On rappelle que $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ est l'aire algébrique entre la courbe représentative de f et l'axe des abscisses du repère lorsque les bornes sont dans le sens croissant.

Calcul 12.1

Sans chercher à calculer les intégrales suivantes, donner leur signe.

a) $\int_{-2}^{3} x^2 + \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\int_{5}^{-3} |\sin(7x)|\,\mathrm{d}x$ ..

c) $\int_{0}^{-1} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ .....

Calcul 12.2

En se ramenant à des aires, calculer de tête les intégrales suivantes.

a) $\int_{1}^{3} 7\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\int_{7}^{-3} -5\,\mathrm{d}x$ .....

c) $\int_{0}^{7} 3x\,\mathrm{d}x$ ......

d) $\int_{2}^{8} (1-2x)\,\mathrm{d}x$.

e) $\int_{-2}^{2} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ ...

f) $\int_{-2}^{1} |x|\,\mathrm{d}x$ ......

Calcul d'intégrales

On rappelle que si F est une primitive de f alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$, que l'on note $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Calcul 12.3 — Polynômes.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\int_{-1}^{3} 2\,\mathrm{d}x$ ....

b) $\int_{1}^{3} (2x-5)\,\mathrm{d}x$ ....

c) $\int_{-2}^{0} (x^2+x+1)\,\mathrm{d}x$ ....

d) $\int_{-1}^{1} (3x^5-5x^3)\,\mathrm{d}x$ ....

e) $\int_{0}^{1} (x^5-x^4)\,\mathrm{d}x$ ....

f) $\int_{1}^{-1} x^{100}\,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 12.4 — Fonctions usuelles.

Calculer.

a) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(x)\,\mathrm{d}x$ ..

b) $\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$ ..

c) $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ ....

d) $\int_{1}^{100} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ ...

e) $\int_{-3}^{2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$ ......

f) $\int_{-3}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$ ....

Calcul 12.5 — De la forme $f(ax+b)$.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{2} (2x+1)^3 \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{4} \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\pi x+2}$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \sin(3x) \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\Big(\frac{\pi}{3}-x\Big) \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 12.6 — Fonctions composées.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{x-2}{x^2-4x+5} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x^2+1) \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{6}} \tan(x) \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)(\cos(x))^5 \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} x\mathrm{e}^{x^2-1} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x}{(x^2+1)^4} \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 12.7 — Divers.

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1} \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{-2}^{3} |x+1| \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \max(1,\mathrm{e}^x) \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln(x)}{x} \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x) \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos(x)\sin(x)| \,\mathrm{d}x$ ....

Calcul 12.8 — Avec les nouvelles fonctions de référence.

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{Arctan}\,(x) \,\mathrm{d}x$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{2} 10^x \,\mathrm{d}x$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{e^x+e^{-x}}{2} \,\mathrm{d}x$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x} \,\mathrm{d}x$ ....

f) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2} \,\mathrm{d}x$ ....

► Réponses et corrigés page 108

Intégration par parties

Prérequis
Primitives, dérivées, intégration par parties.

A la suite du cours de 1ère année.

On rappelle le théorème d'intégration par parties. Si $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, si $u \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et si $v \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrales

Calcul 13.1

Calculer :

a) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos(t)\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 (2t+3)\sin(2t)\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_1^{\ln 2} t\,2^t\,\mathrm{d}t$ ....

e) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln(t)\,\mathrm{d}t$ ....

f) $\displaystyle\int_1^2 t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ ....

g) $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t$ ....

h) $\displaystyle\int_0^1 t\arctan(t)\,\mathrm{d}t$ ....

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t$ ....

j) $\displaystyle\int_0^1 t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t$ ....

k) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t$ ....

l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2(t)\,\mathrm{d}t$ ....

Primitives

Calcul 13.2

Pour chaque fonction suivante, préciser sur quel ensemble elle est définie, puis en déterminer une primitive.

a) $x \longmapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ ....

c) $x \longmapsto \arctan(x)$ ......

d) $x \longmapsto x\cos(x)$ ....

Intégrations par parties successives

Pour ces calculs de primitives et d'intégrales, on pourra réaliser plusieurs intégrations par parties successives.

Calcul 13.3 — Calcul d'intégrales.

a) $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin(t)\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 13.4 — Calcul de primitives.

Calculer des primitives des fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$ ....

b) $x \longmapsto x^2\sin(x)$ ....

c) $x \longmapsto \ln^2(x)$ ....

d) $x \longmapsto (x\ln(x))^2$ ......

► Réponses et corrigés page 112

Changements de variable

Prérequis
Primitives, dérivées. Changements de variables. Intégration par parties.

A la suite du cours de 1ère année.

Changements de variable

Calcul 14.1

Effectuer le changement de variable indiqué et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \sin(\theta)$ ....

b) $\displaystyle\int_{1}^{3} \frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin(t)$ ....

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin(t)$ ....

e) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(t)\cos^3(t)\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sin(t)$ ....

f) $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calcul 14.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\int_{0}^{\pi} \frac{\sin(t)}{3+\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \cos(t)$ ....

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \mathrm{e}^t$ ....

c) $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ avec $t = \tan(u)$ ....

d) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln(t)}{t+t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \ln(t)$ ....

Changements de variable et intégrations par parties

Calcul 14.3

Effectuer le changement de variable indiqué, continuer avec une intégration par parties et en déduire la valeur de l'intégrale.

a) $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

b) $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln\left(\sqrt{t}-1\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$ ....

Calculs de primitives par changement de variable

Calcul 14.4

Déterminer une primitive de f en utilisant le changement de variable donné.

a) $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[\longmapsto \dfrac{\cos(x)+\sin(x)}{\sin(x)\cos^2(x)}$ avec $u = \tan(x)$ ....

b) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^x - 1}}$ avec $u = \sqrt{\mathrm{e}^x - 1}$ ....

c) $x \in \mathbb{R}_+^* \longmapsto \dfrac{1}{x + \sqrt[3]{x}}$ avec $u = \sqrt[3]{x}$ ....

d) $x > 1 \longmapsto \dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$ avec $u = \sqrt{x^2 - 1}$ ....

► Réponses et corrigés page 115

Intégration des fractions rationnelles

Prérequis
Fonctions ln et arctan.
Changements de variable affines dans les intégrales.

A la suite du cours de 1ère année.

Premier cas

Calcul 15.1

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 15.2

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t$ ....

Deuxième cas

Dans ce deuxième cas, il s'agit de reconnaître une expression du type $\frac{u'}{u}$.

Calcul 15.3

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 15.4

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t$ ....

Troisième cas

Calcul 15.5 — Exemple détaillé d'un calcul d'intégrale.

a) Quels sont les deux zéros de $t \longmapsto t^2 - 3t + 2$? ....

b) Trouver deux réels A et B tels que

pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$, on ait $\dfrac{1}{(t-1)(t-2)} = \dfrac{A}{t-1} + \dfrac{B}{t-2}$ ....

c) Calculer $\displaystyle\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 15.6

Calculer les intégrales suivantes, en procédant comme ci-dessus.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t$ ....

Calcul 15.7

Soit $a \in \,]0,1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t$ ....

Quatrième cas

Calcul 15.8

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

a) En effectuant le changement de variables $t = au$ dans l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2}$, déterminer une primitive de

$x \mapsto \dfrac{1}{x^2+a^2}$ ....

Calcul 15.9

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t$ ....

c) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t$ ......

Synthèse

Calcul 15.10 — Mise sous forme canonique.

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Mettre sous forme canonique les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$).

a) $x^2 + x + 1$ ....

b) $2x^2 - 3x + 1$ ....

c) $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2}$ ....

d) $ax^2 + a^2x + a^3$ ....

Calcul 15.11

Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

b) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t$ ....

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t$ ....

► Réponses et corrigés page 118

Systèmes linéaires

Prérequis
Résolution par substitution d'une variable, par combinaisons linéaires de lignes.

A la suite du cours de 1ère année.

Systèmes de 2 équations à 2 inconnues

Calcul 16.1

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$.

a) $\begin{cases} x - 2\,y = 1 \\ 3\,x + 4\,y = 13 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 2\,x + y = 16 \\ x - y = 5 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3\,x - 6y = -3 \\ 2\,x + 2\,y = 2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 3\,x - 4y = -\sqrt{2} \\ 6\,x + 2\,y = 3\sqrt{2} \end{cases}$ ....

Calcul 16.2 — Systèmes avec paramètre.

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ en fonction des valeurs du paramètre $a \in \mathbb{R}$.

a) $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ 2x + 4y = a \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} x - ay = 3a + 2 \\ ax + y = 2a - 3 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} 3x + 5y = a \\ 2x - y = a^2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} x + 2y = 3a \\ 2x + 3y = 5a - a^2 \end{cases}$ ....

Systèmes de 2 équations à 3 inconnues

Calcul 16.3

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 3x + y - 2z = 3 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} 3x - 2y + z = 6 \\ x + 2y - z = -2 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x - y + 3z = 5/2 \\ x + 2y - z = 3/2 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 5x + y + 2z = -5/2 \\ 2x - y + 2z = -5/3 \end{cases}$ ....

Systèmes de 3 équations à 3 inconnues

Calcul 16.4

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$.

a) $\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ 2x - y + z = 8 \\ 3x + y + 2z = 11 \end{cases}$ ....

b) $\begin{cases} a - b - c = -7 \\ 3a + 2b - c = 3 \\ 4a + b + 2c = 4 \end{cases}$ ....

c) $\begin{cases} x + 3y + z = 1 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ x + 10y + z = 0 \end{cases}$ ....

d) $\begin{cases} 3x + 2y + 3z = 0 \\ 2x - y + 2z = -1 \\ 4x + 5y + 4z = 1 \end{cases}$ ....

Calcul 16.5

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a proposées.

a) $a = 0$ ....

b) $a = -2$ ....

c) $a = 3$ ....

d) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$. ....

Calcul 16.6

On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètres $(a, c) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x - az = c \\ a\,x - y = c \\ a\,y - z = c. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de a et c proposées.

a) $a = 2$, $c = 7$ ....

b) $a = 1, c = 2$ ....

c) $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ....

Calcul 16.7

On propose le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ et de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 4x + y + z = \lambda x \\ x + 4y + z = \lambda y \\ x + y + 4z = \lambda z. \end{cases}$$

Résoudre ce système pour les valeurs de λ proposées.

a) $\lambda = 1$ ....

b) $\lambda = 3$ ....

c) $\lambda = 6$ ....

► Réponses et corrigés page 123

Fiche de calcul n° 17

Nombres complexes

Prérequis
Forme algébrique et forme exponentielle.

A la suite du cours de 1ère année.

Pour s'échauffer

Calcul 17.1 — Écriture algébrique.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique.

a) $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i})$ ....

b) $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i})$ ....

c) $(4-3\mathrm{i})^2$ ....

d) $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i})$ ....

e) $(2-3\mathrm{i})^4$ ....

f) $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}}$ ....

g) $\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}}$ ....

h) $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ ....

Calcul 17.2 — Forme exponentielle.

Mettre les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) 12 ....

b) -8 ....

c) $\sqrt{3}\mathrm{i}$ ....

d) $-2\mathrm{i}$ ....

e) $-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}}$ ....

f) $5-5\mathrm{i}$ ....

g) $-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}$ ....

h) $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ ....

Résolution de l'équation $x^2 = a$ avec $a \in \mathbb{C}$.

Calcul 17.3 — Equation dans $\mathbb{C}$.

Résoudre sur $\mathbb{C}$ les équations suivantes. (on donnera les solutions sous forme algébrique)

a) $x^2=-1$ ....

b) $x^2=2$ ....

c) $x^2=2\mathrm{i}$ ....

d) $x^2=3-4\mathrm{i}$ ....

Un calcul plus difficile

Calcul 17.4 — Une simplification.

On pose $z = \dfrac{1+\sqrt{2}+\mathrm{i}}{1+\sqrt{2}-\mathrm{i}}$.

a) Calculer $|z|$ ....

b) Mettre z sous forme algébrique ....

c) Calculer z^{2021} ....

► Réponses et corrigés page 128

Fiche de calcul n° 18

016A

Trigonométrie et nombres complexes

Prérequis
Nombres complexes, trigonométrie.

A la suite du cours de 1ère année.

Dans toute cette fiche, x désigne une quantité réelle.

Linéarisation

Calcul 18.1

Linéariser :

a) $\cos^3(x)$ ....

b) $\cos(2x)\sin^2(x)$ ....

c) $\cos^2(2x)\sin^2(x)$ ...

d) $\cos(3x)\sin^3(2x)$ ...

e) $\cos^3(2x)\cos(3x)$ ..

f) $\sin^2(4x)\sin(3x)$ ...

Arc moitié, arc moyen

Calcul 18.2

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $1 + e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

b) $1 + e^{i\frac{7\pi}{6}}$ ....

c) $e^{-i\frac{\pi}{6}} - 1$ ....

d) $1 + ie^{i\frac{\pi}{3}}$ ....

e) $-1 - e^{i\frac{\pi}{6}}$ ....

f) $1 - e^{i\frac{\pi}{12}}$ ....

g) $\dfrac{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}}{1 - e^{i\frac{\pi}{12}}}$ ....

h) $\left(1 + e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27}$ ....

Calcul 18.3

Écrire sous forme trigonométrique (c'est-à-dire sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$) :

a) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

b) $e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{2}}$ ....

Délinéarisation

Calcul 18.4

Exprimer en fonction des puissances de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$:

a) $\cos(3x)$ ....

b) $\sin(4x)$ ....

Factorisation

Calcul 18.5

Factoriser :

a) $\cos(x) + \cos(3x)$ .....

b) $\sin(5x) - \sin(3x)$ .....

c) $\cos(x) - \cos(3x)$ .....

d) $\sin(3x) + \sin(5x)$ .....

Calcul 18.6

Factoriser :

a) $\sin(x) + \sin(2x) + \sin(3x)$ ....

b) $\cos(x) + \cos(3x) + \cos(5x) + \cos(7x)$ ....

c) $\cos(x) + \cos\left(x + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(x + \dfrac{4\pi}{3}\right)$ ....

► Réponses et corrigés page 130

Fiche de calcul n° 19 **0017A**

Sommes et produits

Prérequis
Factorielle. Identités remarquables.
Fonctions usuelles (racine carrée, logarithme népérien).

A la suite du cours de 1ère année.

Si q est un nombre réel et si $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$ et $m \leqslant n$, on a

- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k = \frac{(n-m+1)(m+n)}{2}$
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ (*Non par coeur*)
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} q^k = \begin{cases} q^m \dfrac{1-q^{n-m+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \\ n-m+1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Dans toute la suite, n désigne un entier naturel non nul.

Calculs de sommes simples

Calcul 19.1

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (3k+n-1)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{k-4}{3}\right)$ ....

Calcul 19.2

Même exercice.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \big(4k(k^2+2)\big)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} 3^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k}$ ....

e) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (7^k+4k-n+2)$ ....

f) $\displaystyle\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2}$ ....

Calcul 19.3 — Produits.

Calculer les produits suivants, où p et q sont des entiers naturels non nuls tels que $p \leqslant q$.

a) $\displaystyle\prod_{k=p}^{q} 2$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 3^k$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \left(5\sqrt{k} \times k\right)$ ......

d) $\displaystyle\prod_{k=-10}^{10} k$ ....

Avec des changements d'indice

Calcul 19.4

Calculer les sommes suivantes en effectuant le changement d'indice demandé.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)$ avec $j = n+1-k$. ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$ avec $j = n+1-k$. ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^k$ avec $j = k-1$. ....

d) $\displaystyle\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^3$ avec $j = k-2$. ....

Sommes et produits télescopiques

Calcul 19.5 — Sommes télescopiques.

Calculer les sommes suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2}\left((k+1)^3 - k^3\right)$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{(k+1)!}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \times k!$ ....

Calcul 19.6 — Produits télescopiques.

Calculer les produits suivants.

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{2k-3}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right)$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$ ....

Sommes doubles

Calcul 19.7

Calculer les sommes doubles suivantes.

a) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j$ ....

b) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}\frac{i}{j}$ .....

c) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j)$.

d) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)^2$

e) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(i^j)$ ..

f) $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i,j)$

► Réponses et corrigés page 133

Fiche de calcul n° 20 **018A**

Coefficients binomiaux

Prérequis
Factorielles. Coefficients binomiaux. Formule du binôme de Newton.

A la suite du cours de 1ère année.

La lettre n désigne un entier naturel non nul.

Manipulations de factorielles et de coefficients binomiaux

Calcul 20.1 — Pour s'échauffer.

Donner la valeur des expressions suivantes :

a) $\dfrac{101!}{99!}$ ....

b) $\dfrac{10!}{7!}$ ....

c) $\dfrac{1}{4!}-\dfrac{1}{5!}$ ....

d) $\dbinom{6}{2}$ ....

e) $\dbinom{8}{3}$ ....

f) $4\times\dbinom{7}{4}$ ....

Calcul 20.2 — Pour s'échauffer – *bis*.

Écrire les expressions suivantes à l'aide de factorielles, de coefficients binomiaux et, le cas échéant, à l'aide de puissances.

a) $6\times7\times8\times9$ ....

b) $\dfrac{6\times7\times8\times9}{2\times3\times4}$ ....

c) $2\times4\times\cdots\times(2n)$ ....

d) $3\times5\times\cdots\times(2n+1)$ ....

Calcul 20.3 — Avec des paramètres.

Simplifier les expressions ci-dessous. La lettre k désigne un entier naturel tel que $k<n$.

a) $\dbinom{n}{2}$ (pour $n\geqslant 2$) ....

b) $\dbinom{n}{3}$ (pour $n\geqslant 3$) ....

c) $\dfrac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}}$ ....

d) $\dfrac{(n+2)!}{n!}$ ....

e) $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{n}{(n+1)!}$ ....

f) $\dfrac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}}-\dfrac{n!}{2^{2n}}$ ....

Calcul 20.4 — Avec la notation produit.

Soient n et p deux entiers vérifiant : $1\leqslant p\leqslant n$,

Reconnaître des coefficients binomiaux :

a) $\displaystyle\prod_{k=1}^{10}\frac{20-k}{k}$ ....

b) $\displaystyle\prod_{k=0}^{5}\frac{10-k}{6-k}$ ....

c) $\displaystyle\prod_{k=1}^{5}\frac{5+k}{k}$ ....

d) $\displaystyle\prod_{k=1}^{p}\frac{n-k+2}{k}$ ....

e) $\displaystyle\prod_{k=0}^{p}\frac{n-k}{p-k+1}$ ....

f) $\displaystyle\prod_{k=0}^{p-1}\frac{n-p+k}{k+1}$ ....

Autour du binôme de Newton

Calcul 20.5

Calculer les sommes ci-dessous à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1}$

Calcul 20.6

Calculer à l'aide de la formule du binôme de Newton.

a) 11^5 ....

b) $1{,}01^3$ ....

Calcul 20.7

En utilisant la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$, ses dérivées d'ordre 1 et 2 et sa primitive s'annulant en 0, calculer

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ......

Calcul 20.8

En utilisant la formule $\displaystyle\binom{n}{p} = \frac{n}{p}\binom{n-1}{p-1}$, calculer les sommes suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k(k-1)$ .....

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}$ ....

► Réponses et corrigés page 138

Fiche de calcul n° 21 **019A**

Manipulation des fonctions usuelles

Prérequis
Valeur absolue. Racine carrée. ln
Dérivation, équations du second degré.

Après le cours de 1ère année.

Résolution d'équations

Calcul 21.1 — Valeur absolue.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $|x+2| = 3$ ....

b) $|x+2| = |x-3|$ ......

Calcul 21.2 — Racine carrée.

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $\sqrt{x+1} = 2$ ....

b) $\sqrt{x} + \sqrt{x+1} = 2$ ....

Calcul 21.3 — Fonctions $x \longmapsto a^x$.

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $3^x = \dfrac{9^x}{2}$ ....

b) $4^x = 2 \times 2^x$ ....

c) $2^x = 3 \times 4^x$ ....

d) $10^{2x} = 4 \times 5^x \times 9^{\frac{x}{2}}$ ...

Calcul 21.4 — Fonctions $x \longmapsto a^x$ (plus difficile).

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

On pourra faire intervenir une équation de degré 2 en posant une nouvelle variable.

a) $2^x + 4^x = 4$ ....

b) $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0$ ....

c) $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0$ ....

d) $3^x + 3^{2x} - 1 = 0.$ ....

Résolution d'inéquations

Calcul 21.5 — Valeur absolue.

Résoudre les inéquations suivantes, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

a) $|x-3| < 1$ ....

b) $|2x+1| \geqslant 2$ ....

Dérivation

Calcul 21.6 — Quelques calculs de dérivées.

Dériver les fonctions suivantes.

a) $x \longmapsto 2^x + x^2$ ....

b) $x \longmapsto \dfrac{3^x}{5^x+1}$ ....

c) $x \longmapsto x^x$ ....

d) $x \longmapsto \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ....

e) $x \longmapsto \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ....

f) $x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$ ....

► Réponses et corrigés page 141

Fiche de calcul n° 22 **020A**

Suites numériques

Prérequis
Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

A la suite du cours de 1ère année.

Calcul de termes

Calcul 22.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

a) u_0 ....

b) u_1 ....

c) u_{n+1} ....

d) u_{3n} ....

Calcul 22.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) u_2 ....

b) u_3 ....

Calcul 22.3 — Suite récurrente.

On définit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $w_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ w_{n+1} = \dfrac{1}{2}w_n^2$. Calculer :

a) w_2 ....

b) son centième terme ....

Suites arithmétiques et géométriques

Calcul 22.4 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme 1 et de raison 2. Calculer :

a) a_{10} ....

b) $s_{100} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{99}$ ....

c) $a_{1\ 000}$ ....

d) $s_{101} = a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$ ....

Calcul 22.5 — Suite arithmétique.

La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison r vérifiant que $b_{101} = \dfrac{2}{3}$ et $b_{103} = \dfrac{3}{4}$. Calculer :

a) b_{102} ....

b) r ....

Calcul 22.6 — **Suite géométrique.**

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $\dfrac{1}{2}$. Calculer :

a) Son dixième terme est : ....

b) $\sigma_{10} = g_0 + g_1 + \ldots + g_9$ ....

c) g_{10} ....

d) $\sigma_{11} = g_0 + g_1 + \ldots + g_{10}$ ....

Calcul 22.7 — **Suite géométrique.**

La suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q vérifiant que $h_{11} = \dfrac{5\pi}{11}$ et $h_{13} = \dfrac{11\pi}{25}$. Calculer :

a) h_{12} ....

b) q ....

Suites récurrentes sur deux rangs

Calcul 22.8

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $u_0 = 2$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_{n+1} + 6u_n$. Calculer :

a) u_n ....

b) u_5 ....

Calcul 22.9

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par que $v_0 = 0$, $v_1 = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n$. Calculer :

a) v_n ....

b) v_2 ....

Calcul 22.10 — **Suite de Fermat.**

Soit la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ F_n = 2^{2^n} + 1$. Calculer :

a) F_3 ....

b) F_4 ....

c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1$ ....

d) $F_n \times (F_n - 2)$ ....

e) F_n^2 ....

f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2$ ....

▶ Réponses et corrigés page 143

Fiche de calcul n° 23 034A

Inégalités

Prérequis
Manipulations d'inégalités. Cours sur l'intégration. Suites numériques.

Dès le début de 1ère année.

Pour répondre vrai, donner une démonstration.
Pour répondre faux, montrer que c'est absurde ou donner un contre-exemple.

Pour s'échauffer

Calcul 23.1

Vrai-Faux : Soient deux réels a et b tels que : $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$

a) $-4 < a + b < -1$ ....

b) $6 < a - b < 5$ ....

c) $-19 < 3b - 2a < -11$ ....

d) $-5 < ab < -6$ ....

e) $\dfrac{-2}{3} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{-1}{5}$ ....

f) $\dfrac{\sqrt{a-1}}{b^2} < \dfrac{1}{25}$ ....

g) $a^2 \leqslant a$ ....

h) $\forall n \in \mathbb{N},\ (-5)^n < b^n < (-3)^n$ ......

Calcul 23.2

Vrai-Faux : Soient deux réels a et b

a) $-ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$ ....

b) $\dfrac{1}{2}(a^2 + b^2) \leqslant ab$ ....

c) $|a| \leqslant 1 + a^2$ ....

d) $a(1 - a) \leqslant \dfrac{1}{4}$ ....

Calcul 23.3

Vrai-Faux : Soit x un réel

a) $\sin(x) \leqslant (\sin(x))^2$ ....

b) $(\sin(x))^2 \leqslant \sin(x)$ ....

c) $(\sin(x))^2 \leqslant |\sin(x)|$ ....

d) $1 - \cos(2x) \leqslant 2|\sin(x)|$ ....

Pour comparer des intégrales

Calcul 23.4

Vrai-Faux : On note (u_n) la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{(\ln x)^n}{1+x}dx$.

Soient x un réel tel que $1 \leqslant x \leqslant 2$ et n un entier naturel.

a) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant (\ln(2))^n$ ....

b) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x}$ ....

c) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n}}{1+x}$ .... ☐

d) $\dfrac{1}{3} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n}}{1+x} \leqslant \dfrac{1}{2}$ .... ☐

e) La suite $(u_n)_n$ est décroissante. ... ☐

f) La suite $(u_n)_n$ est bornée. .... ☐

g) La suite $(u_n)_n$ converge vers 0. .... ☐

Calcul 23.5

Vrai-Faux : On note (u_n) la suite définie par $u_n = \displaystyle\int_{1/2}^{1} \frac{(\ln(x))^n}{1+x} dx$.

Soient x un réel tel que $\dfrac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$ et n un entier naturel.

a) $(\ln(1/2))^n \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n}}{1+x}$ .... ☐

b) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n}}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x}$ .... ☐

c) $0 \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x} \leqslant \dfrac{(\ln(x))^{n}}{1+x}$ .... ☐

d) La suite $(u_n)_n$ est monotone. ...... ☐

e) La suite $(u_n)_n$ converge vers 0. .... ☐

Pour comparer des sommes

Calcul 23.6

Vrai-Faux : On note $(T_n)_{n\geqslant 1}$ la suite définie par $T_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $0 \leqslant T_n \leqslant n$ .... ☐

b) $\dfrac{1}{2} \leqslant T_n \leqslant 1$ .... ☐

c) $T_{n+1} \leqslant T_n$ .... ☐

d) $T_n \leqslant T_{n+1}$ .... ☐

e) La suite $(T_n)_n$ converge. .... ☐

Calcul 23.7

Vrai-Faux : On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = -2\sqrt{n} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Soient n et k deux entiers naturels non nuls.

a) $u_{n+1} \leqslant u_n$ .... ☐

b) $u_n \leqslant u_{n+1}$ .... ☐

c) $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{k} - \sqrt{k-1}$ ☐

d) La suite $(u_n)_n$ est bornée. .... ☐

► Réponses et corrigés page 145

Fiche de calcul n° 24

Polynômes

Prérequis
Équations du second degré. Opérations sur les polynômes.
Racines d'un polynôme.

A la suite du cours de 2ième année.

Factorisation de polynômes de degré 2

Calcul 24.1 — Racines réelles uniquement.

Factoriser les polynômes suivants :

a) $P = -X^2 - 5X$ ......

b) $P = 2X^2 - 2$ ....

c) $P = 3X^2 + 3X - 6$ ...

d) $P = 2X^2 - 4X - 2$ ...

Calcul 24.2 — Racines réelles et complexes.

Factoriser les polynômes suivants :

a) $P = X^2 - 2X + 2$.

b) $P = 3X^2 - 6X + 15$

c) $P = iX^2 + 2iX + 2i$

d) $P = X^2 + (i-1)X - i$

Factorisation de polynômes de degré supérieur

Calcul 24.3 — Racines réelles uniquement.

Factoriser, en utilisant uniquement des racines réelles, les polynômes suivants *(on pourra en chercher une racine évidente)* :

a) $P = X^3 - 25X$ ....

b) $P = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$

c) $P = 3X^3 + 3X^2 - 6X - 6$

d) $P = 3X^3 + 3X^2 + 6X + 6$

e) $P = X^4 - 5X^2 + 4$ ...

f) $P = X^4 - 1$ ....

Calcul 24.4 — Racines complexes.

Factoriser, en utilisant des racines complexes, les polynômes suivants *(on pourra en chercher une racine évidente)* :

a) $P = 3X^3 + 3X^2 + 6X + 6$ ....

b) $P = X^3 + (i-1)X^2 + (2-i)X - 2$ ....

Calcul 24.5 — Compléments.

Factoriser, en utilisant l'indication, les polynômes suivants :

a) $P = X^3 + 5X^2 + X + 5$ après avoir vérifié que i est racine de P ....

b) $P = 2X^3 - 5X^2 + 6X - 2$ après avoir vérifié que $1+i$ est racine de P ......

c) $P = X^3 - 2X^2 - 15X + 36$ après avoir vérifié que 3 est racine multiple de P

d) $P = 4X^3 - 12X^2 - 15X - 4$ après avoir vérifié que $-\dfrac{1}{2}$ est racine multiple de P

► Réponses et corrigés page 148

Développements limités

Prérequis
Il est nécessaire de connaître les développements (en 0) des fonctions usuelles.

A la suite du cours de 1ère année.

Développements limités

Calcul 25.1 — Développements limités d'une somme ou d'un produit de fonctions.

Former le développement limité, à l'ordre indiqué et au voisinage de 0, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 3 : $f(x) = \sin(x) + 2\ln(1+x)$ ....

b) À l'ordre 2 : $\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$ ....

c) À l'ordre 4 : $\sin(x)(\cos(x) - 1)$ ....

d) À l'ordre 4 : $\mathrm{e}^x \sin(x)$ ....

Calcul 25.2 — Développements limités d'une fonction composée.

Former le développement limité, à l'ordre et au voisinage indiqués, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) À l'ordre 2, en 0 : $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ ....

b) À l'ordre 4, en 0 : $\sqrt{\cos(x)}$ ....

c) À l'ordre 3, en 0 : $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}$ ....

d) À l'ordre 2, en 1 : $\dfrac{\ln(2-x)}{x^2}$ ....

Calculs de limites

Calcul 25.3

Calculer les limites suivantes :

a) En 0 : $\dfrac{\ln(1+x) - x}{x^2}$ ....

b) En 0 : $\dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))}$ .....

c) En 0 : $\left(\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$ ....

d) En 0 : $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\ln(x+1)}$ ....

e) En 1 : $\dfrac{1 - x + \ln(x)}{1 - \sqrt{2x - x^2}}$ ....

f) En 0 : $\dfrac{1}{\sin(x)} - \dfrac{1}{\tan(x)}$ ......

Equivalents

Calcul 25.4

Déterminer un équivalent au voisinage indiqué, de la fonction de la variable réelle x définie par l'expression suivante :

a) En 0 : $\dfrac{1}{x(\mathrm{e}^x - 1)} - \dfrac{1}{x^2}$ ....

b) En $+\infty$: $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1}$ ....

c) En $+\infty$: $x\ln(x+1) - (x+1)\ln(x)$ ....

d) En $+\infty$: $\left(\dfrac{1}{x} + 1\right)^{x^2}$ ....

▶ Réponses et corrigés page 151

025A

Calcul matriciel

Prérequis
Calculs algébriques (sommes), coefficients binomiaux.

A la suite du cours de 1ère année.

Calcul matriciel

Calcul 26.1 — Calculs de produits matriciels.

Dans cet exercice, on note A, B, C, D, E les cinq matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits matriciels suivants.

a) A^2 . . .

b) A^3 . . .

c) $B \times E$

d) $E \times B$

e) $A \times E$

f) $B \times A$

g) D^2 . . .

h) $D \times C$

i) $B^\top \times B$

Calcul 26.2 — Calcul de puissances.

On note

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (1) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

la matrice D étant de taille $n \times n$ (où $n \in \mathbb{N}^*$), et où $\theta \in \mathbb{R}$.

Calculer le carré, le cube de chacune de ces matrices et utiliser ces calculs pour conjecturer leur puissance k-ième, pour $k \in \mathbb{N}$.

a) A^2 ...

b) A^3 ...

c) A^k ...

d) B^2 ...

e) B^3 ...

f) B^k ...

g) C^2 ...

h) C^3 ...

i) C^k ...

j) D^2 ...

k) D^3 ...

l) D^k ...

Calcul 26.3 — Calculs avec des sommes.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, et $B = (b_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ les matrices de termes généraux suivants :

$$a_{ij} = \binom{i-1}{j-1}, \qquad b_{ij} = 2^i 3^{j-i}$$

Donner le coefficient d'indice (i, j) des matrices suivantes. On simplifiera au maximum le résultat obtenu et, notamment, on trouvera une expression sans le symbole $\sum$.

a) $A \times B$ ....

b) B^2 ....

c) $B^\top \times B$ ....

d) $[A^2]_{i,j}$ ....

Inversion de matrices

Calcul 26.4 — Détermination d'inversibilité, calcul d'inverses.

Dans cet exercice, on note les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & e \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} \pi & \pi & 2\pi \\ \pi & 0 & 0 \\ -\pi & -2\pi & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 7 & 2 & 2 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Déterminer, si elle existe, l'inverse de chacune des matrices. Si elle n'est pas inversible, indiquer dans la case « non inversible » .

a) A . . .

d) D . . .

g) G . . .

b) B . . .

e) E . . .

h) H . .

c) C . . .

f) F . . .

i) J . . .

Calcul 26.5 — Matrices dépendant d'un paramètre.

On note λ et μ deux paramètres réels. On note A et B les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

Pour chaque matrice, donner une condition nécessaire et suffisante (abrégée ci-dessous en CNS) sur λ pour que la matrice soit inversible et en donner, dans ce cas, l'inverse.

a) CNS pour A inversible . . .

b) Inverse de A . . .

c) CNS pour B inversible . . .

d) Inverse de B . . .

► Réponses et corrigés page 154

Fiche de calcul n° 27

Équations différentielles

Prérequis
Équations différentielles à coefficients constants.

A la suite du cours de 1ère année.

Équations d'ordre 1 à coefficients constants

Calcul 27.1

Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a) $y' = 12y$ et $y(0) = 56$ ....

b) $y' = y + 1$ et $y(0) = 5$ ....

c) $y' = 3y + 5$ et $y(0) = 1$ ....

d) $y' = 2y + 12$ et $y(0) = 3$ ....

Calcul 27.2

Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a) $5y' = -y$ et $y(1) = \mathrm{e}$ ....

b) $7y' + 2y = 2$ et $y(7) = -1$ ....

c) $y' - \sqrt{5}y = 6$ et $y(0) = \pi$ ....

d) $y' = \pi y + 2\mathrm{e}$ et $y(\pi) = 12$ ....

Équations d'ordre 2, homogènes, à coefficients constants

Calcul 27.3 — Une équation avec plusieurs conditions initiales.

Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

c) $y'' - 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 3$ ....

Calcul 27.4 — **Racines doubles, racines simples.**

Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a) $y'' - y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

b) $y'' + 3y' + 2y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$ ....

c) $y'' + y' - 2y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

d) $y'' - 2y' + y = 0$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$ ....

e) $y'' + 4y' + 4y = 2$ et $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$ ....

f) $y'' + 4y' + 4y = 0$ et $y(1) = 1$ et $y'(1) = -3$ ....

Calcul 27.5 — **Racines complexes.**

Déterminer les solutions des problèmes différentiels suivants :

a) $y'' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$ ....

b) $y'' + 4y = -4$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

c) $y'' + y' + y = 0$ et $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$ ....

d) $y'' + 2y' + 2y = 0$ et $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$ ....

Avec des paramètres

Calcul 27.6

Déterminer l'expression de la solution $y(t)$ des problèmes différentiels suivants en fonction des différentes constantes.

a) $\tau y'(t) + y(t) = 0$ et $y(t_0) = y_0$ en fonction des constantes t_0, y_0 et $\tau \neq 0$.

. ...

b) $y''(t) + \omega^2 y(t) = 0$ et $y(t_0) = y_0$ et $y'(t_0) = 0$ en fonction des constantes t_0, y_0 et $\omega > 0$.

. ...

► Réponses et corrigés page 158

Fiche de calcul n° 28

Equations différentielles

Prérequis
Equations différentielles.

Après le cours de première année.

Calcul 28.1

Résoudre les équations différentielles suivantes sur I avec la condition initiale indiquée.

a) Sur $I = \mathbb{R}$, $y'(t) + t\,y(t) = 0$ et $y(0) = 1$ ....

b) Sur $I = \mathbb{R}$, $y'(t) + t\,y(t) = t$ et $y(0) = 1$ ....

c) Sur $I = \mathbb{R}$, $y'(t) + t\,y(t) = t^3$ et $y(0) = 1$ ....

Calcul 28.2

Résoudre les équations différentielles suivantes sur I avec les conditions initiales indiquées.

a) Sur $I = \mathbb{R}$, $y'(t) + y(t) = e^t$ et $y(0) = 1$ ....

b) Sur $I = \mathbb{R}$, $y'(t) - y(t) = e^t$ et $y(0) = 1$ ....

c) Sur $I = \mathbb{R}$, $y''(t) + y(t) = e^t$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

d) Sur $I = \mathbb{R}$, $y''(t) - y(t) = e^t$, $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$ ....

Calcul 28.3

Résoudre les équations différentielles suivantes sur I avec les conditions initiales indiquées.

a) Sur $I = \mathbb{R}$, $y'(x) = x + 2xy(x)$ et $y(0) = 1$. ....

b) Sur $I = \mathbb{R}$, $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t$, $y(1) = 0$ et $y'(1) = 0$ ....

c) Sur $I =]0; +\infty[$, $x^3y'(x) - x^2y(x) = 1$ et $y(1) = 0$. ....

d) Sur $I =]0, 1[$, $x\ln(x)y'(x) - y(x) = \ln(x)$ et $y(1/2) = 0$ . ...

Calcul 28.4 — Un second membre polynomial.

Déterminer une solution polynomiale des équations différentielles suivantes.

a) $y' - 2y = x$. ....

b) $2y' + y = 3x^2 + 2x + 1$. ....

c) $y'' - 3y = x^2 - 3x + 5$. ....

d) $4y'' + 3y' + 2y = x^2 + 2x$. ....

e) $y'' + 3y = x^2$. ....

f) $y'' + 3y' = 5x^3 - 3x + 5$. ....

► Réponses et corrigés page 162

 032A

Fonctions de deux variables

Prérequis
Fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité)

A la suite du cours de 1ère année.

Les fondamentaux

Calcul 29.1 — Ensembles de définition.

Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes.

a) $(x, y) \longmapsto \ln(x) + \sqrt{y}$ ....

b) $(x, y) \longmapsto \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2 + y^2}$ ....

c) $(x, y) \longmapsto \sqrt{16 - x^2 - y^2} \ln\left(x^2 + y^2 - 16\right)$ ....

Calcul 29.2 — Dérivation partielle.

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

a) $f : (x, y) \longmapsto x^2 + y^5 + xy + \pi$ ....

b) $f : (x, y) \longmapsto \sin(2xy - y)$ ....

c) $f : (x, y) \longmapsto \arctan(2x + y)$ ....

Calcul 29.3

Même exercice.

a) $f : (x, y) \longmapsto \cos(x - y)$ ....

b) $f : (x, y) \longmapsto x\cos(\mathrm{e}^{xy})$ ....

c) $f : (x, y) \longmapsto x^y$ ....

d) $f : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ....

Composition de fonctions

Calcul 29.4

On note $w(t) = f(u(t), v(t))$. Calculer $w'(t)$ pour chacune des fonctions f, u, v définies ci-dessous.

a) $f(x,y) = 4x^2 + 3y^2$ avec $\begin{cases} u = \sin \\ v = \cos \end{cases}$ ....

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ avec $\begin{cases} u(t) = \mathrm{e}^{2t} \\ v(t) = \mathrm{e}^{-t} \end{cases}$ ....

c) $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ avec $\begin{cases} u(t) = 3\sin(2t) \\ v(t) = 4\cos(2t) \end{cases}$ ....

Calcul 29.5 — Changements de variables.

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^*$.
Exprimer les dérivées partielles de $f \circ \varphi$ selon celles de f pour les fonctions suivantes.

a) $\varphi : (u,v) \mapsto \left(\dfrac{u+v}{2}, \dfrac{v-u}{2c}\right)$ .....

b) $\varphi : (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ....

Calcul 29.6 — Points critiques.

Déterminer les points critiques de la fonction f.

a) $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ ....

b) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ ....

c) $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ ....

d) $f(x,y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ ....

e) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ ....

▶ Réponses et corrigés page 165

Fiche de calcul n° 30

Séries numériques

Prérequis
Séries usuelles (convergence et sommes)

A la suite du cours de 2ième année.

Séries géométriques, exponentielles

Dans les calculs de cette section, reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

Calcul 30.1 — Séries géométriques.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} 2^k$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 10} \frac{1}{3^k}$ ....

Calcul 30.2 — Séries exponentielles.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{k!}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{2^k}{k!}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k \times k!}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{(k+1)!}$ ....

Séries télescopiques

Calcul 30.3

Prouver la convergence et calculer la somme de chacune des séries suivantes :

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^2+k}$.

On pourra chercher a et b tels que pour tout k, $\displaystyle\frac{1}{k^2+k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k^3+3k^2+2k}$.

On pourra chercher a, b et c tels que pour tout k, $\displaystyle\frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right)$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{k}{(k+1)!}$ ....

Séries géométriques - Séries géométriques dérivées

Calcul 30.4

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{1}{2^{2k}}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \mathrm{e}^{-(k-1)}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^k$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k\frac{1}{2^{k-1}}$ ....

Calcul 30.5

Reconnaître chacune des séries suivantes, dire si elle converge, et le cas échéant calculer sa somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k2^{-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} (3k+1)\frac{1}{3^k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} k(k-1)\frac{1}{2^{k-2}}$ .....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} k(k-1)\mathrm{e}^{-(k-2)}$ ..

Calcul 30.6

Justifier que les séries suivantes convergent puis calculer leur somme.

a) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k(-2)^{-k}$ ....

b) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k^2 3^{-k}$ ....

c) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} (k+2)\mathrm{e}^{-2k}$ ....

d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} k(k+1)\mathrm{e}^{-k}$ ......

► Réponses et corrigés page 167

Fiche de calcul n° 31

0026A

Algèbre linéaire

Prérequis

Coordonnées, Applications linéaires, Matrices, Rang.

A la suite du cours de 1ère année.

Vecteurs

Calcul 31.1

Pour chacun des calculs suivants, déterminer les coordonnées du vecteur u dans la base $\mathcal{B}$.

a) $u = (1, 1)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1), (-1, 2)\big)$. ....

b) $u = (1, 1)$, $\mathcal{B} = \big((-1, 2), (0, 1)\big)$. ....

c) $u = (3, 4)$, $\mathcal{B} = \big((1, 2), (12, 13)\big)$. ....

d) $u = (1, 2, 1)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1)\big)$. ....

e) $u = (-1, 0, 1)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0, 1), (1, 1, 1), (-1, -1, 3)\big)$. ....

Calculs de rangs

Calcul 31.2 — Sans calcul.

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 4 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 2 & 8 \\ 5 & 20 & 5 & 20 \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 13 \end{pmatrix}$ ....

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$. ....

f) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ....

Calcul 31.3

Déterminer le rang des matrices suivantes :

a) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -4 & -3 & -1 \\ -4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ ....

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ....

d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Matrices et Applications linéaires

Calcul 31.4 — Matrices d'endomorphismes.

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$ suivantes, déterminer la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0), (0, 1)\big)$. ....

b) $f : (x, y) \mapsto (x + y, 3x - 5y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1), (1, 0)\big)$. ....

c) $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 2), (3, 4)\big)$ ....

d) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y, 3x - z, y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$ ....

Calcul 31.5 — Matrices d'applications linéaires.

Pour les applications linéaires f et les bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ suivantes, déterminer la matrice de f de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

a) $f : (x, y) \mapsto (x + y, x - 2y)$, $\mathcal{B} = \big((1, 1), (1, 0)\big)$, $\mathcal{B}' = \big((2, 0), (0, 1)\big)$. ....

b) $f : (x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - y)$, $\mathcal{B} = \big((0, 1, 3), (4, 5, 6), (-1, 0, 1)\big)$, $\mathcal{B}' = \big((0, 1), (1, 0)\big)$.

► Réponses et corrigés page 170

Fiche de calcul n° 32 0033A

Réduction

Prérequis
Valeurs propres, vecteurs propres, diagonalisation. Théorème du rang.

A la suite du cours de 2ième année.

Vecteurs propres

Calcul 32.1

Déterminer si U est un vecteur propre de la matrice A et si oui donner la valeur propre associée.

a) $U = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ....

b) $U = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$ ....

c) $U = \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ....

d) $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ....

e) $U = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ ....

Dimension des sous-espaces propres

Calcul 32.2

Dire si λ est une valeur propre de A et si oui déterminer la dimension du sous-espace propre $E_\lambda(A)$.

a) $\lambda = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ....

b) $\lambda = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ....

c) $\lambda = 0$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ ....

d) $\lambda = 0$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ ....

Valeurs propres

Calcul 32.3

Déterminer les valeurs propres de la matrice et préciser si la matrice est diagonalisable.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ....

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ....

c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ....

d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{pmatrix}$ ....

e) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ ....

Calcul 32.4

Même question

a) $A = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ ....

b) $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -8 & -3 & 6 \\ -5 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ ....

c) $A = \begin{pmatrix} 11 & 4 & -4 \\ -2 & 5 & 2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ ....

d) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ....

► Réponses et corrigés page 173

Réponses et corrigés

Fiche n° 1. Fractions

Réponses

1.1 a) .... $\boxed{\dfrac{4}{5}}$

1.1 b) .... $\boxed{2^5}$

1.1 c) .... $\boxed{3}$

1.1 d) .... $\boxed{-2 \times 3^{3k-2}}$

1.2 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}}$

1.2 b) .... $\boxed{\dfrac{7}{15}}$

1.2 c) .... $\boxed{9}$

1.2 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{9}}$

1.3 a) .... $\boxed{247}$

1.3 b) .... $\boxed{\dfrac{203}{24}}$

1.3 c) .... $\boxed{\dfrac{-10}{3}}$

1.3 d) .... $\boxed{1\ 000}$

1.4 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{5}}$

1.4 b) .... $\boxed{\dfrac{9}{25}}$

1.4 c) .... $\boxed{\dfrac{27}{20}}$

1.4 d) .... $\boxed{\dfrac{13}{6}}$

1.4 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{30}}$

1.4 f) .... $\boxed{\dfrac{9}{10}}$

1.5 .... $\boxed{\dfrac{16}{35}}$

1.6 a) .... $\boxed{2\ 022}$

1.6 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

1.6 c) .... $\boxed{1}$

1.6 d) .... $\boxed{2}$

1.7 a) .... $\boxed{\dfrac{-1}{n(n+1)^2}}$

1.7 b) .... $\boxed{-\dfrac{ab}{a-b}}$

1.7 c) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}n}$

1.8 .... $\boxed{\dfrac{n^3+n}{n+1}}$

1.9 a) .... $\boxed{4+\dfrac{5}{6}}$

1.9 b) .... $\boxed{1+\dfrac{1}{k-1}}$

1.9 c) .... $\boxed{3+\dfrac{5}{x-2}}$

1.10 .... $\boxed{2t}$

1.11 a) .... $\boxed{\dfrac{3}{5} > \dfrac{5}{9}}$

1.11 b) .... $\boxed{\dfrac{12}{11} > \dfrac{10}{12}}$

1.11 c) .... $\boxed{\dfrac{125}{25} = \dfrac{105}{21}}$

1.12 .... $\boxed{\text{Non}}$

1.13 .... $\boxed{A > B}$

Corrigés

1.1 a) $\dfrac{32}{40} = \dfrac{8\times 4}{8\times 5} = \dfrac{4}{5}$

1.1 b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2} = (2\times 4)^3 \times \dfrac{1}{4^2} = 2^3 \times 4^3 \times \dfrac{1}{4^2} = 2^3 \times 4 = 2^5$

1.1 c) $\dfrac{27^{-1}\times 4^2}{3^{-4}\times 2^4} = \dfrac{(3^3)^{-1}\times (2^2)^2}{3^{-4}\times 2^4} = \dfrac{3^4}{3^3} = 3$

1.1 d) On a : $\dfrac{(-2)^{2k+1}\times 3^{2k-1}}{4^k\times 3^{-k+1}} = \dfrac{(-2)\times(-2)^{2k}\times 3^{2k}\times 3^{-1}}{4^k\times 3^{-k}\times 3} = \dfrac{(-2)\times 4^k\times 3^{2k}\times 3^k}{4^k\times 3^2} = -2\times 3^{3k-2}$.

1.2 a) On met au même dénominateur : $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2\times 3}{4\times 3} - \dfrac{1\times 4}{3\times 4} = \dfrac{6}{12} - \dfrac{4}{12} = \dfrac{6-4}{12} = \dfrac{2}{12} = \dfrac{1}{6}$.

1.2 b) On transforme 0,2 en fraction et on met au même dénominateur :

$$\frac{2}{3} - 0{,}2 = \frac{2}{3} - \frac{2}{10} = \frac{2\times 10}{3\times 10} - \frac{2\times 3}{10\times 3} = \frac{20}{30} - \frac{6}{30} = \frac{20-6}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7\times 2}{15\times 2} = \frac{7}{15}.$$

1.2 c) Pour multiplier des fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux :

$$\frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times 5 = \frac{36}{25}\times\frac{15}{12}\times\frac{5}{1} = \frac{36\times 15\times 5}{25\times 12\times 1} = \frac{12\times 3\times 5\times 3\times 5}{5\times 5\times 12\times 1} = \frac{3\times 3}{1} = \frac{9}{1} = 9.$$

1.2 d) Pour diviser une fraction par une autre, on la multiplie par la fraction inverse de la deuxième fraction :

$$-\frac{2}{15} \div (-\frac{6}{5}) = -\frac{2}{15} \times (-\frac{5}{6}) = \frac{2}{15} \times \frac{5}{6} = \frac{2 \times 5}{15 \times 6} = \frac{2 \times 5}{3 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{9}.$$

1.3 a) On développe :

$$\begin{aligned}(2 \times 3 \times 5 \times 7)(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}) &= \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{2} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{5} + \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{7} \\ &= 3 \times 5 \times 7 + 2 \times 5 \times 7 + 2 \times 3 \times 7 + 2 \times 3 \times 5 = 105 + 70 + 42 + 30 = 247.\end{aligned}$$

1.3 b) On simplifie d'abord, puis on applique les règles de calcul :

$$\begin{aligned}\left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{62}{10}\right) \times \frac{21}{24} &= \left(\frac{136}{15} - \frac{28}{5} + \frac{31}{5}\right) \times \frac{7}{8} \\ &= \left(\frac{136}{15} + \frac{3}{5}\right) \times \frac{7}{8} = \left(\frac{136}{15} + \frac{9}{15}\right) \times \frac{7}{8} = \frac{145}{15} \times \frac{7}{8} = \frac{29}{3} \times \frac{7}{8} = \frac{203}{24}.\end{aligned}$$

1.3 c) On simplifie d'abord les termes comportant des exposants :

$$\frac{5^{10} \times 7^3 - 25^5 \times 49^2}{(125 \times 7)^3 + 5^9 \times 14^3} = \frac{5^{10} \times 7^3 - 5^{10} \times 7^4}{5^9 \times 7^3 + 5^9 \times 7^3 \times 2^3} = \frac{5^{10} \times 7^3(1-7)}{5^9 \times 7^3(1+2^3)} = \frac{5 \times (-6)}{9} = \frac{-10}{3}.$$

1.3 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 980 \times 21 + 1\ 958}{1\ 980 \times 1\ 979 - 1\ 978 \times 1\ 979} &= \frac{1\ 978 \times 1\ 979 + 1\ 979 \times 21 + 21 + 1\ 958}{1\ 979 \times (1\ 980 - 1\ 978)} \\ &= \frac{1\ 979 \times (1\ 978 + 21) + 1\ 979}{1\ 979 \times 2} = \frac{1\ 979 \times (1\ 978 + 21 + 1)}{1\ 979 \times 2} = \frac{1\ 979 \times 2\ 000}{1\ 979 \times 2} \\ &= 1\ 000.\end{aligned}$$

1.5 On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5} &= \frac{\frac{3}{6} - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - \frac{7}{2}} \\ &= \frac{3\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)}{5\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{17} + \frac{1}{37}\right)} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}}{-7\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right)} = \frac{3}{5} - \frac{1}{7} = \frac{16}{35}.\end{aligned}$$

1.6 a) On connaît l'identité remarquable : $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Donc : $\dfrac{2\ 022}{(-2\ 022)^2 + (-2\ 021)(2\ 023)} = \dfrac{2\ 022}{(2\ 022)^2 + (1 - 2\ 022) \times (1 + 2\ 022)} = \dfrac{2\ 022}{(2\ 022)^2 + 1 - 2\ 022^2} = 2\ 022.$

1.6 b) On fait apparaître 2 021 dans 2 020 et 2 022 au dénominateur :

$$\begin{aligned}\frac{2\ 021^2}{2\ 020^2 + 2\ 022^2 - 2} &= \frac{2\ 021^2}{(2\ 021 - 1)^2 + (2\ 021 + 1)^2 - 2} \\ &= \frac{2\ 021^2}{2\ 021^2 - 2 \times 2\ 021 \times 1 + 1 + 2\ 021^2 + 2 \times 2\ 021 \times 1 + 1 - 2} \\ &= \frac{2\ 021^2}{2\ 021^2 - 2 \times 2\ 021 \times 1 + 2\ 021^2 + 2 \times 2\ 021 \times 1} = \frac{2\ 021}{2\ 021 - 2 + 2\ 021 + 2} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

1.6 c) En posant $a = 1\ 234$, on a : $1\ 235 = a + 1$ et $2\ 469 = 2a + 1$.

Donc : $\dfrac{1\ 235 \times 2\ 469 - 1\ 234}{1\ 234 \times 2\ 469 + 1\ 235} = \dfrac{(a+1)(2a+1) - a}{a(2a+1) + a + 1} = \dfrac{2a^2 + 2a + 1}{2a^2 + 2a + 1} = 1.$

1.6 d) En posant $a = 1\ 000$, on a : $999 = a - 1$, $1\ 001 = a + 1$, $1\ 002 = a + 2$ et $4\ 002 = 2a + 2$.

Donc : $\dfrac{4\ 002}{1\ 000\times 1\ 002-999\times 1\ 001}=\dfrac{4a+2}{a(a+2)-(a-1)(a+1)}=\dfrac{2(2a+1)}{a^2+2a-(a^2-1)}=\dfrac{2(2a+1)}{2a+1}=2.$

1.7 a) On met au même dénominateur. Cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}&=\frac{n}{n(n+1)^2}+\frac{n(n+1)}{n(n+1)^2}-\frac{(n+1)^2}{n(n+1)^2}=\frac{n+n(n+1)-(n+1)^2}{n(n+1)^2}\\&=\frac{n+n^2+n-(n^2+2n+1)}{n(n+1)^2}=\frac{-1}{n(n+1)^2}.\end{aligned}$$

1.7 b) On rappelle la formule : $a^3-b^3=(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)$. Cela donne :

$$\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{(a-b)\big(ab+a^2+b^2\big)}{(a-b)^2}-\frac{(a+b)^2}{a-b}=\frac{ab+a^2+b^2}{a-b}-\frac{a^2+2ab+b^2}{a-b}=-\frac{ab}{a-b}.$$

1.7 c) Pour $n\in\mathbb{N}^*\backslash\{1,2\}$, on a :

$$\frac{\dfrac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}}{\dfrac{2n+2}{n^2(n-1)^2}}=\frac{6(n+1)}{n(n-1)(2n-2)}\times\frac{n^2(n-1)^2}{2n+2}=\frac{6(n+1)}{2(n-1)}\times\frac{n(n-1)}{2(n+1)}=\frac{3}{2}n.$$

1.8 De $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$, on a : $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n^2}k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k}=\dfrac{\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}}{\dfrac{n(n+1)}{2}}=\dfrac{n^2(n^2+1)}{2}\,\dfrac{2}{n(n+1)}=\dfrac{n(n^2+1)}{n+1}=\dfrac{n^3+n}{n+1}.$

1.9 a) On trouve $\dfrac{29}{6}=\dfrac{4\times 6+5}{6}=4+\dfrac{5}{6}.$

1.9 b) On trouve $\dfrac{k}{k-1}=\dfrac{k-1+1}{k-1}=1+\dfrac{1}{k-1}.$

1.9 c) On trouve $\dfrac{3x-1}{x-2}=\dfrac{3(x-2)+5}{x-2}=3+\dfrac{5}{x-2}.$

1.10 Pour $t\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, on a :

$$A=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{(1+t)^2}=\frac{(1+t)^2}{(1+t^2)(1+t)^2}-\frac{1+t^2}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{1+2t+t^2-\big(1+t^2\big)}{(1+t^2)(1+t)^2}=\frac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}.$$

Donc, $AB=\left(\dfrac{2t}{(1+t^2)(1+t)^2}\right)\times\big(1+t^2\big)(1+t)^2=2t.$

1.11 a) $\dfrac{3}{5}=\dfrac{27}{45}>\dfrac{5}{9}=\dfrac{25}{45}$

1.11 c) $\dfrac{125}{25}=5=\dfrac{105}{21}$

1.12 Nous allons étudier les produits en croix.

On sait que $A=B$, si et seulement si $33\ 215\times 208\ 341=66\ 317\times 104\ 348$. Le nombre de gauche est le produit de deux nombres impair, il est impair. Par contre, le nombre de droite est le produit de deux nombres de parités différentes, il est pair. Par conséquent, l'égalité n'est pas vérifiée. A et B ne sont pas égaux.

1.13 On re-écrit $A=\dfrac{10^5+1}{10^6+1}$ et $B=\dfrac{10^6+1}{10^7+1}$. Nous allons étudier les produits en croix.

D'une part calculons : $(10^5+1)\times(10^7+1)=10^{12}+10^7+10^5+1.$

D'autre part : $(10^6+1)^2=10^{12}+2\times 10^6+1.$

Comme $(10^5+1)\times(10^7+1)>(10^6+1)\times\ (10^6+1)$, on obtient : $A>B$.

Fiche n° 2. Puissances

Réponses

2.1 a) .... $\boxed{10^8}$

2.1 b) .... $\boxed{10^{15}}$

2.1 c) .... $\boxed{10^2}$

2.1 d) .... $\boxed{10^{-2}}$

2.1 e) .... $\boxed{10^4}$

2.1 f) .... $\boxed{10^{-8}}$

2.2 a) .... $\boxed{10^{-3}}$

2.2 b) .... $\boxed{10^{-3}}$

2.2 c) .... $\boxed{10}$

2.2 d) .... $\boxed{10^{12}}$

2.2 e) .... $\boxed{10^4}$

2.2 f) .... $\boxed{10^{-3}}$

2.3 a) .... $\boxed{15^4}$

2.3 b) .... $\boxed{5^{-6}}$

2.3 c) .... $\boxed{2^7}$

2.3 d) .... $\boxed{(-7)^{-2}}$

2.3 e) .... $\boxed{3^5}$

2.3 f) .... $\boxed{3^{28}}$

2.4 a) .... $\boxed{2^{-4}\cdot 3^{-1}}$

2.4 b) .... $\boxed{2^{21}\cdot 3}$

2.4 c) .... $\boxed{2}$

2.4 d) .... $\boxed{2^{38}\cdot 3^{26}}$

2.5 a) .... $\boxed{8}$

2.5 b) .... $\boxed{11}$

2.5 c) .... $\boxed{3^{10}}$

2.5 d) .... $\boxed{2^6\cdot 5}$

2.6 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

2.6 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{x-2}}$

2.6 c) .... $\boxed{\dfrac{2x}{x+1}}$

2.6 d) .... $\boxed{\dfrac{2}{x-2}}$

Corrigés

2.2 b) $10^3\cdot 0{,}01^3 = 10^3\cdot\left(10^{-2}\right)^3 = 10^3\cdot 10^{-6} = 10^{-3}$

2.2 c) $\dfrac{0{,}01^2}{0{,}1^5} = \dfrac{10^{-4}}{10^{-5}} = 10^1$

2.2 d) $0{,}001^{-2}\cdot 1000^2 = \left(10^{-3}\right)^{-2}\cdot 10^6 = 10^{12}$

2.2 e) $\dfrac{1000\cdot 0{,}01^3}{0{,}1^3\cdot 0{,}01^2} = \dfrac{10^3\cdot 10^{-6}}{10^{-3}\cdot 10^{-4}} = 10^{-3}\cdot 10^7 = 10^4$

2.2 f) $\dfrac{\left(0{,}01^3\right)^{-2}}{0{,}1^{-3}\cdot(100^{-2})^{-3}} = \dfrac{\left(10^{-6}\right)^{-2}}{10^3\cdot(10^{-4})^{-3}} = \dfrac{1}{10^3} = 10^{-3}$

2.4 a) $\dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 6^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^4\cdot 2^8\cdot 2^{-1}\cdot 3^{-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^{4-1}\cdot 2^{8-1}} = \dfrac{2^3\cdot 3^2}{3^3\cdot 2^7} = 2^{3-7}\cdot 3^{2-3} = 2^{-4}\cdot 3^{-1}.$

2.4 b) On factorise : $2^{21}+2^{22} = 2^{21}+2^{21}\cdot 2 = 2^{21}\cdot(1+2) = 2^{21}\cdot 3.$

2.4 c) On factorise au numérateur et au dénominateur : $\dfrac{3^{22}+3^{21}}{3^{22}-3^{21}} = \dfrac{(3+1)\cdot 3^{21}}{(3-1)\cdot 3^{21}} = \dfrac{4}{2} = 2.$

2.4 d) On simplifie en appliquant les règles habituelles de calcul avec les puissances, et en exploitant le fait que $(-a)^n = a^n$ lorsque n est pair : $\dfrac{\left(3^2\cdot(-2)^4\right)^8}{\left((-3)^5\cdot 2^3\right)^{-2}} = \dfrac{3^{16}\cdot 2^{32}}{3^{-10}\cdot 2^{-6}} = 2^{38}\cdot 3^{26}.$

2.5 a) On fait apparaitre les facteurs premiers 2 et 3 : $\dfrac{8^{17}\cdot 6^{-6}}{9^{-3}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{3\cdot 17}\cdot 2^{-6}\cdot 3^{-6}}{3^{2\cdot(-3)}\cdot 2^{42}} = \dfrac{2^{51-6}\cdot 3^{-6}}{3^{-6}\cdot 2^{42}} = 2^{45-42} = 2^3 = 8.$

2.5 b) Avec les facteurs premiers 5 et 11 : $\dfrac{55^2\cdot 121^{-2}\cdot 125^2}{275\cdot 605^{-2}\cdot 25^4} = \dfrac{(5\cdot 11)^2\cdot(11^2)^{-2}\cdot(5^3)^2}{5^2\cdot 11\cdot(11^2\cdot 5)^{-2}\cdot(5^2)^4} = \dfrac{5^8\cdot 11^{-2}}{5^8\cdot 11^{-3}} = 11.$

2.5 c) On fait apparaitre les facteurs premiers 2, 3 et 5 : $\dfrac{12^{-2}\cdot 15^4}{25^2\cdot 18^{-4}} = \dfrac{(2^2)^{-2}\cdot 3^{-2}\cdot 3^4\cdot 5^4}{(5^2)^2\cdot 2^{-4}\cdot(3^2)^{-4}} = \dfrac{2^{-4}\cdot 3^2\cdot 5^4}{2^{-4}\cdot 3^{-8}\cdot 5^4} = 3^{10}.$

2.5 d) Même méthode que précédemment : $\dfrac{36^3\cdot 70^5\cdot 10^2}{14^3\cdot 28^2\cdot 15^6} = \dfrac{2^6\cdot 3^6\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 7^5\cdot 2^2\cdot 5^2}{2^3\cdot 7^3\cdot 2^4\cdot 7^2\cdot 3^6\cdot 5^6} = \dfrac{2^{13}\cdot 3^6\cdot 5^7\cdot 7^5}{2^7\cdot 3^6\cdot 5^6\cdot 7^5} = 2^6\cdot 5.$

2.6 a) On met au même dénominateur les deux premières écritures fractionnaires : $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1)-2(x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x-2x+2}{(x+1)(x-1)} - \dfrac{2}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x^2-x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{x}{x+1}$

2.6 b) Même méthode : $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4} = \dfrac{2(x-2)-(x+2)}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{2x-4-x-2+8}{(x+2)(x-2)} = \dfrac{1}{x-2}$

2.6 c) On commence par simplifier les puissances superflues, puis c'est le même principe que précédemment : $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x} = \dfrac{x}{x-1} + \dfrac{x}{x+1} - \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{x(x+1+x-1)}{(x-1)(x+1)} - \dfrac{2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x^2-2x}{(x+1)(x-1)} = \dfrac{2x}{x+1}$

2.6 d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{(x+2)(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{x-2+x}{x(x-2)} + \dfrac{2}{x(x-2)} = \dfrac{2}{x-2}$

Fiche n° 3. Calcul littéral

Réponses

3.1 a) .... $\boxed{8x^3 - 6x^2 + \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{8}}$

3.1 b) .... $\boxed{x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1}$

3.1 c) .... $\boxed{x^5 - x^3 + x^2 - 1}$

3.1 d) .... $\boxed{x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1}$

3.1 e) .... $\boxed{x^5 - x^3 - x^2 + 1}$

3.1 f) .... $\boxed{x^4 + x^2 + 1}$

3.2 a) .... $\boxed{-2 + 12x - 17x^2 + 8x^3 - 3x^4}$

3.2 b) .... $\boxed{-28 + 21x}$

3.2 c) .... $\boxed{2 + x^3 - x^4 - x^5}$

3.2 d) .... $\boxed{-1 - 3x - 3x^2 + x^3}$

3.2 e) .... $\boxed{1 + x^4}$

3.2 f) .... $\boxed{1 + 2x + 3x^2 + 2x^3 + x^4}$

3.3 a) .... $\boxed{-6(6x + 7)}$

3.3 b) .... $\boxed{4(5x + 4)(-5x + 1)}$

3.3 c) .... $\boxed{2(3x - 4)(10x + 3)}$

3.3 d) .... $\boxed{-8(x + 1)(x + 16)}$

3.4 a) .... $\boxed{(x - 1)^2}$

3.4 b) .... $\boxed{(x + 2)^2}$

3.4 c) .... $\boxed{\left(x + \dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4} \quad \text{et} \quad (x + 1)(x + 2)}$

3.4 d) ....

$$\boxed{3\left[\left(x + \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{37}{36}\right] \quad \text{et} \quad 3\left(x + \frac{7 - \sqrt{37}}{6}\right)\left(x + \frac{7 + \sqrt{37}}{6}\right)}$$

3.4 e) ....

$$\boxed{2\left[\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{233}{16}\right] \quad \text{et} \quad 2\left(x + \frac{3 - \sqrt{233}}{4}\right)\left(x + \frac{3 + \sqrt{233}}{4}\right)}$$

3.4 f) ....

$$\boxed{-5\left[\left(x - \frac{3}{5}\right)^2 - \frac{4}{25}\right] \quad \text{et} \quad -5(x - 1)\left(x - \frac{1}{5}\right)}$$

3.5 a) .... $\boxed{(x + y - z)(x + y + z)}$

3.5 b) .... $\boxed{(14x + 3y)(-12x + 3y)}$

3.5 c) .... $\boxed{(x + 1)(y + 1)}$

3.5 d) .... $\boxed{(x - 1)(y - 1)}$

3.5 e) .... $\boxed{(x + y)(x + 1)^2}$

3.5 f) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2\right)\left(y - 4x^2\right)\left(y + 4x^2\right)}$

3.6 a) .... $\boxed{(x - 1)(x + 1)\left(x^2 + 1\right)}$

3.6 b) .... $\boxed{-8\left(x^2 + 1\right)(x - 4)(x + 4)}$

3.6 c) .... $\boxed{\left(x^2 + x + 1\right)\left(x^2 - x + 1\right)}$

3.6 d) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right)}$

3.6 e) .... $\boxed{\left(a^2 + b^2 + c^2 + d^2\right)\left(p^2 + q^2 + r^2 + s^2\right)}$

Corrigés

3.1 a) On utilise directement l'identité remarquable $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

....

3.1 b) On peut écrire : $(x - 1)^3\left(x^2 + x + 1\right) = \left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)\left(x^2 + x + 1\right) = x^5 - 2x^4 + x^3 - x^2 + 2x - 1$. Pour être “efficace”, il suffit de rechercher directement le coefficient du terme d'un degré donné (sachant que $(ax^n)(bx^p) = abx^{n+p}$). Par exemple, dans l'expression finale et en utilisant l'étape intermédiaire, le coefficient du terme de degré 2 est donné par $(-3) \times 1 + 3 \times 1 + (-1) \times 1 = -1$. Ici, l'étape intermédiaire n'étant pas compliquée (à effectuer et à retenir), on peut (éventuellement) se passer de l'écrire.

....

3.1 c) Connaissant les identités remarquables $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$ et $(x+1)\left(x^2 - x + 1\right) = x^3 + 1$, on a facilement :

$$(x + 1)^2(x - 1)\left(x^2 - x + 1\right) = [(x + 1)(x - 1)]\left[(x + 1)\left(x^2 - x + 1\right)\right] = \left(x^2 - 1\right)\left(x^3 + 1\right) = x^5 - x^3 + x^2 - 1.$$

Que pensez-vous de la nécessité d'écrire les étapes intermédiaires ?

....

3.1 d) On calcule : $(x+1)^2(x-1)\big(x^2+x+1\big) = \big(x^2+2x+1\big)\big(x^3-1\big) = x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$.

....

3.1 e) On calcule : $(x-1)^2(x+1)\big(x^2+x+1\big) = \big(x^2-1\big)\big(x^3-1\big) = x^5-x^3-x^2+1$.

....

3.3 a) Une identité remarquable fait apparaître le facteur commun $6x+7$. On calcule alors

$$-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49 = -(6x+7)(6x-1)+(6x)^2-7^2 = (6x+7)[-(6x-1)+6x-7] = -6(6x+7)$$

.

....

3.3 b) On calcule $25-(10x+3)^2 = 5^2-(10x+3)^2 = (10x+8)(-10x+2) = 4(5x+4)(-5x+1)$.

....

3.4 c) La forme canonique est $\left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$. On en déduit la factorisation à l'aide de l'identité remarquable $a^2-b^2=\ldots$

....

3.5 b) On calcule $x^2+6xy+9y^2-169x^2 = (x+3y)^2-(13x)^2 = (14x+3y)(-12x+3y)$.

....

3.5 e) On calcule $x^3+x^2y+2x^2+2xy+x+y = (x+y)(x^2+2x+1) = (x+y)(x+1)^2$.

....

3.6 a) On calcule $x^4-1 = \big(x^2-1\big)\big(x^2+1\big) = (x-1)(x+1)\big(x^2+1\big)$.

....

3.6 b) On calcule $\big(-9x^2+24\big)\big(8x^2+8\big)+64x^4-64 = -8\big(x^2+1\big)\big[9x^2-24-8\big(x^2-1\big)\big] = -8\big(x^2+1\big)(x-4)(x+4)$.

....

3.6 c) On calcule $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2 = \big(x^2+1\big)-x^2 = \big(x^2+x+1\big)\big(x^2-x+1\big)$. La factorisation est alors terminée sur $\mathbb{R}$ puisque les deux équations, $x^2+x+1=0$ et $x^2-x+1=0$, n'ont pas de solutions réelles.

....

3.6 d) Une fois n'est pas coutume : on peut commencer par développer avant de factoriser. Ce qui donne

$$(ac+bd)^2+(ad-bc)^2 = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 = \big(a^2+b^2\big)\big(c^2+d^2\big).$$

Remarque : signalons tout de même qu'une autre voie (sans calcul) consiste à interpréter en termes de module d'un produit de deux nombres complexes !

....

Fiche n° 4. Racines carrées

Réponses

4.1 a) .... $\boxed{5}$

4.1 b) .... $\boxed{\sqrt{3}-1}$

4.1 c) .... $\boxed{-\sqrt{3}+2}$

4.1 d) .... $\boxed{\sqrt{7}-2}$

4.1 e) .... $\boxed{\pi-3}$

4.1 f) .... $\boxed{|3-a|}$

4.2 a) .... $\boxed{20}$

4.2 b) .... $\boxed{9+4\sqrt{5}}$

4.2 c) .... $\boxed{1+\sqrt{3}}$

4.2 d) .... $\boxed{3+\sqrt{2}}$

4.2 e) .... $\boxed{12\sqrt{7}}$

4.2 f) .... $\boxed{12}$

4.2 g) .... $\boxed{9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}}$

4.2 h) .... $\boxed{10}$

4.3 a) .... $\boxed{2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}}$

4.3 b) .... $\boxed{3-2\sqrt{2}}$

4.3 c) .... $\boxed{1-\sqrt{10}+\sqrt{15}}$

4.3 d) .... $\boxed{\sqrt{15}+\sqrt{10}-\sqrt{6}-2}$

4.3 e) .... $\boxed{-(\sqrt{2}+\sqrt{3})}$

4.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{3+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}}$

4.3 g) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.3 h) .... $\boxed{50-25\sqrt{3}}$

4.4 .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$

4.5 a) .... $\boxed{\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}}$

4.5 b) .... $\boxed{x-\sqrt{x^2-1}}$

4.5 c) .... $\boxed{1+\sqrt{x-1}}$

4.5 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}}$

4.5 e) .... $\boxed{\dfrac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}}$

4.5 f) .... $\boxed{-4(x-1)^2}$

4.6 a) .... $\boxed{\sqrt{2}}$

4.6 b) .... $\boxed{2\sqrt{2}}$

4.7 a) .... $\boxed{-11+5\sqrt{5}}$

4.7 b) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 c) .... $\boxed{1+\sqrt{2}}$

4.7 d) .... $\boxed{\sqrt{3}}$

4.7 e) .... $\boxed{1+\sqrt{5}}$

4.7 f) .... $\boxed{\ln(1+\sqrt{2})}$

Corrigés

4.1 a) Quand a est un réel positif, $\sqrt{a}$ est le nombre positif dont le carré vaut a donc $\sqrt{(-5^2)}=5$.

....

4.1 f) On trouve $|3-a|$, c'est-à-dire $3-a$ si $a\leqslant 3$ et $a-3$ si $a\geqslant 3$.

....

4.2 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{1+2\sqrt{3}+3}=\sqrt{(1+\sqrt{3})^2}=1+\sqrt{3}.$$

....

4.3 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}&=\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}\times\frac{2-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}\\&=\frac{(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{2})}{2^2-2}=\frac{4-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+\sqrt{6}}{2}\\&=2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{6}.\end{aligned}$$

....

4.4 On pose $A := \dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. On a :

$$A = \frac{1}{1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{\left(1+\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)\left(1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\right)} = \frac{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)}{1-\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{4+2\sqrt{6}}.$$

Ainsi, la technique de la « quantité conjuguée » n'est pas suffisante ici ; mais on peut la réappliquer. On a

$$A = \frac{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-1\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)}{\left(4+2\sqrt{6}\right)\left(4-2\sqrt{6}\right)} = \frac{4\sqrt{2}-4\sqrt{3}+4\sqrt{3}-6\sqrt{2}-4+2\sqrt{6}}{16-24} = \frac{2\sqrt{2}+4-2\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

Ainsi, on a $\boxed{\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}}$: ce qu'on cherchait.

Remarque : on pouvait aussi faire un autre type de quantité conjuguée :

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(1+\sqrt{2}-\sqrt{3})} = \frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+2-\sqrt{6}}{4}.$$

4.5 c) On essaie de reconnaître une identité remarquable dans la racine :

$$\sqrt{x+2f(x)} = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} = \sqrt{\sqrt{x-1}^2+2\sqrt{x-1}+1} = \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} = \sqrt{x-1}+1.$$

4.5 e) Le calcul donne $f''(x) = -\dfrac{1}{4}\dfrac{1}{(x-1)^{3/2}}$ d'où :

$$f(x)+4f''(x) = \sqrt{x-1} - \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}} = \frac{1}{(x-1)\sqrt{x-1}}((x-1)^2-1) = \frac{x(x-2)}{(x-1)\sqrt{x-1}}.$$

4.6 a) On calcule :

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}\right)^2 = 3+\sqrt{5}-2\sqrt{3+\sqrt{5}}\sqrt{3-\sqrt{5}}+3-\sqrt{5} = 6-2\sqrt{9-5} = 6-2\sqrt{4} = 6-4 = 2.$$

De plus, $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} \geqslant 0$, donc $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{2}$.

4.7 b) On calcule $3+2\sqrt{2} = 2+2\sqrt{2}+1 = (\sqrt{2})^2+2\times 1\times\sqrt{2}+1^2 = (1+\sqrt{2})^2$ et on trouve donc

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}} = 1+\sqrt{2}.$$

4.7 e) On calcule : $2\sqrt{\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} = \sqrt{1+2\sqrt{5}+\sqrt{5}^2} = \sqrt{(1+\sqrt{5})^2} = 1+\sqrt{5}$.

Fiche n° 5. Expressions algébriques

Réponses

5.1 a) .... $\boxed{7a^2 + 12a + 7}$

5.1 b) .... $\boxed{a^2 - a - 1}$

5.1 c) .... $\boxed{4a^2 - a - 3}$

5.1 d) .... $\boxed{-a^2 + 1}$

5.2 a) .... $\boxed{8 + 6\mathrm{i}}$

5.2 b) .... $\boxed{8 - 6\mathrm{i}}$

5.2 c) .... $\boxed{18 - 26\mathrm{i}}$

5.2 d) .... $\boxed{-9 - 46\mathrm{i}}$

5.3 a) .... $\boxed{39 - 18\mathrm{i}}$

5.3 b) .... $\boxed{2197}$

5.3 c) .... $\boxed{-4 + 43\mathrm{i}\sqrt{5}}$

5.3 d) .... $\boxed{1}$

5.4 a) .... $\boxed{3}$

5.4 b) .... $\boxed{1}$

5.4 c) .... $\boxed{1}$

5.5 a) .... $\boxed{a^2 + 2}$

5.5 b) .... $\boxed{a^3 + 3a}$

5.5 c) .... $\boxed{a^4 + 4a^2 + 2}$

5.6 a) .... $\boxed{\dfrac{q}{p^2}}$

5.6 b) .... $\boxed{-1}$

5.6 c) .... $\boxed{0}$

5.6 d) .... $\boxed{1}$

5.7 a) .... $\boxed{\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$

5.7 b) .... $\boxed{\left(\dfrac{aC^2}{2g}\right)^{\frac{1}{4}}}$

5.7 c) ....

$$\boxed{\sqrt{g\left(R - \frac{d^2}{R}\right)} \text{ ou } -\sqrt{g\left(R - \frac{d^2}{R}\right)}}$$

Corrigés

5.1 a) On développe $(a+2)^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$, puis on simplifie sachant que $a^3 = a^2 - 1$.

5.1 b) De $a^3 = a^2 - 1$, on déduit $a^6 = a^3(a^2 - a) = a^5 - a^4$ et donc $a^5 - a^6 = a^4$. De plus $a^4 = a(a^2 - 1)$, *etc.*

5.1 c) On commence par $a^6 = (a^3)^2 = (a^2 - 1)^2 = a^4 - 2a^2 + 1 = -a^2 - a$ puis $a^{12} = (-a^2 - a)^2 = a^4 + 2a^3 + a^2$.

5.1 d) L'égalité $a^3 - a^2 + 1$ peut s'écrire $a(a - a^2) = 1$ ce qui montre que $a \neq 0$ et $\dfrac{1}{a} = a - a^2$. Alors $\dfrac{1}{a^2} = 1 - a$.

5.2 a) On développe : $(3 + \mathrm{i})^2 = 9 + 6\mathrm{i} + \mathrm{i}^2$.

5.2 b) On développe : $(3 - \mathrm{i})^2 = 9 + 6(-\mathrm{i}) + (-\mathrm{i})^2 = 9 - 6\mathrm{i} + \mathrm{i}^2$.

5.2 c) D'après le calcul précédent : $(3 - \mathrm{i})^3 = (8 - 6\mathrm{i})(3 - \mathrm{i}) = 24 - 18\mathrm{i} - 8\mathrm{i} + 6\mathrm{i}^2$.

5.2 d) On développe directement : $(3 - 2\mathrm{i})^3 = 3^3 - 3 \cdot 3^2(2\mathrm{i})^1 + 3 \cdot 3^1(2\mathrm{i})^2 - (2\mathrm{i})^3$.

5.3 a) On développe : $24 - 30\mathrm{i} + 12\mathrm{i} - 15\mathrm{i}^2$.

5.3 b) En remarquant que $(2 + 3\mathrm{i})(2 - 3\mathrm{i}) = 2^2 - (3\mathrm{i})^2 = 4 + 9$, on obtient par associativité 13^3.

5.3 c) On développe : $(-4 + \mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -4^3 + 3 \cdot 4^2(\mathrm{i}\sqrt{5}) - 3 \cdot 4^1(\mathrm{i}\sqrt{5})^2 + (\mathrm{i}\sqrt{5})^3 = -64 + 48\mathrm{i}\sqrt{5} + 60 - 5\mathrm{i}\sqrt{5}$.

5.3 d) On développe : $(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^3 = -\dfrac{1}{8} + 3 \cdot i\dfrac{\sqrt{3}}{8} + 3 \cdot \dfrac{3}{8} - i\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

5.4 a) De $a^5 = 1$, on déduit $a^7 = a^2$ et $a^6 = a$ donc tous les termes se simplifient sauf deux : $4 - 1 = 3$.

5.4 b) On commence par $a^{1234} = (a^{10})^{123} \times a^4 = a^4$ car $a^{10} = (a^5)^2 = 1$. De même $a^{2341} = a^1$, *etc.* et on obtient donc finalement $a^4 \times a^1 \times a^2 \times a^3 = a^{10} = 1$.

5.4 c) Ceci vaut a^S où $S = \sum_{k=0}^{1234} k = \dfrac{1234 \times (1234+1)}{2}$ est un entier multiple de 5.

5.5 a) On complète le carré : $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 \cdot x \cdot \dfrac{1}{x}$.

5.5 b) On se ramène au résultat précédent : $x^3 - \dfrac{1}{x^3} = x\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \dfrac{1}{x}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \left(x - \dfrac{1}{x}\right) = a(a^2+2) + a$.

5.5 c) De même : $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = x^2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) + \dfrac{1}{x^2}\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - 2 = (a^2+2)^2 - 2$.

5.6 a) $pq \times \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{2q+p-1}{p^2}$ or $p - 1 = -q$ donc $pq \times \dfrac{2}{p^3} + \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2} = \dfrac{q}{p^2}$

5.6 b) $\dfrac{pq}{(1-p)^2} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{p}{q} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{p-1}{q} = -1$

5.6 c) $\dfrac{1}{pq} - \dfrac{1}{1-q} - \dfrac{1}{1-p} = \dfrac{1}{pq} - \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{pq} - \dfrac{q}{pq} - \dfrac{p}{pq} = \dfrac{1-p-q}{pq} = 0$

5.6 d) $p + q = 1$ donc $p^3 + 3pq + q^3 = p^3 + 3pq(p+q) + q^3 = p^3 + 3p^2q + 3pq^2 + q^3 = (p+q)^3 = 1$

5.7 a) $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} = \dfrac{k_2 + k_1}{k_1 k_2}$ donc $\dfrac{1}{k} = \dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2}$ équivaut à $k = \dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$

5.7 b) $\dfrac{2mg}{a}\rho - \dfrac{mC^2}{\rho^3} = 0 \iff \dfrac{2mg}{a}\rho = \dfrac{mC^2}{\rho^3} \iff \rho^4 = \dfrac{aC^2}{2g} \iff \rho = \sqrt[4]{\dfrac{aC^2}{2g}}$ (car $\rho > 0$)

5.7 c) On a nécessairement $R - \dfrac{d^2}{R} \geqslant 0$.

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{mgd^2}{2R} = \frac{mgR}{2} \iff v^2 + \frac{gd^2}{R} = gR \iff v^2 = g\left(R - \frac{d^2}{R}\right) \iff v = \sqrt{g\left(R - \frac{d^2}{R}\right)} \text{ ou } v = -\sqrt{g\left(R - \frac{d^2}{R}\right)}$$

Fiche n° 6. Équations du second degré

Réponses

6.1 a) .... $\boxed{3, 3}$

6.1 b) .... $\boxed{-1/3, -1/3}$

6.1 c) .... $\boxed{2, -6}$

6.1 d) .... $\boxed{2, 3}$

6.1 e) .... $\boxed{0, \text{ donc } 5}$

6.1 f) .... $\boxed{0, \text{ donc } -3/2}$

6.1 g) .... $\boxed{\varnothing}$

6.1 h) .... $\boxed{1 \text{ donc } -5}$

6.2 a) .... $\boxed{6, 7}$

6.2 b) .... $\boxed{-3, -5}$

6.2 c) .... $\boxed{-7, -11}$

6.2 d) .... $\boxed{-3, 11}$

6.2 e) .... $\boxed{a, b}$

6.2 f) .... $\boxed{a-b, a+b}$

6.3 a) .... $\boxed{2/3}$

6.3 b) .... $\boxed{-2/7}$

6.3 c) .... $\boxed{-1/m}$

6.3 d) .... $\boxed{2m/(m+3)}$

6.4 a) .... $\boxed{1 \text{ donc } (a-b)/(b-c)}$

6.4 b) .... $\boxed{1 \text{ donc } c(a-b)/(a(b-c))}$

6.4 c) .... $\boxed{m \text{ donc } -(m+a+b)}$

6.5 a) .... $\boxed{x^2 - 22x + 117 = 0}$

6.5 b) .... $\boxed{x^2 - 6x - 187 = 0}$

6.5 c) .... $\boxed{x^2 - 4x + 1 = 0}$

6.6 a) .... $\boxed{m = -3/4 \text{ et } x = 3/4}$

6.6 b) ... $\boxed{m = -1 \text{ et } x = -2, \text{ ou } m = 7 \text{ et } x = 2/3}$

6.7 a) .... $\boxed{a = 2 \text{ et } b = 3}$

6.7 b) .... $\boxed{a = -2 \text{ et } b = 1}$

6.7 c) .... $\boxed{a = -3 \text{ et } b = 5}$

6.8 a) .... $\boxed{]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[}$

6.8 b) .... $\boxed{[-3, 5]}$

6.8 c) .... $\boxed{]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[}$

Corrigés

6.1 a) C'est une identité remarquable : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$.

6.1 c) Le nombre 2 est racine évidente, l'autre est donc -6 en regardant le produit des racines qui vaut -12.

6.1 e) La racine 0 est la racine évidente par excellence ; la somme des racines valant ici 5 l'autre racine est 5.

6.1 g) La fonction $x \longmapsto 2x^2 + 3$ est strictement postivie car elle est minorée par 3, donc elle ne s'annule pas.

6.2 a) Ici on cherche des racines un peu moins évidentes : on remplace le problème par le problème équivalent de la détermination de deux nombres x_1, x_2 dont le produit vaut 42 et la somme 13. On teste donc les factorisations évidentes de 42, ici $42 = 6 \times 7$ et $13 = 6 + 7$.

6.2 b) On cherche deux nombres dont le produit vaut 15 et la somme -8 : les nombres -3 et -5 conviennent.

6.5 a) La somme des racines vaut 22, leur produit 117. L'équation cherchée est donc $x^2 - 22x + 117 = 0$.

6.6 a) Une équation du second degré admet une racine double si, et seulement si, son discriminant est nul.

Ici, le discriminant vaut $\Delta = (2m+3)^2 - 4m^2 = 3(4m-1)$. Ainsi, l'équation admet une racine double si, et seulement si, m vaut $-3/4$ ce qui donne $x = 3/4$.

....

6.6 b) Ici, le déterminant vaut $\Delta = 4(m^2 - 6m - 7)$, donc une racine évidente est -1 donc l'autre vaut 7. Pour $m = -1$ on trouve $x = -2$ et pour $m = 7$ on trouve $x = 2/3$.

....

6.8 a) Un trinôme est du signe du coefficient dominant à l'extérieur de l'intervalle des racines, et du signe opposé entre les racines. Ici, les racines sont $\sqrt{2}$ et 1, le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, 1[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$ et strictement négatif sur $]1, \sqrt{2}[$.

....

6.8 b) Les racines sont -5 et 3. Le trinôme est donc strictement négatif sur $]-\infty, -3[\cup]5, +\infty[$ et strictement positif sur $]-3, 5[$.

....

6.8 c) Ici, les racines sont -1 et $2/3$. Le trinôme est donc strictement positif sur $]-\infty, -1[\cup]2/3, +\infty[$ et strictement négatif sur $]-1, 2/3[$.

....

Fiche n° 7. Exponentielle et Logarithme

Réponses

7.1 a) .... $\boxed{4\ln(2)}$

7.1 b) .... $\boxed{9\ln(2)}$

7.1 c) .... $\boxed{-3\ln(2)}$

7.1 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln(2)}$

7.1 e) .... $\boxed{3\ln(2)}$

7.1 f) .... $\boxed{2\ln(2)+2\ln(3)}$

7.2 a) .... $\boxed{-\ln(3)-2\ln(2)}$

7.2 b) .... $\boxed{2\ln(3)-2\ln(2)}$

7.2 c) .... $\boxed{\ln(3)+11\ln(2)}$

7.2 d) .... $\boxed{3\ln(5)+2\ln(2)}$

7.2 e) .... $\boxed{-2\ln(5)+4\ln(2)}$

7.2 f) .... $\boxed{2\ln(5)-2\ln(2)}$

7.3 .... $\boxed{-2\ln(2)-2\ln(5)}$

7.4 a) .... $\boxed{8}$

7.4 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}}$

7.4 c) .... $\boxed{\frac{1}{3}}$

7.4 d) .... $\boxed{\frac{1}{9}}$

7.4 e) .... $\boxed{-\frac{1}{2}}$

7.4 f) .... $\boxed{\frac{3}{2}}$

7.5 a) .... $\boxed{-2}$

7.5 b) .... $\boxed{\frac{1}{\ln(2)}}$

7.5 c) .... $\boxed{-17}$

7.5 d) .... $\boxed{1}$

7.6 a) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.6 b) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.6 c) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.6 d) .... $\boxed{\text{impaire}}$

7.7 a) .... $\boxed{1}$

7.7 b) .... $\boxed{\text{-1}}$

7.8 a) .... $\boxed{x+\ln 2}$

7.8 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+x}}}$

7.8 c) .... $\boxed{\ln|x-1|}$

7.8 d) .... $\boxed{-\dfrac{1}{1+x}}$

7.9 a) .... $\boxed{x \geqslant \dfrac{\ln(12)+5}{3}}$

7.9 b) .... $\boxed{x \in [0,1]}$

7.9 c) .... $\boxed{x \geqslant \dfrac{2}{e}}$

7.9 d) .... $\boxed{x \geqslant -\dfrac{1}{12}}$

Corrigés

7.1 a) On a $16 = 4^2 = 2^4$ donc $\ln(16) = 4\ln(2)$.

7.1 c) On a $0{,}125 = \dfrac{1}{8}$ donc $\ln 0{,}125 = -\ln 8 = -3\ln 2$.

7.1 e) On a $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$ donc $\ln(72) - 2\ln(3) = (3\ln(2) + 2\ln(3)) - 2\ln(3) = 3\ln(2)$.

7.2 c) On a $0{,}875 = \dfrac{7}{8}$ donc

$$\begin{aligned}\ln(21) + 2\ln(14) - 3\ln(0{,}875) &= (\ln(3) + \ln(7)) + 2(\ln(2) + \ln(7)) - 3(\ln(7) - \ln(8)) \\ &= \ln(3) + 2\ln(3) + 3 \times 3\ln(2) = 3\ln(3) + 11\ln(2).\end{aligned}$$

7.3 On appelle A ce nombre. On a

$$A = (\ln(1) - \ln(2)) + (\ln(2) - \ln(3)) + \cdots + (\ln(98) - \ln(99)) + (\ln(99) - \ln(100))$$

donc en simplifiant les termes deux par deux finalement il reste $A = \ln 1 - \ln 100$, c'est-à-dire $A = -\ln 100$ où $100 = 2^2 \times 5^2$, d'où le résultat $A = -2(\ln 2 + \ln 5)$

On peut écrire plus rigoureusement ce calcul :

$$\begin{aligned} A &= \sum_{k=1}^{99} \ln\left(\frac{k}{k+1}\right) = \sum_{k=1}^{99} (\ln(k) - \ln(k+1)) \\ &= \sum_{k=1}^{99} \ln(k) - \sum_{k=1}^{99} \ln(k+1) = \sum_{k=1}^{99} \ln(k) - \sum_{j=2}^{100} \ln(j) \end{aligned}$$

en effectuant le changement d'indice $j = k+1$ d'où finalement $A = \ln(1) - \ln(100) = -2(\ln(2) + \ln(5))$.

7.5 b) On a $\mathrm{e}^{-\ln(\ln(2))} = \mathrm{e}^{(-1)\ln(\ln(2))} = (\ln(2))^{-1} = \dfrac{1}{\ln(2)}$.

7.6 a) f_1 est définie sur $]-2022, +2022[$ qui est symétrique par rapport à 0 et

$$\forall x \in]-2022, +2022[, \quad f(-x) = \ln\left(\frac{2022-x}{2022+x}\right) = \ln\left(\frac{1}{\frac{2022+x}{2022-x}}\right) = -\ln\left(\frac{2022+x}{2022-x}\right) = -f_1(x).$$

7.6 b) On a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant |x| < \sqrt{x^2+1}$ donc f_2 est définie sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a

$$\begin{aligned} f_2(-x) &= \ln\left(-x + \sqrt{(-x)^2+1}\right) \\ &= \ln\left(-x + \sqrt{x^2+1}\right) \\ &= \ln\left(\frac{(-x+\sqrt{x^2+1})(x+\sqrt{x^2+1})}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) \\ &= \ln\left(\frac{-x^2+(x^2+1)}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right) = -f_2(x). \end{aligned}$$

Fiche n° 8. Trigonométrie

Réponses

8.1 a) .... $\boxed{-\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

8.1 b) .... $\boxed{1}$

8.1 c) .... $\boxed{1}$

8.1 d) .... $\boxed{-1}$

8.1 e) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

8.1 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

8.2 a) .... $\boxed{0}$

8.2 b) .... $\boxed{0}$

8.2 c) .... $\boxed{-1-\sqrt{3}}$

8.2 d) .... $\boxed{1}$

8.2 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{2}}$

8.3 a) .... $\boxed{>0}$

8.3 b) .... $\boxed{<0}$

8.3 c) .... $\boxed{<0}$

8.3 d) .... $\boxed{<0}$

8.3 e) .... $\boxed{>0}$

8.3 f) .... $\boxed{>0}$

8.4 a) .... $\boxed{0}$

8.4 b) .... $\boxed{-\sin x}$

8.4 c) .... $\boxed{2\cos x}$

8.4 d) .... $\boxed{-2\cos x}$

8.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$

8.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

8.5 c) .... $\boxed{\sqrt{2}-1}$

8.6 a) .... $\boxed{\tan x}$

8.6 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{\cos(x)}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right\}}$

8.7 a) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{-2\pi}{3}, \dfrac{-\pi}{3}\right\}}$

8.7 b) .... $\boxed{\left\{\dfrac{4\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{3}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}\right\}}$

8.7 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{7\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{11\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right\}}$

8.7 d) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4} \dfrac{7\pi}{4}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{3\pi}{4}, -\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right\}}$

8.7 e) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{4}+k\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{-\dfrac{5\pi}{6}, -\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right\}}$

8.7 f) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\dfrac{5\pi}{6}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}}$

8.8 a) .... $\boxed{\left[0, \dfrac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\dfrac{5\pi}{4}, 2\pi\right]}$

8.8 a) .... $\boxed{\left[-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]}$

8.8 b) .... $\boxed{\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]}$

8.8 b) .... $\boxed{\left[-\pi, -\frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]}$

8.8 c) .... $\boxed{\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, 2\pi\right]}$

8.8 c) .... $\boxed{\left[-\pi, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]}$

8.8 d) .... $\boxed{\left[0, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}, 2\pi\right]}$

8.8 d) .... $\boxed{\left[-\pi, -\frac{5\pi}{6}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}, \pi\right]}$

8.8 e) .... $\boxed{\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[}$

8.8 e) .... $\boxed{\left[-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[}$

8.8 f) .... $\boxed{\left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]}$

8.8 f) .... $\boxed{\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]}$

Corrigés

8.5 a) On a $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$ donc $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}+1}{2} = \frac{\sqrt{2}+2}{4}$.

De plus, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

....

8.5 b) On a $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

....

8.5 c) $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{4-2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

....

8.6 a) On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ donc $\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)} = \frac{2\sin^2(x)}{2\sin x\cos(x)} = \tan(x)$.

....

8.6 b) $\frac{\cos(2x)}{\cos(x)} - \frac{\sin(2x)}{\sin(x)} = \frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cos(x)} - \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{\cos^2(x)-\sin^2(x)}{\cos(x)} - \frac{2\cos^2(x)}{\cos(x)} = -\frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos(x)}$

....

8.7 e) Cela revient à résoudre « $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ».

....

8.8 d) Cela revient à résoudre $-\frac{1}{2} \leqslant \sin(x) \leqslant \frac{1}{2}$.

....

8.8 f) Si $x \in [0, 2\pi]$, alors $t = x - \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$. On résout donc $\cos(t) \geqslant 0$ pour $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, 2\pi - \frac{\pi}{4}\right]$ ce qui donne $t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{7\pi}{4}\right]$ et donc $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

....

Fiche n° 9. Notation arccos, arcsin, arctan

Réponses

9.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

9.1 b) .... $\boxed{2}$

9.1 c) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

9.1 d) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{6}}$

9.1 e) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

9.1 f) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

9.2 a) .... $\boxed{0}$

9.2 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

9.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2}}$

9.2 d) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{3}}$

9.2 e) .... $\boxed{0}$

9.2 f) .... $\boxed{-\dfrac{\pi}{3}}$

9.3 a) .... $\boxed{1}$

9.3 b) .... $\boxed{\pi - 2}$

9.3 c) .... $\boxed{3}$

9.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{17}}$

9.3 e) .... $\boxed{3 - \pi}$

9.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{\pi}{7}}$

9.4 a) .... $\boxed{1}$

9.4 b) .... $\boxed{0}$

9.4 c) .... $\boxed{\left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}}$

9.4 d) .... $\boxed{\begin{array}{l}\left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\\ \cup\left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\end{array}}$

9.4 e) .... $\boxed{\begin{array}{l}\left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\\ \cup\left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}\end{array}}$

9.4 f) .... $\boxed{1}$

9.5 a) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{2}{1+4x^2}}$

9.5 b) .... $\boxed{x \longmapsto 0}$

9.5 c) .... $\boxed{x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}}$

Corrigés

9.1 b) On calcule : $\dfrac{\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}} = 2.$

9.1 c) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}\right) = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{\pi}{4}.$

9.1 d) On remarque que $\arctan\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \arctan\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \dfrac{\pi}{6}.$

9.1 f) On remarque que $\arccos\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\right) = \arccos\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{\pi}{3}.$

9.3 a) $1 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\arcsin(\sin(1)) = 1$

9.3 b) $\sin(2) = \sin(\pi - 2)$ et $\pi - 2 \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\arcsin(\sin(2)) = \pi - 2$

9.3 c) $3 \in [0; \pi]$ donc $\arccos(\cos(3)) = 3$

9.3 d) $\cos\left(-\dfrac{\pi}{17}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{17}\right)$ et $\dfrac{\pi}{17} \in [0;\pi]$ donc $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{17}\right)\right) = \dfrac{\pi}{17}$

9.3 e) $\tan(3) = \tan(3-\pi)$ et $3-\pi \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\arctan(\tan(3)) = 3-\pi$

9.3 f) $\tan\left(-\dfrac{8\pi}{7}\right) = \tan\left(-\dfrac{\pi}{7}\right)$ et $-\dfrac{\pi}{7} \in \left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$ donc $\arctan\left(\tan\left(-\dfrac{8\pi}{7}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{7}$

9.4 b) Soit $x \in [-1,1]$. Alors $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. Mais comme arccos est à valeurs dans $[0,\pi]$, $\cos(\arccos(x)) = 0 \Leftrightarrow \arccos(x) = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 0$.

9.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\arccos(\cos(x)) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 1 \Leftrightarrow x \in \{2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

9.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

9.4 e) Ici, pas besoin de connaître $\sin\left(\dfrac{1}{3}\right)$! Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors

$$\arcsin(\sin(x)) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin(x) = \sin\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow x \in \left\{\frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\pi - \frac{1}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

9.4 f) Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors $\tan(\arctan(x)) = 1 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = 1$.

Fiche n° 10. Dérivation

Réponses

10.1 a) $6x^2 + 2x - 11$

10.1 b) $5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$

10.1 c) $(2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)$

10.1 d) $(6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2 - x}{x-2}$

10.2 a) $5(x^2 - 5x)^4(2x-5)$

10.2 b) $4(2x^3 + 4x - 1)(3x^2 + 2)$

10.2 c) $8\cos^2(x) - 6\cos(x)\sin(x) - 4$

10.2 d) $-3(3\cos(x) - \sin(x))^2(3\sin(x) + \cos(x))$

10.3 a) $\dfrac{2x}{x^2+1}$

10.3 b) $\dfrac{1}{x\ln(x)}$

10.3 c) $(-2x^2 + 3x - 1)\exp(x^2 + x)$

10.3 d) $6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$

10.3 e) $\dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$

10.3 f) $\dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$

10.4 a) $\dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3) - (x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$

10.4 b) $\dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

10.4 c) $-2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1) + x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$

10.4 d) $\dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$

10.5 a) $2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

10.5 b) $\dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

10.5 c) $\dfrac{1}{1-x^2}$

10.5 d) $\dfrac{x\cos(x) - \sin(x)}{x\sin(x)}$

10.6 a) $\dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$

10.6 b) $\dfrac{2}{x+1}\left(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

10.6 c) $\dfrac{2x^2 + 2x + 5}{(x+2)(x-1)^2}$

10.6 d) $\dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

10.6 e) $\dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$

Corrigés

10.1 a) On calcule : $f'(x) = (2x+3)(2x-5) + (x^2+3x+2)\times 2 = 6x^2 + 2x - 11$.

10.1 b) On calcule : $f'(x) = (3x^2+3)(x^2-5) + (x^3+3x+2)\times 2x = 5x^4 - 6x^2 + 4x - 15$.

10.1 c) On calcule : $f'(x) = (2x-2)\exp(2x) + (x^2-2x+6)\times 2\exp(2x) = (2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)$.

10.1 d) On calcule : $f'(x) = (6x-1)\ln(x-2) + (3x^2 - x)\times\dfrac{1}{x-2} = (6x-1)\ln(x-2) + \dfrac{3x^2-x}{x-2}$.

10.2 a) On calcule : $f'(x) = 5(x^2-5x)^4(2x-5)$.

10.2 b) On calcule : $f'(x) = 2(2x^3+4x-1)(6x^2+4) = 4(2x^3+4x-1)(3x^2+2)$.

10.2 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(\sin(x)+2\cos(x))(\cos(x)-2\sin(x)) = 2(\sin(x)\cos(x)-2\sin^2(x)+2\cos^2(x)-4\cos(x)\sin(x) \\ &= -6\cos(x)\sin(x)-4\sin^2(x)+4\cos^2(x) = -6\cos(x)\sin(x)-4(1-\cos^2(x))+4\cos^2(x) \\ &= 8\cos^2(x)-6\cos(x)\sin(x)-4. \end{aligned}$$

10.2 d) On calcule : $f'(x) = 3(3\cos(x)-\sin(x))^2(-3\sin(x)-\cos(x)) = -3(3\cos(x)-\sin(x))^2(3\sin(x)+\cos(x))$. En développant, on trouve : $f'(x) = -54\cos^2(x)\sin(x)-78\cos^3(x)-9\sin(x)+51\cos(x)$.

10.3 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$. C'est une application directe de la formule de dérivation quand $f = \ln\circ u$.

10.3 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1/x}{\ln(x)} = \dfrac{1}{x\ln(x)}$.

10.3 c) On calcule :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (-1)\exp(x^2+x)+(2-x)\exp(x^2+x)\times(2x+1) = (-1+(2-x)(2x+1))\exp(x^2+x) \\ &= (-1+4x+2-2x^2-x)\exp(x^2+x) = (-2x^2+3x-1)\exp(x^2+x). \end{aligned}$$

10.3 d) On calcule : $f'(x) = \exp(3\sin(2x))(3\times 2\cos(2x)) = 6\cos(2x)\exp(3\sin(2x))$.

10.3 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin(x)}}\cos(x) = \dfrac{\cos(x)}{2\sqrt{\sin(x)}}$.

10.3 f) On calcule : $f'(x) = \cos(\sqrt{x})\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\cos(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$.

10.4 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(2x+3)(2\sin(x)+3)-(x^2+3x)\times 2\cos(x)}{(2\sin(x)+3)^2}$. En développant le numérateur, on trouve

$$f'(x) = \frac{-2x^2\cos(x)+4x\sin(x)-6x\cos(x)+6\sin(x)+6x+9}{(2\sin(x)+3)^2}.$$

10.4 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(3x+2)-\sqrt{x}\times 3}{(3x+2)^2} = \dfrac{\frac{3x+2}{2\sqrt{x}}-\frac{3\sqrt{x}\times 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(3x+2)^2} = \dfrac{3x+2-6x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2} = \dfrac{2-3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$

10.4 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-2\sin(2x+1)\times(x^2+1)-\cos(2x+1)\times 2x}{(x^2+1)^2} = -2\dfrac{(x^2+1)\sin(2x+1)+x\cos(2x+1)}{(x^2+1)^2}$.

10.4 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{(4x+3)\ln(x)-(2x^2+3x)\dfrac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \dfrac{(4x+3)\ln(x)-2x-3}{(\ln(x))^2}$

10.5 a) On calcule : $f'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)+x^2\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)\times\left(\dfrac{-1}{x^2}\right) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)-\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$

10.5 b) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\sqrt{9-x^2}-x\frac{1}{2\sqrt{9-x^2}}(-2x)}{\sqrt{9-x^2}^2} = \dfrac{\sqrt{9-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{\frac{9-x^2+x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2} = \dfrac{9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$

10.5 c) On a trois fonctions composées à la suite : $f = \ln(\sqrt{u})$). Donc on a, en appliquant deux fois la formule de dérivée d'une fonction composée : $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{u-x)}}\times u'(x)\times\dfrac{1}{\sqrt{u(x)}}$.

On calcule :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \times \frac{1(x-1)-(x+1)\times 1}{(x-1)^2} \times \frac{1}{\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}} \\
&= \frac{1}{2\times\dfrac{x+1}{x-1}} \times \frac{-2}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{-1}{x^2-1} = \frac{1}{1-x^2}.
\end{aligned}$$

10.5 d) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\cos(x)\times x - \sin(x)\times 1}{x^2} \times \dfrac{x}{\sin(x)} = \dfrac{x\cos(x)-\sin(x)}{x\sin(x)}$.

10.6 a) On calcule : $f'(x) = \dfrac{-(-1)}{(3-x)^2} + \dfrac{-1}{(2+x)^2} = \dfrac{(2+x)^2-(3-x)^2}{(3-x)^2(2+x)^2} = \dfrac{10x-5}{(3-x)^2(2+x)^2}$.

10.6 b) On calcule : $f'(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2x(x+1)-1}{x+1} = \dfrac{2x^2+2x-1}{x+1}$.

Pour le trinôme $2x^2+2x-1$, on calcule $\Delta = 4-4\times 2\times(-1) = 12$. On a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{12}}{2\times 2} = \frac{-2-2\sqrt{3}}{4} = \frac{-1-\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}.$$

Enfin, on a $f'(x) = \dfrac{2(x-\frac{-1-\sqrt{3}}{2})(x-\frac{-1+\sqrt{3}}{2})}{x+1} = \dfrac{2}{x+1}\left(x+\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x+\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

10.6 c) On calcule : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+2} - \dfrac{1\times(x-1)-(x+2)\times 1}{(x-1)^2} = \dfrac{2x+1}{x^2+x-2} + \dfrac{3}{(x-1)^2}$.

On cherche les racines du trinôme x^2+x-2 dont le discriminant est $\Delta = 1+8 = 9$; on identifie deux racines $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. D'où la forme factorisée : $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$.

Alors : $f'(x) = \dfrac{2x+1}{(x+2)(x-1)} + \dfrac{3}{(x-1)^2} = \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x+2)(x-1)^2} + \dfrac{3(x+2)}{(x+2)(x+1)^2} = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

Le trinôme $2x^2+2x+5$ dont le discriminant est $\Delta = 4-4\times 2\times 5 = -36 < 0$ ne se factorise pas dans $\mathbb{R}$.

On a : $f'(x) = \dfrac{2x^2+2x+5}{(x+2)(x-1)^2}$.

10.6 d) On calcule :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1\times(x+1)-x\times 1}{(x+1)^2} + 1 - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1}{(x+1)^2} + 1 - \frac{2}{x+1} = \frac{1+(x+1)^2-2(x+1)}{(x+1)^2} \\
&= \frac{1+x^2+2x+1-2x-2}{(x+1)^2} = \frac{x^2}{(x+1)^2}.
\end{aligned}$$

10.6 e) On calcule : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(1-\ln(x)) - (1+\ln(x))\frac{-1}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{1}{x} - \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{\frac{2}{x}}{(1-\ln(x))^2} = \dfrac{2}{x(1-\ln(x))^2}$.

Fiche nº 11. Primitives

Réponses

11.1 a) .... $\boxed{\ln|t+1|}$

11.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{3}{t+2}}$

11.1 c) .... $\boxed{-\dfrac{3}{2(t+2)^2}}$

11.1 d) .... $\boxed{-\dfrac{\cos(4t)}{4}}$

11.1 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{3}{4}t^{\frac{4}{3}}}$

11.1 f) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t+1}}$

11.2 a) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}\ln|1+t^3|}$

11.2 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}(1+2t^2)^{\frac{3}{2}}}$

11.2 c) .... $\boxed{-\sqrt{1-t^2}}$

11.2 d) .... $\boxed{\dfrac{3}{4}(1+7t^2)^{\frac{2}{3}}}$

11.2 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{6}\ln(1+3t^2)}$

11.2 f) .... $\boxed{-\dfrac{1}{(1+3t^2)^2}}$

11.3 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln^4(t)}$

11.3 b) .... $\boxed{2\sqrt{\ln(t)}}$

11.3 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{(3-\mathrm{e}^{2t})^2}}$

11.3 d) .... $\boxed{-\dfrac{2}{3t^{\frac{3}{2}}}}$

11.3 e) .... $\boxed{\ln|1-\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^t|}$

11.3 f) .... $\boxed{-\mathrm{e}^{\frac{1}{t}}}$

11.4 a) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}\cos^3(t)}$

11.4 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\sin(t)}}$

11.4 c) .... $\boxed{-\ln|\cos(t)|}$

11.4 d) .... $\boxed{-\ln|1-\sin(t)|}$

11.4 e) .... $\boxed{-2\cos(\sqrt{t})}$

11.4 f) .... $\boxed{\tan(t)-t}$

11.4 g) .... $\boxed{2\sqrt{\tan(t)}}$

11.4 h) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(1-\sin(t))^2}}$

11.4 i) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\mathrm{Arctan}(2t)}$

11.5 a) .... $\boxed{2(t-1) \text{ puis } \dfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 5t}$

11.5 b) .... $\boxed{-\dfrac{1}{t^2}\left(\dfrac{2}{t}+1\right) \text{ puis } -\dfrac{1}{t} + \ln|t|}$

11.5 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{t}} + \dfrac{3}{t^4} \text{ puis } \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \dfrac{1}{2t^2}}$

11.5 d) .... $\boxed{-\dfrac{4}{t^5} - \dfrac{3}{2}\dfrac{1}{t^{5/2}} \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{t^3} - \dfrac{2}{\sqrt{t}}}$

11.5 e) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{2t} - 3\mathrm{e}^{-3t} \text{ puis } \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-3t}}$

11.5 f) .... $\boxed{3\mathrm{e}^{3t-2} \text{ puis } \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3t-2}}$

11.5 g) .... $\boxed{\cos t(3\cos^2(t)-2) \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\cos^3(t)}$

11.5 h) .... $\boxed{-\dfrac{2t\sin(\frac{1}{t})+\cos(\frac{1}{t})}{t^4} \text{ puis } \cos(\dfrac{1}{t})}$

11.5 i) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^t}{(2+\mathrm{e}^t)^2} \text{ puis } \ln(2+\mathrm{e}^t)}$

11.5 j) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^t(1-\mathrm{e}^{2t})}{(2+\mathrm{e}^t)^2} \text{ puis } \arctan(\mathrm{e}^t)}$

11.5 k) .... $\boxed{\dfrac{2\cos t + 3}{(2+3\cos t)^2} \text{ puis } -\dfrac{1}{3}\ln|2+3\cos t|}$

11.5 l) .... $\boxed{\dfrac{1}{(1-t^2)^{3/2}} \text{ puis } -\sqrt{1-t^2}}$

11.5 m) .... $\boxed{(1-2t^2)\mathrm{e}^{-t^2} \text{ puis } -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}}$

11.5 n) .... $\boxed{\dfrac{\ln(t)-2}{t^2} \text{ puis } \ln(t) - \dfrac{1}{2}\ln^2(t)}$

11.5 o) .... $\boxed{-\dfrac{1+\ln(t)}{t^2\ln^2(t)} \text{ puis } \ln|\ln(t)|}$

11.5 p) .... $\boxed{\dfrac{\cos\ln(t) - \sin\ln(t)}{t^2} \text{ puis } -\cos(\ln(t)))}$

Corrigés

11.1 a) Admet des primitives sur $]-\infty,-1[$ ou $]-1,+\infty[$.

....

11.1 b) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

....

11.1 c) Admet des primitives sur $]-\infty,-2[$ ou $]-2,+\infty[$.

....

11.1 d) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

....

11.1 e) Admet des primitives sur $]0,+\infty[$.

....

11.1 f) Admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

....

11.4 f) $\tan^2(\theta) = (1+\tan^2\theta) - 1$,

donc $t \longmapsto \tan(t) - t$ est un primitive de $\tan^2$ sur tout intervalle inclus dans $D_{\tan}$

....

Fiche n° 12. Calcul d'intégrales

Réponses

12.1 a) .... $\boxed{\text{Positif}}$

12.1 b) .... $\boxed{\text{Négatif}}$

12.1 c) .... $\boxed{\text{Positif}}$

12.2 a) .... $\boxed{14}$

12.2 b) .... $\boxed{50}$

12.2 c) .... $\boxed{\dfrac{147}{2}}$

12.2 d) .... $\boxed{-54}$

12.2 e) .... $\boxed{0}$

12.2 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

12.3 a) .... $\boxed{8}$

12.3 b) .... $\boxed{-2}$

12.3 c) .... $\boxed{\dfrac{8}{3}}$

12.3 d) .... $\boxed{0}$

12.3 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{30}}$

12.3 f) .... $\boxed{-\dfrac{2}{101}}$

12.4 a) .... $\boxed{0}$

12.4 b) .... $\boxed{1}$

12.4 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

12.4 d) .... $\boxed{18}$

12.4 e) ...... $\boxed{e^2 - e^{-3}}$

12.4 f) .... $\boxed{-\ln 3}$

12.5 a) .... $\boxed{78}$

12.5 b) ..... $\boxed{2(e^3-1)}$

12.5 c) . $\boxed{\dfrac{1}{\pi}\ln\left(1+\dfrac{\pi}{2}\right)}$

12.5 d) .... $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}}{6}}$

12.5 e) .... $\boxed{6}$

12.5 f) ...... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$

12.6 a) .... $\boxed{0}$

12.6 b) .... $\boxed{0}$

12.6 c) ..... $\boxed{\ln\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)}$

12.6 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{384}}$

12.6 e) ... $\boxed{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{e}\right)}$

12.6 f) .... $\boxed{\dfrac{7}{48}}$

12.7 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{e+1}}$

12.7 b) .... $\boxed{\dfrac{17}{2}}$

12.7 c) .... $\boxed{e^2}$

12.7 d) .... $\boxed{3e-4}$

12.7 e) .... $\boxed{-\dfrac{1}{3}}$

12.7 f) .... $\boxed{\dfrac{5}{8}}$

12.8 a) .... $\boxed{0}$

12.8 b) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

12.8 c) .... $\boxed{\dfrac{99}{\ln 10}}$

12.8 d) .... $\boxed{\dfrac{e-\frac{1}{e}}{2}}$

12.8 e) .... $\boxed{\dfrac{2}{3}}$

12.8 f) .... $\boxed{\dfrac{2\pi}{9}}$

Corrigés

12.1 a) On intègre une fonction positive et les bornes sont « dans le bon sens ».

12.1 b) $\displaystyle\int_5^{-3} |\sin(7x)|\,dx = -\int_{-3}^{5} |\sin(7x)|\,dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. Elle est positive car on intègre une fonction positive.

12.1 c) $\displaystyle\int_0^{-1} \sin(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} \sin(x)\,dx$. Cette dernière intégrale a ses bornes « dans le bon sens », on peut l'interpréter comme une aire. sin est négative sur $[-\pi, 0]$ donc sur $[-1, 0]$, $\displaystyle\int_{-1}^{0} \sin x\,dx$ est donc négative.

12.2 a) Il s'agit de l'aire d'un rectangle de largeur 2 et de longueur 7.

12.2 b) On commence par mettre les bornes « dans le bon sens » : $\displaystyle\int_7^{-3} -5\,dx = -\int_{-3}^{7} -5\,dx = \int_{-3}^{7} 5\,dx$. Cette dernière intégrale est l'aire d'un rectangle dont les côtés mesurent 10 et 5.

12.2 c) Il s'agit de l'aire du triangle dont les sommets sont l'origine O, le point $A(7;0)$ et $B(7;21)$. Ce triangle est rectangle en A et son aire est $\dfrac{1}{2} \times AO \times AB$.

12.2 d) Les bornes sont « dans le bon sens », on peut donc interpréter l'intégrale comme une aire algébrique. Sur l'intervalle $[2, 8]$, la courbe de $f(x) = 1 - 2x$ est située sous l'axe des abscisses, l'aire algébrique sera négative.

Il s'agit de calculer l'aire du trapèze rectangle dont les sommets sont $A(2;0)$, $B(8;0)$, $C(8;-15)$ et $D(2;-3)$. L'aire de ce trapèze rectangle est $\dfrac{1}{2}\times AB\times(AD+BC)=\dfrac{1}{2}\times 6\times(3+15)$.

12.2 e) Avec la relation de Chasles, on a $\displaystyle\int_{-2}^{2}\sin(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-2}^{0}\sin(x)\,\mathrm{d}x+\int_{0}^{2}\sin(x)\,\mathrm{d}x$.La fonction sinus étant impaire, les aires algébriques $\displaystyle\int_{-2}^{0}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{0}^{2}\sin(x)\,\mathrm{d}x$ sont opposées, il suit que leur somme est nulle.

12.2 f) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique. Cette aire est composée de deux triangles rectangles (les intégrales de -2 à 0 et de 0 à 1).

12.3 a) Les bornes étant « dans le bon sens », on interprète cette intégrale comme une aire algébrique d'un rectangle.

12.3 b) $\displaystyle\int_{1}^{3}(2x-5)\,\mathrm{d}x=\Big[x^2-5x\Big]_1^3=(3^2-15)-(1^2-5)=-2.$

12.3 c) $\displaystyle\int_{-2}^{0}x^2+x+1\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{-2}^{0}=0-\left(\frac{1}{3}(-2)^3+\frac{1}{2}(-2)^2-2\right)=\frac{8}{3}.$

12.3 d) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

12.3 e) $\displaystyle\int_{0}^{1}x^5-x^4\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{6}x^6-\frac{1}{5}x^5\right]_0^1=\frac{1}{6}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{30}.$

12.3 f) $\displaystyle\int_{1}^{-1}x^{100}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{101}x^{101}\right]_1^{-1}=-\frac{2}{101}.$

12.4 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

12.4 b) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\cos x\,\mathrm{d}x=\Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=1.$

12.4 c) $\displaystyle\int_{1}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}.$

12.4 d) $\displaystyle\int_{1}^{100}\frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\Big[2\sqrt{x}\Big]_1^{100}=18.$

12.4 e) $\displaystyle\int_{-3}^{2}\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\Big[\mathrm{e}^x\Big]_{-3}^{2}=\mathrm{e}^2-\mathrm{e}^{-3}.$

12.4 f) $\displaystyle\int_{-3}^{-1}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\Big[\ln|x|\Big]_{-3}^{-1}=-\ln 3.$

12.5 a) $\displaystyle\int_{-1}^{2}(2x+1)^3\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{8}(2x+1)^4\right]_{-1}^{2}=\frac{625}{8}-\frac{1}{8}=78.$

12.5 b) $\displaystyle\int_{-2}^{4}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\,\mathrm{d}x=\Big[2\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x+1}\Big]_{-2}^{4}=2(\mathrm{e}^3-1).$

12.5 c) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\pi x+2}=\left[\frac{1}{\pi}\ln|\pi x+2|\right]_0^1=\frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{\pi+2}{2}\right).$

12.5 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}\sin(3x)\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{3}\cos(3x)\right]_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{3}\frac{\sqrt{2}}{2}.$

12.5 e) $\displaystyle\int_0^{33} \frac{1}{\sqrt{3x+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\sqrt{3x+1}\right]_0^{33} = \frac{2}{3}(10-1) = 6.$

12.5 f) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\mathrm{d}x = \left[-\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right]_{-\pi}^{\frac{\pi}{2}} = -\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$

12.6 a) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x-2}{x^2-4x+5}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5)\right]_1^3 = 0.$

12.6 b) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

12.6 c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \tan x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin x}{\cos x}x\,\mathrm{d}x = \Big[-\ln(\cos x)\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\ln\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

12.6 d) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin(x)(\cos(x))^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}(\cos(x))^6\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^6.$

12.6 e) $\displaystyle\int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right).$

12.6 f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\frac{-1}{3}\frac{1}{(x^2+1)^3}\right]_0^1 = \frac{7}{48}.$

12.7 a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\right]_0^1 = -\frac{1}{\mathrm{e}+1} + \frac{1}{2}.$

12.7 b) $x+1$ est négatif sur $[-2,-1]$ et positif sur $[-1,3]$. On en déduit : $\displaystyle\int_{-2}^3 |x+1|\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{-1} -x-1\,\mathrm{d}x + \int_{-1}^3 x+1\,\mathrm{d}x.$
Ces deux intégrales se calculent avec des primitives ou en les interprétant comme des aires de triangles.

12.7 c) $\displaystyle\int_{-1}^2 \max(1,\mathrm{e}^x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^2.$

12.7 d) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{3x-2\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 3\int_1^{\mathrm{e}} \mathrm{d}x - 2\int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 3(\mathrm{e}-1) - 2\left[\frac{1}{2}(\ln(x))^2\right]_1^{\mathrm{e}} = 3\mathrm{e}-4.$

12.7 e) On calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\cos^2(x)-1)\sin(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{2}{3}\Big[\cos^3(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \Big[\cos(x)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

12.7 f) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\cos x\sin x|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\frac{1}{2}\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x$. Le signe de $\sin(2x)$ est négatif sur $\left[-\frac{\pi}{3},0\right]$ et positif sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, il suit que

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(2x)|\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\pi}{3}}^0 -\sin(2x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_{-\frac{\pi}{3}}^0 - \frac{1}{2}\Big[\cos(2x)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{5}{4}.$$

12.8 a) La fonction intégrée est impaire, son intégrale sur un segment symétrique par rapport à 0 est donc nulle.

12.8 b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \Big[\mathrm{Arctan}(x)\Big]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

12.8 c) $\displaystyle\int_0^2 10^x\,\mathrm{d}x = \int_0^2 \mathrm{e}^{x\ln 10}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{\ln 10}\mathrm{e}^{x\ln 10}\right]_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{2\ln 10}-1}{\ln 10} = \frac{99}{\ln 10}.$

12.8 d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e} - \frac{1}{\mathrm{e}}}{2}$.

12.8 e) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

12.8 f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{2}{1+9x^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{1+(3x)^2}\,\mathrm{d}x = 2\left[\frac{1}{3}\mathrm{Arctan}(3x)\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2}{3}\mathrm{Arctan}(\sqrt{3}) = \frac{2\pi}{9}$.

Fiche n° 13. Intégration par parties

Réponses

13.1 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{2} - 1}$

13.1 b) .... $\boxed{-\dfrac{5}{2}\cos(2) - \dfrac{1}{2}\sin(2) + \dfrac{3}{2}}$

13.1 c) .... $\boxed{4}$

13.1 d) .... $\boxed{\dfrac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2^{\ln(2)} + 2}{(\ln(2))^2}}$

13.1 e) .... $\boxed{1}$

13.1 f) .... $\boxed{2\ln 2 - \dfrac{3}{4}}$

13.1 g) .... $\boxed{\ln(2) - 2 + \dfrac{\pi}{2}}$

13.1 h) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}}$

13.1 i) .... $\boxed{-\dfrac{2\sqrt{2}}{3} + \dfrac{4}{3}}$

13.1 j) .... $\boxed{\dfrac{4\sqrt{2}}{3} - \dfrac{16\sqrt{2}}{15}}$

13.1 k) .... $\boxed{\dfrac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \dfrac{8}{9}\sqrt{2} + \dfrac{4}{9}}$

13.1 l) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\ln 2 - \dfrac{\pi^2}{32}}$

13.2 a) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x \end{cases}}$

13.2 b) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -\dfrac{1+\ln x}{x} \end{cases}}$

13.2 c) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\arctan(x) - \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2) \end{cases}}$

13.2 d) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\sin(x) + \cos(x) \end{cases}}$

13.3 a) .... $\boxed{\dfrac{5}{2} - \mathrm{e}^2}$

13.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1}{2}}$

13.4 a) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -(x^2+2x+2)e^{-x} \end{cases}}$

13.4 b) ....

$\boxed{\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2 \end{cases}}$

13.4 c) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x \end{cases}}$

13.4 d) .... $\boxed{\begin{cases} \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3\left(\dfrac{1}{3}\ln^2 x - \dfrac{2}{9}\ln x + \dfrac{2}{27}\right) \end{cases}}$

Corrigés

13.1 a) On choisit $u'(t) = \cos t$ et $v(t) = t$. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\cos t \,\mathrm{d}t = [t\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} - 1.$

13.1 b) On choisit $u'(t) = \sin(2t)$ et $v(t) = 2t + 3$.

$$\int_0^1 (2t+3)\sin(2t)\,\mathrm{d}t = \left[(2t+3)\frac{-\cos(2t)}{2}\right]_0^1 + \int_0^1 \cos(2t)\,\mathrm{d}t = -\frac{5}{2}\cos(2) + \frac{3}{2} + \frac{\sin(2)}{2}$$

13.1 c) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}$.

$$\int_0^2 t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = \left[2t\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2 - 2\int_0^2 \mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t = 4e - 4\left[\mathrm{e}^{\frac{t}{2}}\right]_0^2 = 4$$

13.1 d) On choisit $v(t) = t$ et $u'(t) = 2^t$.

$$\int_1^{\ln(2)} t2^t\,\mathrm{d}t = \int_1^{\ln(2)} t\mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t = \left[t\frac{1}{\ln(2)}2^t\right]_1^{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(2)}\int_1^{\ln(2)} \mathrm{e}^{t\ln(2)}\,\mathrm{d}t = 2^{\ln(2)} - \frac{2}{\ln(2)} - \frac{1}{(\ln(2))^2}[2^t]_1^{\ln(2)} = \frac{(\ln(2))^2 2^{\ln(2)} - 2\ln(2) - 2}{(\ln(2))^2}$$

13.1 e) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$. $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \ln t \,\mathrm{d}t = [t\ln t]_1^{\mathrm{e}} - \int_1^{\mathrm{e}} 1 \,\mathrm{d}t = \mathrm{e} - (\mathrm{e}-1) = 1.$

13.1 f) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \ln t$.

$$\int_1^2 t\ln t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^2 \ln t\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}t \,\mathrm{d}t = 2\ln 2 - \frac{1}{4}\left[t^2\right]_1^2 = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$$

13.1 g) On choisit $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln(1+t^2)$.

$$\int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t = \left[t\ln(1+t^2)\right]_0^1 - 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \ln(2) - 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \ln 2 - 2[t - \arctan(t)]_0^1 = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}$$

13.1 h) On choisit $u'(t) = t$ et $v(t) = \arctan t$. On a

$$\int_0^1 t\arctan t \,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\arctan t\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2}\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$$

13.1 i) On choisit $u'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $v(t) = t$.

$$\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t}}\,\mathrm{d}t = \left[2t\sqrt{1+t}\right]_0^1 - 2\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{2} - \frac{4}{3}\left[(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = -\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{4}{3}$$

13.1 j) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = t$.

$$\int_0^1 t\sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}t(1+t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 (1+t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{15}\left[(1+t)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{16\sqrt{2}}{15}$$

13.1 k) On choisit $u'(t) = \sqrt{1+t}$ et $v(t) = \ln(1+t)$. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t}\ln(1+t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+t)^{\frac{3}{2}}\ln(1+t)\right]_0^1 - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{1+t}\,\mathrm{d}t =$ $\displaystyle\frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}(1+t))^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\ln(2) - \frac{8}{9}\sqrt{2} + \frac{4}{9}.$

13.1 l) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} t\tan^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\left(1+\tan^2 t\right)\mathrm{d}t - \int_0^{\frac{\pi}{4}} t\,\mathrm{d}t$. On choisit dans la première intégrale, $v(t) = t$ et $u'(t) = 1+\tan^2 t$. On obtient $\displaystyle[t\tan t]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t\,\mathrm{d}t - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + [\ln\cos(t)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{\pi^2}{32}.$

13.2 a) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x \in \mathbb{R}$, en choisissant $u'(t) = \mathrm{e}^t$ et $v(t) = -t+1$, on a $\displaystyle\int_0^x (-t+1)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \left[(-t+1)\mathrm{e}^t\right]_0^x + \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = (-x+1)\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x - 2$. Ainsi, $x \mapsto (-x+2)\mathrm{e}^x$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto (-x+1)\mathrm{e}^x$.

13.2 b) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, y est continue et admet donc des primitives. Soit $x > 0$, par intégration par parties avec $u'(t) = \dfrac{1}{t^2}$ et $v(t) = \ln t$, on a $\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\ln t}{t}\right]_1^x + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + 1$. Ainsi, $x \mapsto -\dfrac{\ln x + 1}{x}$ est donc une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de f

13.2 c) La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et y est continue. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \arctan t$, $\displaystyle\int_0^x \arctan(t)\,\mathrm{d}t = [t\arctan t]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$. D'où une primitive.

13.2 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$, on a, en choisissant $v(t) = t$ et $u'(t) = \cos t$, $\displaystyle\int_0^x t\cos(t)\,\mathrm{d}t = [t\sin(t)]_0^x - \int_0^x \sin(t)\,\mathrm{d}t = x\sin(x) + \cos(x) - 1$. D'où une primitive.

13.3 a) On effectue deux intégrations par parties successives : pour la première, $u'(t) = \mathrm{e}^{2t}$ et $v(t) = t^2+3t-4$ et ainsi $\displaystyle\int_0^1 (t^2+3t-4)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \left[(t^2+3t-4)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t$. Puis, seconde intégration par parties avec, $v(t) = 2t+3$ et $u'(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{2t}}{2}$ d'où :$\displaystyle -\int_0^1 (2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{2}\,\mathrm{d}t = 2 - \left[(2t+3)\frac{\mathrm{e}^{2t}}{4}\right]_0^1 + \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t = \frac{11}{4} - \frac{5}{4}\mathrm{e}^2 + \frac{1}{4}\left[\mathrm{e}^{2t}\right]_0^1 = \frac{5}{2} - \mathrm{e}^2$.

....

13.3 b) On choisit d'abord $u' = \exp$ et $v = \sin$; d'où : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t = \left[\mathrm{e}^t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \cos t\,\mathrm{d}t$. Ensuite $u' = \exp$ et $v = \cos$, d'où : $\displaystyle\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\mathrm{e}^t \cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t$. Finalement, $\displaystyle 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^t \sin t\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}} + 1$.

....

13.4 a) On effectue deux intégrations par parties successives (toutes les fonctions utilisées sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$) pour déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

On commence par choisir $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = t^2$ cela donne $\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \left[-t^2\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x + 2\int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Puis, on choisit $u'(t) = \mathrm{e}^{-t}$ et $v(t) = t$, ce qui donne $\displaystyle -x^2\mathrm{e}^{-x} + 2\left[-t\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x + 2\int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} + 2$.

....

13.4 b) On effectue deux intégrations par parties successives pour déterminer, pour $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x t^2 \sin(t)\,\mathrm{d}t$. On commence par choisir $u'(t) = \sin(t)$ et $v(t) = t^2$ cela donne $\displaystyle\int_0^x t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t = \left[-t^2\cos(t)\right]_0^x + \int_0^x 2t\cos(t)\,\mathrm{d}t$. Puis, on choisit $u'(t) = \cos(t)$ et $v(t) = 2t$, ce qui donne $\displaystyle -x^2\cos(x) + [2t\sin(t)]_0^x - \int_0^x 2\sin(t)\,\mathrm{d}t$. Finalement, $\displaystyle\int_0^x t^2\sin(t)\,\mathrm{d}t = -x^2\cos(x) + 2x\sin(x) + 2\cos(x) - 2$.

....

13.4 c) Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue. Soit $x > 0$, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln^2 t$ on obtient $\displaystyle\int_1^x \ln^2 t\,\mathrm{d}t = \left[t\ln^2 t\right]_1^x - \int_1^x 2\ln t\,\mathrm{d}t$. Puis, en choisissant $u'(t) = 1$ et $v(t) = \ln t$, on obtient $\displaystyle x\ln^2 x - 2[t\ln t]_1^x + 2\int_1^x 1\,\mathrm{d}t = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x - 2$. Ainsi, $x \mapsto x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$ est une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \ln^2 x$.

....

13.4 d) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Si $x > 0$, alors, avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln^2(t)$, on a : $\displaystyle\int_1^x t^2\ln^2 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{3}\ln^2 t\right]_1^x - \frac{2}{3}\int_1^x t^2\ln t\,\mathrm{d}t$ puis avec $u'(t) = t^2$ et $v(t) = \ln(t)$, on obtient $\displaystyle\frac{x^3}{3}\ln^2 x - \frac{2}{9}\left[t^3\ln t\right]_1^x + \frac{2}{9}\int_1^x t^2\,\mathrm{d}t = \frac{x^3\ln^2 x}{3} - \frac{2}{9}x^3\ln x + \frac{2}{27}(x^3-1)$. D'où une primitive.

....

Fiche n° 14. Changements de variable

Réponses

14.1 a) .... $\boxed{\frac{\pi}{2}}$

14.1 b) .... $\boxed{\frac{\pi}{6}}$

14.1 c) .... $\boxed{\ln(\sqrt{2}+1)}$

14.1 d) .... $\boxed{\frac{1}{4}}$

14.1 e) .... $\boxed{\frac{1}{12}}$

14.1 f) .... $\boxed{2\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$

14.2 a) .... $\boxed{\frac{\pi}{3\sqrt{3}}}$

14.2 b) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)}$

14.2 c) .... $\boxed{\frac{1}{4}+\frac{\pi}{8}}$

14.2 d) .... $\boxed{\frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}}$

14.3 a) .... $\boxed{2\mathrm{e}^2}$

14.3 b) .... $\boxed{-2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1)-4+2\sqrt{3}}$

14.4 a) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \left]0,\frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x)+\ln(\tan(x)) \end{array}\right.}$

14.4 b) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2\arctan\left(\sqrt{\mathrm{e}^x-1}\right) \end{array}\right.}$

14.4 c) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}}+1) \end{array}\right.}$

14.4 d) .... $\boxed{\left\{\begin{array}{ccc}]1,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan\sqrt{x^2-1} \end{array}\right.}$

Corrigés

14.1 a) On pose $t=\sin\theta$ avec $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$. On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}=\cos\theta$ et donc

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2\theta)+1}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

....

14.1 b) On pose $u=\sqrt{t}$ avec $t\in[1,3]$, donc $t=u^2$ et $u\in\left[1,\sqrt{3}\right]$. On a $\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}=2u$ et donc $dt=2udu$. Ainsi,

$$\int_1^3\frac{1}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}\,\mathrm{d}t=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{2u}{u+u^3}\,\mathrm{d}u=2\Big[\arctan u\Big]_1^{\sqrt{3}}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{6}.$$

....

14.1 c) On pose $u=\sin t$ avec $t\in[0,\frac{\pi}{4}]$, On a $\mathrm{d}u=\cos t\,\mathrm{d}t$. On obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{1-u}+\frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u=\frac{1}{2}[-\ln(1-u)+\ln(1+u)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}=\ln(\sqrt{2}+1)$$

....

14.1 d) On pose $u=\sin t$ avec $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. On a $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\cos t$ et donc $\mathrm{d}u=\cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $\int_0^1 u^3\,\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t$.
Finalement, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cos t\,\mathrm{d}t=\left[\frac{1}{4}u^4\right]_0^1=\frac{1}{4}.$$

....

14.1 e) Remarquons qu'on a $\cos^3 t = (1-\sin^2 t)\cos t$. On pose $u = \sin t$ avec $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \cos t$ donc $\mathrm{d}u = \cos t\,\mathrm{d}t$. Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 u^3(1-u^2)\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cos^3 t\,\mathrm{d}t$. Finalement,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t\cos^3 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{4}u^4 - \frac{1}{6}u^6\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}.$$

14.1 f) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc $t = u^2$ et $u \in [1,2]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$.

Ainsi, $\displaystyle\int_1^4 \frac{1}{t+\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{2u}{u^2+u}\,\mathrm{d}u = 2\int_1^2 \frac{1}{1+u}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\ln(1+u)\Big]_1^2 = 2(\ln(3)-\ln(2))$.

14.2 a) On pose $u = \cos t$ avec $t \in [0,\pi]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\sin t$. Ainsi, $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{3+u^2}\,\mathrm{d}u = \int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$ et finalement,

$$\int_0^\pi \frac{\sin t}{3+\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{3}\int_{-1}^1 \frac{1}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan\frac{u}{\sqrt{3}}\right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

14.2 b) On pose $u = \mathrm{e}^t$ avec $t \in [0,1]$, donc $t = \ln u$ et $u \in [1,\mathrm{e}]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{1}{u}$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{u}\,\mathrm{d}u$.

Finalement, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2+\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2+\frac{1}{u}}\frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{1}{2u+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(2u+1)\right]_1^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{2\mathrm{e}+1}{3}\right)$.

14.2 c) On pose $t = \tan u$ avec $u \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = (1+\tan^2 u)$.

Ainsi, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 u}\,\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 u\mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2u)+1}{2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}$.

14.2 d) On pose $u = \ln(t)$ avec $t \in [\mathrm{e},\ \mathrm{e}^2]$, donc $t = \mathrm{e}^u$ et $u \in [1,2]$. On a $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \mathrm{e}^u$ et

$$\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\ln t}{t+t\ln^2 t}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \frac{u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\right]_1^2 = \frac{1}{2}\ln\frac{5}{2}.$$

14.3 a) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [1,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [1,2]$.

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\displaystyle\int_1^4 \mathrm{e}^{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u$. Cette nouvelle intégrale peut se calculer en faisant une intégration par parties. On trouve : $\displaystyle\int_1^2 2u\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = \Big[2u\mathrm{e}^u\Big]_1^2 - \int_1^2 2\mathrm{e}^u\,\mathrm{d}u = 2\mathrm{e}^2$.

14.3 b) On pose $u = \sqrt{t}$ avec $t \in [3,4]$, donc on a $t = u^2$ avec $u \in [\sqrt{3},2]$.

On a alors $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 2u$ d'où $\displaystyle\int_3^4 \frac{\ln\left(\sqrt{t}-1\right)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{3}}^2 \frac{\ln(u-1)}{u}2u\,\mathrm{d}u = 2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u$.

On fait maintenant une intégration par parties :

$$2\int_{\sqrt{3}}^2 \ln(u-1)\,\mathrm{d}u = 2\Big[(u-1)\ln(u-1)\Big]_{\sqrt{3}}^2 - 2\int_{\sqrt{3}}^2 \mathrm{d}u = -2((\sqrt{3}-1)\ln(\sqrt{3}-1) - 4 + 2\sqrt{3}.$$

14.4 a) La fonction est bien continue. Soit $(a,x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[^2$.

On calcule $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos(t)+\sin(t)}{\sin(t)\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$ qui est aussi $\displaystyle\int_a^x \frac{1+\frac{\sin(t)}{\cos(t)}}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t$ en posant $u = \tan(t)$.

On a $\dfrac{1}{\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u$ et, ainsi, $\displaystyle\int_a^x \frac{\cos(t)+\sin(t)}{\sin(t)\cos^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{\tan a}^{\tan x}\left(1+\frac{1}{u}\right)\mathrm{d}u = \Big[u+\ln(u)\Big]_{\tan(a)}^{\tan(x)} = \tan(x)+\ln(\tan(x))+C.$

14.4 b) La fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et y est continue.

Avec le changement de variable $u = \sqrt{\mathrm{e}^t - 1}$, on a $t = \ln(1+u^2)$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{2u}{1+u^2}$.

Soit $x > 0$. On a ainsi $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^t-1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} \frac{1}{u}\frac{2u}{1+u^2}\,\mathrm{d}u = 2\Big[\arctan u\Big]_{\sqrt{\mathrm{e}-1}}^{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}} = 2\arctan(\sqrt{\mathrm{e}^x-1})+C.$

14.4 c) La fonction est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Le changement de variable $u = \sqrt[3]{t}$ donne $t = u^3$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = 3u^2$. Soit $x > 0$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t+\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u^2}{u^3+u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{\sqrt[3]{x}} \frac{3u}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \left[\frac{3}{2}\ln(u^2+1)\right]_1^{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\ln(x^{\frac{2}{3}}+1)+C.$$

14.4 d) La fonction est définie et continue sur $]1,+\infty[$.

Le changement de variable $u = \sqrt{t^2-1}$ donne $t = \sqrt{u^2+1}$ et ainsi, $\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u} = \dfrac{u}{\sqrt{u^2+1}}$. Soit $a > 1$ et $x > 1$. On a

$$\int_a^x t\frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}\,\mathrm{d}t = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u\sqrt{u^2+1}}\frac{u}{\sqrt{u^2+1}}\,\mathrm{d}u = \int_{\sqrt{a^2-1}}^{\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = \arctan\sqrt{x^2-1}+C.$$

Fiche n° 15. Intégration des fractions rationnelles

Réponses

15.1 a) .... $\boxed{\ln\left(\dfrac{3}{2}\right)}$

15.1 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{5}{3}\right)}$

15.2 a)................ $\boxed{2\ln\dfrac{9}{10}}$

15.2 b) .... $\boxed{\ln(a+1)}$

15.3 a) .... $\boxed{\ln\left(\dfrac{7}{3}\right)}$

15.3 b) .... $\boxed{\ln\dfrac{33}{28}}$

15.4 a) .... $\boxed{\ln\left(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}$

15.4 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{a+1}{2}\right)}$

15.5 a).................. $\boxed{1 \text{ et } 2}$

15.5 b) ...... $\boxed{A=-1 \text{ et } B=1}$

15.5 c) .... $\boxed{2\ln\dfrac{4}{3}}$

15.6 a) .... $\boxed{\ln\dfrac{1}{3}}$

15.6 b).................. $\boxed{2\ln\dfrac{4}{3}}$

15.6 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{3}{2}}$

15.6 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1}{5}}$

15.7 .... $\boxed{\dfrac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right)}$

15.8 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{a}\arctan\left(\dfrac{x}{a}\right)}$

15.9 a) .... $\boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

15.9 b)................... $\boxed{\dfrac{\pi}{6\sqrt{3}}}$

15.9 c)................... $\boxed{\dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}}$

15.10 a)........ $\boxed{\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}}$

15.10 b) ...... $\boxed{2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{1}{8}}$

15.10 c) .. $\boxed{\sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\sqrt{2}\dfrac{15}{16}}$

15.10 d)..... $\boxed{a\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{3a^3}{4}}$

15.11 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}}$

15.11 b) .... $\boxed{\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

15.11 c)................. $\boxed{\dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}}$

15.11 d) .... $\boxed{\ln(2)}$

Corrigés

15.1 a) La fonction $t \longmapsto 1/(t+1)$ est bien définie et continue sur $[1,2]$. Une primitive de cette fonction est la fonction $t \longmapsto \ln(t+1)$. D'où le calcul :

$$\int_1^2 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+1)\Big]_1^2 = \ln(3)-\ln(2).$$

Enfin, on remarque que $\ln(3)-\ln(2) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

....

15.1 b) On procède comme précédemment mais on remarque qu'une primitive de $t \longmapsto 1/(2t+1)$ est $t \longmapsto \dfrac{\ln(2t+1)}{2}$: attention à ne pas oublier le facteur $1/2$! On calcule ensuite :

$$\int_1^2 \frac{1}{2t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\ln(2t+1)}{2}\right]_1^2 = \frac{\ln(5)-\ln(3)}{2} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{5}{3}\right).$$

....

15.2 a) On commence par simplifier l'expression intégrée. Pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{t+\frac{1}{2}},$$

en multipliant « en haut et en bas » par 2. Donc, on a

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{\frac{t}{2}+\frac{1}{4}}\,\mathrm{d}t &= 2\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\ln\big(t+\tfrac{1}{2}\big)\Big]_{\frac{1}{8}}^{\frac{1}{16}} \\ &= 2\Big(\ln\frac{9}{16}-\ln\frac{5}{8}\Big) = 2\ln\frac{9\times 8}{5\times 16} = 2\ln\frac{9}{10}.\end{aligned}$$

Le résultat est < 0 puisque $9/10 < 1$.

C'est cohérent car on intègre une fonction $\geqslant 0$ entre $\frac{1}{8}$ et $\frac{1}{16}$, donc « à rebours ».

15.2 b) On calcule :

$$\int_0^{a^2} \frac{1}{t+a}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t+a)\Big]_0^{a^2} = \ln(a+a^2)-\ln(a) = \ln\big(a(a+1)\big)-\ln(a) = \ln(a+1).$$

15.3 a) On remarque que le numérateur est exactement la dérivée du dénominateur. On a donc

$$\int_1^2 \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(t^2+t+1)\Big]_1^2 = \ln(7)-\ln(3) = \ln\Big(\frac{7}{3}\Big).$$

15.3 b) On multiplie en haut et en bas par 2. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{t}{\frac{t^2}{2}+\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} \frac{2t}{t^2+\frac{2}{3}}\,\mathrm{d}t &= \Big[\ln\Big(t^2+\frac{2}{3}\Big)\Big]_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} = \ln\frac{11}{12}-\ln\frac{7}{9} \\ &= \ln\Big(\frac{11\times 9}{12\times 7}\Big) = \ln\frac{33}{28}.\end{aligned}$$

15.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{t+\frac{1}{\sqrt{2}}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_1^{\sqrt{2}} \frac{2t+\sqrt{2}}{t^2+\sqrt{2}t}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t^2+\sqrt{2}t)\Big]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\big(\ln(4)-\ln(1+\sqrt{2})\big) \\ &= \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{4}{1+\sqrt{2}}\Big) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{4(\sqrt{2}-1)}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}\Big) = \frac{1}{2}\ln\big(4(\sqrt{2}-1)\big) \\ &= \ln\Big(2\sqrt{\sqrt{2}-1}\Big).\end{aligned}$$

15.4 b) On force à apparaître au numérateur la dérivée du dénominateur. On calcule :

$$\begin{aligned}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{t}{at^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2a}\int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \frac{2at}{at^2+1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2a}\Big[\ln(at^2+1)\Big]_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{1} \\ &= \frac{1}{2a}\big(\ln(a+1)-\ln(2)\big) = \frac{1}{2a}\ln\Big(\frac{a+1}{2}\Big).\end{aligned}$$

15.5 b) Supposons que A et B soient trouvés. En particulier, pour t convenable, on a

$$\frac{1}{t-2} = A + \frac{B(t-1)}{t-2}.$$

Cette égalité est encore valable pour $t = 1$ (par exemple par continuité). En évaluant en $t = 1$, on trouve $A = -1$.
De même, on trouve $B = 1$.

15.5 c) D'après ce qui précède, on a

$$\begin{aligned}\int_3^4 \frac{2}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t &= 2\int_3^4 \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t = 2\int_3^4 \frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\Big[\ln(t-2) - \ln(t-1)\Big]_3^4 = 2\Big[\ln\Big(\frac{t-2}{t-1}\Big)\Big]_3^4 \\ &= 2\Big(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\Big) = 2\Big(\ln\frac{2}{3} + \ln(2)\Big) = 2\ln\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

15.6 a) Soit $t \in [0,1]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-4} = \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\Big).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^1 \frac{4}{t^2-4}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \Big(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\Big)\,\mathrm{d}t = \Big[\ln(2-t) - \ln(2+t)\Big]_0^1 = \Big[\ln\Big(\frac{2-t}{2+t}\Big)\Big]_0^1 = \ln\frac{1}{3}.$$

15.6 b) Soit $t \in [2,3]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{t^2-t} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}.$$

Donc, on calcule

$$\int_2^3 \frac{2}{t^2-t}\,\mathrm{d}t = 2\int_2^3 \Big(\frac{1}{t-1} - \frac{1}{t}\Big)\,\mathrm{d}t = 2\Big[\ln(t-1) - \ln(t)\Big]_2^3 = 2\Big[\ln\Big(\frac{t-1}{t}\Big)\Big]_2^3 = 2\Big(\ln\frac{2}{3} - \ln\frac{1}{2}\Big) = 2\ln\frac{4}{3}.$$

15.6 c) Soit $t \in [0,1]$. Déjà, on a $t^2+4t+3 = (t+1)(t+3)$ et

$$\frac{1}{(t+1)(t+3)} = \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\Big).$$

Donc, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{t^2+4t+3}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t+3}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\Big[\ln(t+1) - \ln(t+3)\Big]_0^1 = \frac{1}{2}\Big[\ln\Big(\frac{t+1}{t+3}\Big)\Big]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}\Big(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3}\Big) = \frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.\end{aligned}$$

15.6 d) Soit $t \in [0, \frac{1}{3}]$. Déjà, on a

$$\frac{1}{4t^2-1} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right).$$

Puis, on calcule

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{1}{4t^2-1}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t+\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{4}\Big[\ln(\tfrac{1}{2}-t) - \ln(t+\tfrac{1}{2})\Big]_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{t+\frac{1}{2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{3}} \\ &= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1/6}{5/6}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{1}{5}.\end{aligned}$$

15.7 Déjà, on remarque que, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{t^2-a} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left(\frac{1}{t-\sqrt{a}} - \frac{1}{t+\sqrt{a}}\right).$$

Donc, on calcule

$$\int_0^a \frac{1}{t^2-a}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\sqrt{a}}\Big[\ln(\sqrt{a}-t) + \ln(t+\sqrt{a})\Big]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\left[\ln\left(\frac{\sqrt{a}-t}{t+\sqrt{a}}\right)\right]_0^a = \frac{1}{2\sqrt{a}}\ln\left(\frac{\sqrt{a}-a}{a+\sqrt{a}}\right).$$

15.8 a) $\displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2+a^2} = \int_0^{\frac{x}{a}} \frac{a\,\mathrm{d}u}{a^2(u^2+1)} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$

15.9 a) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \Big[\arctan(t)\Big]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \frac{\pi}{4}.$$

15.9 b) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^2+3}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan(0)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}.$$

15.9 c) On a

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)\right]_{-1}^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\sqrt{2}\right) - \arctan\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan\left(\sqrt{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right).\end{aligned}$$

Or, on sait (c'est un exercice « classique ») que $\forall x > 0,\ \arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$. Donc, on a

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{t^2+2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

15.10 a) On force le terme en x à apparaître comme le second membre du développement d'une identité remarquable $(x+a)^2$, où a est à déterminer. Puis, on force à apparaître le troisième terme de l'identité remarquable (ici, a^2), qu'on ajoute-soustrait. On trouve :

$$\begin{aligned}x^2+x+1 &= x^2 + (2\times\frac{1}{2}\times x) + 1 \\ &= x^2 + (2\times\frac{1}{2}\times x) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 \\ &= \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

15.10 b) On procède comme précédemment mais on commencer par factoriser par 2. On trouve :

$$\begin{aligned}2x^2-3x+1 &= 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\times x + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(x^2 - 2\times\frac{3}{4}\times x + \left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{2}\right) \\ &= 2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right) = 2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{8}. \qquad \left(\text{car } \tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{16} = -\tfrac{1}{16}\right)\end{aligned}$$

15.10 c) On trouve $\sqrt{2}x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(x+\frac{1}{4}\right)^2 + \sqrt{2}\dfrac{15}{16}$.

15.10 d) On trouve

$$ax^2 + a^2x + a^3 = a\left(x^2+ax\right) + a^3 = a\left(\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}\right) + a^3 = a\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + \frac{3a^3}{4}.$$

15.11 a) On calcule

$$\int_0^1 \frac{1}{1+2t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{1+t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

15.11 b) Déjà, on a, si $t \in \mathbb{R}$: $t^2+t+1 = \left(t+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$. Donc, on calcule

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{1+t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0} \frac{1}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta \qquad \text{(en posant } \theta = t+\tfrac{1}{2}\text{)}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\arctan\left(\frac{2\theta}{\sqrt{3}}\right)\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - \arctan\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}} \times \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}\times 6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

15.11 c) On a

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{1-t+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{1} \frac{1}{(t-1/2)^2+\frac{3}{4}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= 2\int_{0}^{1/2} \frac{1}{\theta^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\left[\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right]_0^{1/2} \qquad \text{(avec } a = \tfrac{\sqrt{3}}{2}\text{)}$$

$$= \frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

15.11 d) Déjà, on a $6t^2-5t+1 = 6\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)$, pour $t \in \mathbb{R}$. Donc,

$$\int_{0}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}\int_{0}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)}\,\mathrm{d}t.$$

Or, pour $t \in \mathbb{R}$ convenable, on a

$$\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{3}\right)} = 6\left(\frac{1}{t-\frac{1}{2}} - \frac{1}{t-\frac{1}{3}}\right).$$

Donc,

$$\int_{0}^{\frac{1}{4}} \frac{1}{6t^2-5t+1}\,\mathrm{d}t = \left[\ln\left(\tfrac{1}{2}-t\right) - \ln\left(\tfrac{1}{3}-t\right)\right]_0^{\frac{1}{4}} = \left[\ln\left(\frac{\frac{1}{2}-t}{\frac{1}{3}-t}\right)\right]_0^{\frac{1}{4}}$$

$$= \ln\left(\frac{1/4}{1/12}\right) - \ln\left(\frac{1/2}{1/3}\right) = \ln(3) - \ln(3/2) = \ln(2).$$

Fiche n° 16. Systèmes linéaires

Réponses

16.1 a) $\{(3,1)\}$

16.1 b) $\{(7,2)\}$

16.1 c) $\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)\right\}$

16.1 d) $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$

16.2 a) $\left\{\left(1-\frac{a}{4},\frac{-1}{2}+\frac{3}{8}a\right)\right\}$

16.2 b) $(2,-3)$

16.2 c) $\left\{\left(\frac{1}{13}a+\frac{5}{13}a^2,\frac{2}{13}a-\frac{3}{13}a^2\right)\right\}$

16.2 d) $(a-2a^2,a+a^2)$

16.3 a) $\{(1+z,-z,z); z\in\mathbb{R}\}$

16.3 b) $\{(1,y,3+2y); y\in\mathbb{R}\}$

16.3 c) $\left\{\left(\frac{13}{6}-\frac{5}{3}z,-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}z,z\right); z\in\mathbb{R}\right\}$

16.3 d) $\left\{\left(x,\frac{-5}{12}-\frac{3}{2}x,\frac{-25}{24}-\frac{7}{4}x\right); x\in\mathbb{R}\right\}$

16.4 a) $\{(2,-1,3)\}$

16.4 b) $\{(-1,4,2)\}$

16.4 c) $\varnothing$

16.4 d) $\left\{\left(-\frac{2}{7}-z,\frac{-3}{7},z\right) ; z\in\mathbb{R}\right\}$

16.5 a) $\left\{\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$

16.5 b) $\varnothing$

16.5 c) $\{(5z,1-4z,z) ; z\in\mathbb{R}\}$

16.5 d) $\left\{\left(1,\frac{1}{a+2},\frac{1}{a+2}\right)\right\}$

16.6 a) $\{(5,3,-1)\}$

16.6 b) $\varnothing$

16.6 c) $\left\{\left(\frac{a^2+a-1}{a^3-1}c,\frac{a^2-a-1}{a^3-1}c,\frac{-a^2+a+1}{a^3-1}c\right)\right\}$

16.7 a) $\{(0,0,0)\}$

16.7 b) $\{(x,y,-x-y) ; (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

16.7 c) $\{(z,z,z) ; z\in\mathbb{R}\}$

Corrigés

16.1 a)

$$\begin{cases} x-2y=1\\ 3x+4y=13\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y=1\\ 10y=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2\times 1\\ y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1\\ x=3\end{cases}$$

16.1 b) $\begin{cases} 2x+y=16\\ x-y=5\end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x=21\\ x-y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7\\ y=7-5=2\end{cases}$

16.1 c) $\begin{cases} 3x-6y=-3\\ 2x+2y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=-1\\ x+\ y=1\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x-2y=-1\\ 3y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1+2\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\\ y=\frac{2}{3}\end{cases}$

16.1 d)

$$\begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2}\\ 6x+2y=3\sqrt{2}\end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x-4y=-\sqrt{2}\\ 10y=5\sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x=4\times\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{3}\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

16.2 a) $\begin{cases} 3x+2y=2 \\ 2x+4y=a \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 3x+2y=2 \\ -4x=a-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\dfrac{3}{2}x \\ x=1-\dfrac{a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{a}{4} \\ y=1-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{8}a=\dfrac{-1}{2}+\dfrac{3}{8}a \end{cases}$

16.2 b)

$$\begin{cases} x-ay=3a+2 \\ ax+y=2a-3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-aL_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x\ -\ ay=3a+2 \\ (a^2+1)y=-3-3a^2 \end{cases} \underset{1+a^2\neq 0}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x=-3a+3a+2=2 \\ y=-3 \end{cases}$$

16.2 c)

$$\begin{cases} 3x+5y=a \\ 2x-y=a^2 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow 5L_2+L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 13x\quad =a+5a^2 \\ 2x-y=a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2 \\ y=2x-a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2 \\ y=2\times\left(\dfrac{1}{13}a+\dfrac{5}{13}a^2\right)-a^2=\dfrac{2}{13}a-\dfrac{3}{13}a^2 \end{cases}$$

16.2 d)

$$\begin{cases} x+2y=3a \\ 2x+3y=5a-a^2 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-2L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y=3a \\ -y=-a^2-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3a-2(a+a^2)=a-2a^2 \\ y=a+a^2 \end{cases}$$

16.3 a) $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y+z=1 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=1-z \\ y=-z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+z \\ y=-z \end{cases}$

16.3 b) $\begin{cases} 3x-2y+z=6 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \underset{L_1\leftarrow L_1+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 4x=4 \\ x+2y-z=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ 2y-z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ z=2y+3 \end{cases}$

16.3 c)

$$\begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ x+2y-z=\dfrac{3}{2} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x-y+3z=\dfrac{5}{2} \\ 3y-4z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z-3z+\dfrac{5}{2} \\ y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{13}{6}-\dfrac{5}{3}z \\ y=\dfrac{-1}{3}+\dfrac{4}{3}z \end{cases}$$

16.3 d)

$$\begin{cases} 5x+y+2z=-\dfrac{5}{2} \\ 2x-y+2z=-\dfrac{5}{3} \end{cases} \underset{L_2\leftarrow L_2+L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 5x+y+2z=-\dfrac{5}{2} \\ 7x\quad+\quad 4z=-\dfrac{25}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+2z=-\dfrac{5}{2}-5x \\ 4z=-\dfrac{25}{6}-7x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{5}{2}-5x+\dfrac{25}{12}+\dfrac{7}{2}x=\dfrac{-5}{12}-\dfrac{3}{2}x \\ z=\dfrac{-25}{24}-\dfrac{7}{4}x \end{cases}$$

16.4 a)

$$\begin{cases} x+2y-z=-3 \\ 2x-y+z=8 \\ 3x+y+2z=11 \end{cases} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-3L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ -5y+5z=20 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow L_3-L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x+2y-z=-3 \\ -5y+3z=14 \\ 2z=6 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+2y-3=-3 \\ -5y+3\times 3=14 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2y=0 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \\ z=3 \end{cases}$$

16.4 b)

$$\begin{cases} a-b-c=-7 \\ 3a+2b-c=3 \\ 4a+b+2c=4 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-4L_1}}{\iff} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 5b+6c=32 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3-L_2}{\iff} \begin{cases} a-b-c=-7 \\ 5b+2c=24 \\ 4c=8 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a-b-2=-7 \\ 5b+2\times 2=24 \\ c=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-5+4=-1 \\ b=4 \\ c=2 \end{cases}$$

16.4 c) $$\begin{cases} x+3y+z=1 \\ 2x-y+2z=-1 \\ x+10y+z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 7y=-1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} x+3y+z=1 \\ -7y=-3 \\ 0=-4 \end{cases}.$$

Le système est incompatible.

16.4 d) On va extraire y de la deuxième équation, puis résoudre par substitution.

$$\begin{cases} 3x+2y+3z=0 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 4x+5y+4z=1 \end{cases} \underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1+2L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3+5L_2}}{\iff} \begin{cases} 7x + \quad 7z=-2 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 14x + \quad 14z=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x + \quad 7z=-2 \\ 2x-y+2z=-1 \\ 0=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-z-\dfrac{2}{7} \\ y=2x+2z+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-z-\dfrac{2}{7} \\ y=-2z-\dfrac{4}{7}+2z+1=\dfrac{3}{7} \end{cases}$$

16.5 a)

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y=2 \\ 2x+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+z=1 \\ -2y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+2L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+z=1 \\ 6z=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \\ z=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

16.5 b)

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y-2z=2 \\ 2x-2y+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ -4y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+4L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y-z=1 \\ 0=5 \end{cases}$$

Le système est incompatible.

16.5 c)

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+3z=2 \\ 2x+3y+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=1 \\ y+4z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-(1-4z)+z+1 \ = \ 5z \\ y=1-4z \end{cases}.$$

16.5 d)

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ x+2y+az=2 \\ 2x+ay+2z=3 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (a-2)y+4z=1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+(2-a)L_2}{\iff} \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+(2-a)(a+1))z=3-a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (4+a+2-a^2)z=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{cases}$$

On factorise le trinôme $-(a^2-a-6)=-(a+2)(a-3)$ qui est non nul dans le cas étudié.

D'où : $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+(a+1)z=1 \\ (-a^2+a+6)z=3-a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y+z \\ y=1-(a+1)\times\dfrac{1}{a+2} \\ z=\dfrac{3-a}{-(a+2)(a-3)}=\dfrac{1}{a+2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-\dfrac{1}{a+2}+\dfrac{1}{a+2}=1 \\ y=\dfrac{a+2-a-1}{a+2}=\dfrac{1}{a+2} \\ z=\dfrac{1}{a+2} \end{cases}$

16.6 a)

$$\begin{cases} x \quad - \quad 2z=7 \\ 2x-y \quad =7 \\ \quad 2y-z=7 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2-2L_1}{\iff} \begin{cases} x \quad - \quad 2z=7 \\ -y+4z-7 \\ 2y-z=7 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+2L_2}{\iff} \begin{cases} x \quad - \quad 2z=7 \\ -y+4z-7 \\ -7z=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+2z \\ y=7+4z \\ z=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=3 \\ z=-1 \end{cases}$$

16.6 b)

$$\begin{cases} x-z=2 \\ x-y=2 \\ y-z=2 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_1-L_2}{\iff} \begin{cases} x \quad - \quad z=2 \\ y-z=0 \\ y-z=2 \end{cases}$$

Le système est incompatible.

16.6 c)

$$\begin{cases} x \quad -az=c \\ ax-y \quad =c \\ ay-z=c \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2-aL_1}{\iff} \begin{cases} x \quad - \quad az=c \\ -y+a^2z=(1-a)c \\ ay \ - \ z=c \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3+aL_2}{\iff} \begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{cases}$$

a est un réel différent de 1 donc $a^3-1\neq 0$, on peut déterminer z dans la troisième équation.

$$\begin{cases} x=c+az \\ y=(a-1)c+a^2z \\ (a^3-1)z=(1+a-a^2)c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=c\dfrac{-a^2+a+1}{(a-1)(a^2+a+1}=\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c \\ y=(a-1)c+a^2\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2-a+1}{a^3-1}c \\ x=c+a\dfrac{-a^2+a+1}{a^3-1}c=\dfrac{a^2+a-1}{a^3-1}c \end{cases}$$

16.7 a)

$$\begin{cases} 4x+y+z=x \\ x+4y+z=y \\ x+y+4z=z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow \frac{1}{5}(L_1+L_2+L_3)}{\iff} \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+3y+z=0 \\ x+y+3z=0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2y=0 \\ 2z=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=y=z=0$$

16.7 b)

$$\begin{cases} 4x+y+z=3x \\ x+4y+z=3y \\ x+y+4z=3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \\ x+y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow z=-x-y$$

16.7 c)

$$\begin{cases} 4x+y+z=6x \\ x+4y+z=6y \\ x+y+4z=6z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+y+z=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \underset{L_1 \leftarrow L_1+L_2+L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} 0=0 \\ x-2y+z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3y-3z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=z \\ y=z \end{cases}$$

Fiche n° 17. Nombres complexes

Réponses

17.1 a) .... $\boxed{4+32\mathrm{i}}$

17.1 b) .... $\boxed{13-\mathrm{i}}$

17.1 c) .... $\boxed{7-24\mathrm{i}}$

17.1 d) .... $\boxed{5}$

17.1 e) .. $\boxed{-119+120\mathrm{i}}$

17.1 f) ..... $\boxed{\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}}$

17.1 g) ..... $\boxed{\dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}}$

17.1 h) ..... $\boxed{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}}$

17.2 a) .... $\boxed{12}$

17.2 b) .... $\boxed{8\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}}$

17.2 c) .... $\boxed{\sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

17.2 d) .... $\boxed{2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}}$

17.2 e) .... $\boxed{2e^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}}$

17.2 f) .... $\boxed{5\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$

17.2 g) ...... $\boxed{10\mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}}$

17.2 h) $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

17.3 a) .... $\boxed{\{-i,i\}}$

17.3 b) ... $\boxed{\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\}}$

17.3 c) $\boxed{\{1+\mathrm{i},-1-\mathrm{i}\}}$

17.3 d) .... $\boxed{\{1-2\mathrm{i},-1+2\mathrm{i}\}}$

17.4 a) .... $\boxed{1}$

17.4 b) ... $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

17.4 c) .. $\boxed{-\dfrac{1}{\sqrt{2}}-\mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}}$

Corrigés

17.1 a) On développe : $(2+6\mathrm{i})(5+\mathrm{i}) = 10+2\mathrm{i}+30\mathrm{i}+6\mathrm{i}^2 = 10+32\mathrm{i}-6 = 4+32\mathrm{i}$.

17.1 b) On développe : $(3-\mathrm{i})(4+\mathrm{i}) = 12+3\mathrm{i}-4\mathrm{i}-\mathrm{i}^2 = 12-\mathrm{i}+1 = 13-\mathrm{i}$.

17.1 c) On développe : $(4-3\mathrm{i})^2 = 4^2-2\times4\times3\mathrm{i}+(3\mathrm{i})^2 = 16-24\mathrm{i}-9 = 7-24\mathrm{i}$

17.1 d) On développe : $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2-(2\mathrm{i})^2 = 1+4 = 5$.

Ou bien : en posant $z = 1-2\mathrm{i}$, on reconnaît la quantité $z\bar{z}$, c'est-à-dire $|z|^2$. Ainsi, $(1-2\mathrm{i})(1+2\mathrm{i}) = 1^2+2^2 = 5$.

17.1 e) On développe :

$(2-3\mathrm{i})^4 = \left((2-3\mathrm{i})^2\right)^2 = (4-2\times2\times3\mathrm{i}-9)^2 = (-5-12\mathrm{i})^2 = (5+12\mathrm{i})^2 = 5^2+2\times5\times12\mathrm{i}-12^2 = -119+120\mathrm{i}$.
Ou bien : avec la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(2-3\mathrm{i})^4 &= \sum_{k=0}^{4}\binom{4}{k}2^k(-3\mathrm{i})^{4-k}\\ &= (-3\mathrm{i})^4+4\times2\times(-3\mathrm{i})^3+6\times2^2\times(-3\mathrm{i})^2+4\times2^3\times(-3\mathrm{i})+2^4\\ &= 81+216i-216-96\mathrm{i}+16 = -119+120\mathrm{i}.\end{aligned}$$

17.1 f) On utilise l'expression conjuguée : $\dfrac{1}{3-\mathrm{i}} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{(3-\mathrm{i})(3+\mathrm{i})} = \dfrac{3+\mathrm{i}}{3^2+1^2} = \dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{10}\mathrm{i}$

17.1 g) On utilise l'expression conjuguée et on développe :

$\dfrac{2-3\mathrm{i}}{5+2\mathrm{i}} = \dfrac{(2-3\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})}{(5+2\mathrm{i})(5-2\mathrm{i})} = \dfrac{10-4\mathrm{i}-15\mathrm{i}-6}{5^2+2^2} = \dfrac{4}{29}-\dfrac{19}{29}\mathrm{i}$.

17.1 h) On utilise la définition de l'écriture exponentielle et la trigonométrie :

$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

17.2 a) On a $|12| = 12$ et $\arg(12) = 0$, donc la réponse est 12 (ou $12\mathrm{e}^{0\mathrm{i}}$).

17.2 b) On a $|-8| = 8$ et $-1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$.

17.2 c) On a $|\sqrt{3}\mathrm{i}| = \sqrt{3}$ et $\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

17.2 d) On a $|-2\mathrm{i}| = 2$ et $-\mathrm{i} = \bar{\mathrm{i}} = \overline{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$.

17.2 e) On écrit que $-2 = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$ et on utilise les propriétés de l'exponentielle :

$-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi+\mathrm{i}\frac{3\pi}{5}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{8\pi}{5}}$.

17.2 f) On calcule $|5-5\mathrm{i}| = \sqrt{5^2+5^2} = \sqrt{2\times 5^2} = 5\sqrt{2}$ et on écrit

$5-5\mathrm{i} = 5\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \mathrm{i}\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 5\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} - \mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$.

17.2 g) On calcule $|-5+5\mathrm{i}\sqrt{3}| = \sqrt{25+75} = 10$ puis on écrit

$-5+5\mathrm{i}\sqrt{3} = 10\left(-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10\left(\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + \mathrm{i}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right)$.

17.2 h) On écrit que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\right) = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right| = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (car $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) \geqslant 0$ et $\left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right| = 1$. Et $\arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}) = \arg(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}) = \dfrac{\pi}{4}$.

On en déduit que l'écriture exponentielle de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ est $2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

17.3 a) $x^2 = -1 \iff x^2 = i^2 \iff (x-i)(x+i) = 0 \iff x = i$ ou $x = -i$

17.3 b) $x^2 = 2 \iff x^2 - 2 = 0 \iff (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0 \iff x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

17.3 c) $x^2 = 2\mathrm{i} \iff x^2 - 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = 0 \iff x^2 - \left(\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right) = 0 \iff (x - \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}})(x + \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}) = 0$

$\iff x = \sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ ou $x = -\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \iff x = 1+i$ ou $x = -1-i$

17.3 d) On cherche $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $(a+\mathrm{i}b)^2 = 3-4\mathrm{i}$ ce qui équivaut à : $a^2 - b^2 = 3$, $2ab = -4$ et $a^2+b^2 = 5$

ce système a deux solutions $(a,b) = (1,-2)$ et $(a,b) = (-1,2)$

17.4 a) On remarque que le dénominateur de z est le conjugué du numérateur. Ainsi, $|z| = 1$.

17.4 b) De plus, en multipliant par le conjugué, on obtient

$$
\begin{aligned}
z &= \frac{(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})^2}{(1+\sqrt{2}-\mathrm{i})(1+\sqrt{2}+\mathrm{i})} = \frac{(1+\sqrt{2})^2 + 2(1+\sqrt{2})\mathrm{i} - 1}{(1+\sqrt{2})^2+1} \\
&= \frac{1+2\sqrt{2}+2+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}-1}{1+2\sqrt{2}+2+1} = \frac{2+2\sqrt{2}+2(1+\sqrt{2})\mathrm{i}}{4+2\sqrt{2}} \\
&= \frac{2(1+\sqrt{2})(1+\mathrm{i})}{2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i},
\end{aligned}
$$

17.4 c) Enfin, $z = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, donc $z^{2021} = \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^{2021} = \mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi}$.

Comme $2021 = 4\times 505 + 1$, on a $\mathrm{e}^{\frac{2021}{4}\mathrm{i}\pi} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi + \frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{505\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}} = -\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$.

Fiche n° 18. Trigonométrie et nombres complexes

Réponses

18.1 a) ...... $\boxed{\dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos(x)}$

18.1 b) ...... $\boxed{-\dfrac{1}{4}\cos(4x)+\dfrac{1}{2}\cos(2x)-\dfrac{1}{4}}$

18.1 c) ...... $\boxed{-\dfrac{1}{8}\cos(6x)+\dfrac{1}{4}\cos(4x)-\dfrac{3}{8}\cos(2x)+\dfrac{1}{4}}$

18.1 d) ...... $\boxed{-\dfrac{\sin(9x)}{8}+\dfrac{3\sin(5x)}{8}-\dfrac{\sin(3x)}{8}-\dfrac{3\sin(x)}{8}}$

18.1 e) ...... $\boxed{\dfrac{\cos(9x)}{8}+\dfrac{3\cos(5x)}{8}+\dfrac{\cos(3x)}{8}+\dfrac{3\cos(x)}{8}}$

18.1 f) ...... $\boxed{-\dfrac{1}{4}\sin(11x)+\dfrac{1}{4}\sin(5x)+\dfrac{1}{2}\sin(3x)}$

18.2 a) ...... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}}$

18.2 b) ...... $\boxed{\left(-2\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$

18.2 c) ...... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{-7\mathrm{i}\pi}{12}}}$

18.2 d) ...... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{12}}}$

18.2 e) ...... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{13\pi}{12}}}$

18.2 f) ...... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{24}\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{11\pi}{24}}}$

18.2 g) ...... $\boxed{\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)}\mathrm{e}^{\frac{13\mathrm{i}\pi}{24}}}$

18.2 h) ...... $\boxed{2^{27}\cos^{27}\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}$

18.3 a) ...... $\boxed{2\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{12}}}$

18.3 b) ...... $\boxed{2\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{11\pi}{12}}}$

18.4 a) ...... $\boxed{4\cos^3(x)-3\cos(x)}$

18.4 b) ...... $\boxed{4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x)}$

18.5 a) ...... $\boxed{2\cos(2x)\cos(x)}$

18.5 b) ...... $\boxed{2\cos(4x)\sin(x)}$

18.5 c) ...... $\boxed{2\sin(x)\sin(2x)}$

18.5 d) ...... $\boxed{2\sin(4x)\cos(x)}$

18.6 a) ...... $\boxed{\dfrac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}}$

18.6 b) ...... $\boxed{\dfrac{\sin(8x)}{2\sin(x)}}$

18.6 c) ...... $\boxed{0}$

Corrigés

18.1 a) On calcule :

$$\cos^3(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2}\right)^3=\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+3\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)=\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}x}\right)+\frac{3}{8}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}\right)$$
$$=\frac{1}{4}\cos(3x)+\frac{3}{4}\cos x.$$

18.1 b) On calcule :

$$\cos(2x)\sin^2(x)=\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}}{2}\right)\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}\right)^2=-\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}-2+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)$$
$$=-\frac{1}{8}\left(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}x}-2\left(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x}\right)+2\right)=-\frac{1}{4}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)-\frac{1}{4}.$$

18.1 d) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x)\sin^3(2x) &= \left(\frac{e^{3ix}+e^{-3ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{2ix}-e^{-2ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{16i}\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)\left(e^{6ix}-3e^{2ix}+3e^{-2ix}-e^{-6ix}\right)\\ &= -\frac{1}{16i}\left(e^{9ix}-e^{-9ix}-3(e^{5ix}-e^{-5ix})+e^{3ix}-e^{-3ix}+3(e^{ix}-e^{-ix})\right)\\ &= -\frac{1}{8}\sin(9x)+\frac{3}{8}\sin(5x)-\frac{1}{8}\sin(3x)-\frac{3}{8}\sin(x).\end{aligned}$$

18.2 a) $1+e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-\frac{i\pi}{12}}+e^{\frac{i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0} e^{i\frac{\pi}{12}}$.

18.2 b) $1+e^{i\frac{7\pi}{6}} = e^{\frac{7i\pi}{12}}\left(e^{-\frac{7i\pi}{12}}+e^{\frac{7i\pi}{12}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)}_{<0} e^{\frac{7i\pi}{12}} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{\frac{7i\pi}{12}}e^{-i\pi} = \left(-2\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)e^{-i\frac{5\pi}{12}}$.

18.2 c) $e^{-i\frac{\pi}{6}}-1 = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}-e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{12}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-i\frac{\pi}{12}-i\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{-\frac{7i\pi}{12}}$.

18.2 d) $1+ie^{i\frac{\pi}{3}} = 1+e^{i\frac{5\pi}{6}} = e^{\frac{5i\pi}{12}}2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = 2\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)e^{\frac{5i\pi}{12}}$

18.2 e) $-1-e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{i\frac{\pi}{12}}\left(e^{-i\frac{\pi}{12}}+e^{i\frac{\pi}{12}}\right) = \underbrace{-2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{<0} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}+i\pi} = 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{13\pi}{12}}$.

18.2 f) $1-e^{i\frac{\pi}{12}} = e^{i\frac{\pi}{24}}\left(-2i\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{i\frac{\pi}{24}}e^{-i\frac{\pi}{2}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{24}\right)e^{-i\frac{11\pi}{24}}$.

18.2 g) On fait le quotient de a) et f).

18.2 h) $\left(1+e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^{27} = \left(2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{27} = 2^{27}\cos^{27}\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{i\frac{\pi}{4}}$.

18.3 a) $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}+e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = \underbrace{2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0} e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

18.3 b) $e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{i\frac{\pi}{2}} = e^{i\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}}{2}}\left(e^{i\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}}{2}}-e^{i\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}}{2}}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)ie^{5i\frac{\pi}{12}} = 2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)e^{5i\frac{\pi}{12}+i\frac{\pi}{2}} = \underbrace{2\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}_{>0} e^{i\frac{11\pi}{12}}$.

18.4 a) On calcule :

$$\begin{aligned}\cos(3x) &= \mathrm{Re}(e^{3ix}) = \mathrm{Re}\left((e^{ix})^3\right) = \mathrm{Re}\left((\cos(x)+i\sin(x))^3\right)\\ &= \mathrm{Re}(\cos^3(x)+3i\cos^2(x)\sin(x)-3\cos(x)\sin^2(x)-i\sin^3(x))\\ &= \cos^3(x)-3\cos(x)\sin^2(x) = \cos^3(x)-3\cos(x)(1-\cos^2(x))\\ &= 4\cos^3(x)-3\cos(x).\end{aligned}$$

18.4 b) On calcule :

$$\begin{aligned}\sin(4x) &= \mathrm{Im}(e^{4ix}) = \mathrm{Im}\left((e^{ix})^4\right) = \mathrm{Im}\left((\cos(x)+i\sin(x))^4\right)\\ &= \mathrm{Im}(\cos^4(x)+4i\cos^3(x)\sin(x)-6\cos^2(x)\sin^2(x)-4i\cos(x)\sin^3(x)+\sin^4(x))\\ &= 4\cos^3(x)\sin(x)-4\cos(x)\sin^3(x).\end{aligned}$$

18.5 a) $\cos(x)+\cos(3x) = \mathrm{Re}(e^{ix}+e^{3ix}) = \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{x+3x}{2}}(e^{i(-x)}+e^{ix})\right) = \mathrm{Re}\left(e^{2ix}2\cos(x)\right) = 2\cos(2x)\cos(x)$.

18.5 b) $\sin(5x)-\sin(3x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})=\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})\big)=\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}2\mathrm{i}\sin(x)\big)=2\cos(4x)\sin(x)$.

18.5 c) $\cos(x)-\cos(3x)=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})=\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x+3x}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-x)}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\Big)=\mathrm{Re}\big(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}(-2\mathrm{i})\sin(x)\big)=2\sin(x)\sin(2x)$.

18.5 d) $\sin(3x)+\sin(5x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x})=\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})\big)=\mathrm{Im}\big(\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}2\cos(x)\big)=2\sin(4x)\cos(x)$.

18.6 a) Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 0. Sinon, $\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=\mathrm{Im}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x})$
$=\mathrm{Im}\big(1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3\big)$. Or, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\neq 1$ donc $1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^3=\dfrac{1-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$.
On utilise maintenant l'astuce de l'arc moitié. On obtient,

$$\sin(x)+\sin(2x)+\sin(3x)=\mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x}{2}}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(2x)}{-2\mathrm{i}\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3x}{2}}\frac{\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)=\frac{\sin\left(\frac{3x}{2}\right)\sin(2x)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

18.6 b) Si $x\in 2\pi\mathbb{Z}$, alors cette somme vaut 4.
Si x est de la forme $\pi+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$, la somme vaut -4.
Sinon, on calcule :

$$\begin{aligned}\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)&=\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{3\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{5\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{7\mathrm{i}x})\\&=\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big)\Big).\end{aligned}$$

Or, $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}\neq 1$ donc

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\big(1+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^2+(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^3\big)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x})^4}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{1-(\mathrm{e}^{8\mathrm{i}x})}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\frac{\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}\frac{-2\mathrm{i}\sin(4x)}{-2\mathrm{i}\sin(x)}=\mathrm{e}^{4\mathrm{i}x}\frac{\sin(4x)}{\sin(x)}.$$

Finalement, on a

$$\cos(x)+\cos(3x)+\cos(5x)+\cos(7x)=\frac{\cos(4x)\sin(4x)}{\sin(x)}=\frac{\sin(8x)}{2\sin(x)}.$$

18.6 c) On calcule :

$$\cos(x)+\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{4\pi}{3}\right)=\mathrm{Re}\Big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{2\pi}{3})}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{4\pi}{3})}\Big)=\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\underbrace{\left(1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2\right)}_{=0}\right)=0.$$

Fiche n° 19. Sommes et produits

Réponses

19.1 a) .... $\boxed{n(n+2)}$

19.1 b) .... $\boxed{\dfrac{7(n+1)(n+4)}{2}}$

19.1 c) .... $\boxed{\dfrac{n(5n+1)}{2}}$

19.1 d)......... $\boxed{\dfrac{(n-2)(n-7)}{6}}$

19.2 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

19.2 b)... $\boxed{n(n+1)(n^2+n+4)}$

19.2 c) .... $\boxed{\dfrac{9}{2}(3^{n-2}-1)}$

19.2 d) .... $\boxed{5^{n+1}\dfrac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}}$

19.2 e)... $\boxed{\dfrac{7}{6}(7^n-1)+n(n+4)}$

19.2 f) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

19.3 a)................. $\boxed{2^{q-p+1}}$

19.3 b) .... $\boxed{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}$

19.3 c)................ $\boxed{5^n(n!)^{\frac{3}{2}}}$

19.3 d) .... $\boxed{0}$

19.4 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}}$

19.4 b) .... $\boxed{0}$

19.4 c)...... $\boxed{n2^{n+1}+2(1-2^n)}$

19.4 d) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}$

19.5 a) .... $\boxed{(n+2)^3-2^3}$

19.5 b) .... $\boxed{\ln(n+1)}$

19.5 c) .... $\boxed{1-\dfrac{1}{(n+1)!}}$

19.5 d)............ $\boxed{(n+1)!-1}$

19.6 a).................. $\boxed{n+1}$

19.6 b)................ $\boxed{1-4n^2}$

19.6 c)...................... $\boxed{\dfrac{1}{n}}$

19.6 d) .... $\boxed{\dfrac{n+1}{2n}}$

19.7 a) .... $\boxed{\dfrac{n^2(n+1)}{2}}$

19.7 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n+3)}{4}}$

19.7 c)............... $\boxed{\dfrac{n(n^2-1)}{2}}$

19.7 d) .. $\boxed{\dfrac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}}$

19.7 e)......... $\boxed{\dfrac{n(n+1)}{2}\ln(n!)}$

19.7 f)....... $\boxed{\dfrac{n(n+1)(4n-1)}{6}}$

Corrigés

19.1 a) On utilise la formule suivante : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+2} n = n\sum_{k=1}^{n+2} 1 = (n+2-1+1)\times n = n(n+2)$.

....

19.1 b) On utilise la formule présente en prérequis : $\displaystyle\sum_{k=2}^{n+2} 7k = 7\times\frac{(n+2-2+1)(n+2+2)}{2} = \frac{7(n+1)(n+4)}{2}$.

....

19.1 c) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(3k+n-1) = 3\sum_{k=1}^{n}k + (n-1)\sum_{k=1}^{n}1 = \frac{3n(n+1)}{2} + n(n-1) = \frac{n(5n+1)}{2}.$$

....

19.1 d) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=2}^{n-1}\left(\frac{k-4}{3}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=2}^{n-1}(k-4) = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=2}^{n-1}k - 4\sum_{k=2}^{n-1}1\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{(n-2)(n+1)}{2} - 4(n-2)\right) = \frac{(n-2)(n-7)}{6}.$$

....

19.2 a) On développe et utilise la linéarité de la somme $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$.

Puis, on utilise la formule suivante : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. D'où $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

19.2 b) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=0}^{n}\big(4k(k^2+2)\big) = 4\sum_{k=0}^{n} k^3 + 8\sum_{k=0}^{n} k = 4\frac{n^2(n+1)^2}{4} + 8\frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)(n(n+1)+4) = n(n+1)(n^2+n+4).$$

19.2 c) On utilise la formule pour les sommes géométriques : on a $\sum_{k=2}^{n-1} 3^k = 3^2 \frac{1-3^{n-1-2+1}}{1-3} = \frac{9}{2}(3^{n-2}-1)$.

19.2 d) On factorise pour faire apparaître une somme géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{n-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} 2^k 5^{-k} = 5^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{5}\right)^k = 5^n \frac{1-(\frac{2}{5})^{n-0+1}}{1-\frac{2}{5}} = 5^{n+1}\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{3}.$$

19.2 e) On utilise la linéarité de la somme :

$$\sum_{k=1}^{n}(7^k + 4k - n + 2) = \sum_{k=1}^{n} 7^k + 4\sum_{k=1}^{n} k + (-n+2)\sum_{k=1}^{n} 1 = 7\frac{7^n-1}{6} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (-n+2)n = \frac{7}{6}(7^n-1) + n + 4.$$

19.2 f) On utilise la formule suivante : $\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+1}{2n}$.

19.3 a) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=p}^{q} 2 = 2 \times \cdots \times 2 = 2^{q-p+1}$.

19.3 b) On utilise la formule suivante : $\prod_{k=1}^{n} 3^k = 3^1 \times 3^2 \times \cdots \times 3^n = 3^{1+\cdots+n} = 3^{\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)} = 3^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

19.3 c) On factorise et on utilise que $\sqrt{k} = k^{\frac{1}{2}}$: on a

$$\prod_{k=1}^{n} 5\sqrt{k} \times k = 5^n \prod_{k=1}^{n} k^{\frac{3}{2}} = 5^n \left(\prod_{k=1}^{n} k\right)^{\frac{3}{2}} = 5^n (n!)^{\frac{3}{2}}.$$

19.3 d) Un produit est nul si l'un des termes est nul.

19.4 a) Avec ce changement ou renversement, on a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a $\sum_{k=1}^{n}(n+1-k) = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$.

19.4 b) On utilise la linéarité de la somme et on effectue ce changement ou renversement dans la seconde. On a $k = n+1-j$, les bornes varient alors de n à 1, on les remet dans le bon ordre. On a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+1-k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.$$

19.4 c) Avec le changement d'indice, on a, en notant $S_n = \sum_{k=1}^{n} k2^k$:

$$S_n = \sum_{j=0}^{n-1}(j+1)2^{j+1} = \sum_{j=0}^{n-1} j2^{j+1} + \sum_{j=0}^{n-1} 2^{j+1} = 2\sum_{j=0}^{n-1} j2^j + 2\sum_{j=0}^{n-1} 2^j$$
$$= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j2^j - n2^n\right] + 2\frac{1-2^n}{1-2} = 2S_n - n2^{n+1} - 2(1-2^n)$$

D'où $S_n = n2^{n+1} + 2(1-2^n) = (n-1)2^{n+1} + 2$.

19.4 d) On a $\sum_{k=3}^{n+2}(k-2)^3 = \sum_{j=1}^{n} j^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

19.5 a) On reconnaît une somme télescopique :

$$\sum_{k=2}^{n+2}(k+1)^3 - k^3 = 3^3 - 2^3 + 4^3 - 3^3 + \cdots + (n+3)^3 - (n+2)^3 = (n+3)^3 - 2^3.$$

19.5 b) On calcule :

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k) = \ln(2) + \cdots + \ln(n+1) - [\ln(1) + \cdots + \ln(n)] = \ln(n+1).$$

19.5 c) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1-1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k+1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right] = 1 - \frac{1}{(n+1)!}.$$

19.5 d) En écrivant $k = k+1-1$, on a :

$$\sum_{k=1}^{n} k \times k! = \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! = \sum_{k=1}^{n}[(k+1) \times k! - k!] = \sum_{k=1}^{n}[(k+1)! - k!] = (n+1)! - 1.$$

19.6 a) On écrit $\prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} = \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \cdots \times \frac{n+1}{n} = \frac{n+1}{1} = n+1.$

19.6 b) Dans cet exemple, il faut aller un terme plus loin pour voir le télescopage :

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{2k-3} = \frac{3}{-1} \times \frac{5}{1} \times \frac{7}{3} \times \cdots \times \frac{2(n-1)+1}{2(n-1)-3} \times \frac{2n+1}{2n-3}$$
$$= \frac{2(n-1)+1}{-1} \times \frac{2n+1}{1} = -(2n-2+1)(2n+1) = -(2n-1)(2n+1) = 1-4n^2.$$

19.6 c) En mettant au même dénominateur : $\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{k}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$

19.6 d) Il faut remarquer l'identité remarquable et faire deux produits télescopiques :

$$\prod_{k=2}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n}\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k+1)}{k \times k} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k}\right) \times \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k+1}{k}\right)$$
$$= \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \cdots \times \frac{n-1}{n}\right) \times \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \times \cdots \times \frac{n+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \times \frac{n+1}{2} = \frac{n+1}{2n}.$$

19.7 a) Comme il n'y a que l'indice j dans la somme, nous pouvons factoriser :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{j=1}^{n} 1\right) = \frac{n(n+1)}{2}n = \frac{n^2(n+1)}{2}.$$

19.7 b) On somme d'abord sur l'indice i ; on calcule donc

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\times\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j+1) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1} k = \frac{n(n+3)}{4}.$$

Signalons, qu'en revanche, l'autre ordre de sommation ne permettait pas de conclure.

19.7 c) Il faut faire attention à l'inégalité stricte :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(i+j) &= \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(i+j) = \sum_{j=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j-1} i + \sum_{i=1}^{j-1} j\right) = \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{j(j-1)}{2} + j(j-1)\right] \\
&= \sum_{j=2}^{n}\left[\frac{3}{2}(j^2-j)\right] = \frac{3}{2}\left(\sum_{j=2}^{n} j^2 - \sum_{j=2}^{n} j^2\right) = \frac{3}{2}\left[\left(\sum_{j=1}^{n} j^2\right) - 1 - \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) + 1\right] \\
&= \frac{3}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] = \frac{3n(n+1)(2n+1-3)}{3\times 2\times 2} = \frac{n(n+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n^2-1)}{2}.
\end{aligned}$$

19.7 d) On développe d'abord puis on choisit l'ordre de sommation qui semble faciliter les calculs :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i+j)^2 &= \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n}(i^2+2ij+j^2) = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i^2 + 2\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} ij + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i}^{n} i^2\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} ij\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{j} j^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2\sum_{j=i}^{n} 1\right) + 2\sum_{j=1}^{n}\left(j\sum_{i=1}^{j} i\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(j^2\sum_{i=1}^{j} 1\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} i^2(n-i+1) + 2\sum_{j=1}^{n} j\frac{j(j+1)}{2} + \sum_{j=1}^{n} j^3 = \sum_{i=1}^{n}\left[i^2(n+1) - i^3\right] + \sum_{j=1}^{n}(j^3+j^2) + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+1)\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i^3 + \sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2 + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= (n+2)\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
&= \frac{n(n+1)(7n^2+13n+4)}{12}.
\end{aligned}$$

19.7 e) On calcule :

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\ln(i^j) = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j\ln(i) = \left(\sum_{j=1}^{n} j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\ln(i)\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \frac{n(n+1)}{2}\ln(n!).$$

19.7 f) On fait une sommation par paquets :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} \max(i,j) + \sum_{1\leqslant j=i\leqslant n} \max(i,j) \\
&= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j + \sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} i + \sum_{i=1}^{n} i \\
&= 2\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{par symétrie} \\
&= 2\sum_{j=2}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} = 2\sum_{j=1}^{n} j(j-1) + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= 2\left[\sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1}^{n} j\right] + \frac{n(n+1)}{2} = 2\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2}\right] + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{6}(4n+2-6+3) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Fiche n° 20. Coefficients binomiaux

Réponses

20.1 a) .... $\boxed{10\,100}$

20.1 b) .... $\boxed{720}$

20.1 c) .... $\boxed{\dfrac{1}{30}}$

20.1 d) .... $\boxed{15}$

20.1 e) .... $\boxed{56}$

20.1 f) .... $\boxed{140}$

20.2 a) .... $\boxed{\dfrac{9!}{5!}}$

20.2 b) .... $\boxed{\dbinom{9}{4}}$

20.2 c) .... $\boxed{2^n \times n!}$

20.2 d) .... $\boxed{\dfrac{(2n+1)!}{2^n \times n!}}$

20.3 a) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

20.3 b) .... $\boxed{\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}}$

20.3 c) .... $\boxed{\dfrac{k+1}{n-k}}$

20.3 d) .... $\boxed{(n+2)(n+1)}$

20.3 e) .... $\boxed{\dfrac{1}{(n+1)!}}$

20.3 f) .... $\boxed{\dfrac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}}$

20.4 a) .... $\boxed{\dbinom{19}{10}}$

20.4 b) .... $\boxed{\dbinom{10}{6}}$

20.4 c) .... $\boxed{\dbinom{10}{5}}$

20.4 d) .... $\boxed{\dbinom{n+1}{p}}$

20.4 e) .... $\boxed{\dbinom{n}{p+1}}$

20.4 f) .... $\boxed{\dbinom{n-1}{p}}$

20.5 a) .... $\boxed{3^n}$

20.5 b) .... $\boxed{0}$

20.5 c) .... $\boxed{6^n}$

20.5 d) .... $\boxed{12 \times 15^n}$

20.6 a) .... $\boxed{161\,051}$

20.6 b) .... $\boxed{1{,}030301}$

20.7 a) .... $\boxed{2^n}$

20.7 b) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

20.7 c) .... $\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

20.7 d) .... $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

20.8 a) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

20.8 b) .... $\boxed{n2^{n-1}}$

20.8 c) .... $\boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

20.8 d) .... $\boxed{\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}}$

Corrigés

20.1 a) On calcule : $\dfrac{101!}{99!} = \dfrac{101 \times 100!}{99!} = \dfrac{101 \times 100 \times 99!}{99!} = 101 \times 100 = 10100.$

20.1 b) On calcule : $\dfrac{10!}{7!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 10 \times 9 \times 8 = 720.$

20.1 c) On calcule : $\dfrac{1}{4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5}{5 \times 4!} - \dfrac{1}{5!} = \dfrac{5-1}{5!} = \dfrac{4}{5!} = \dfrac{4}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = \dfrac{1}{30}.$

20.1 d) On calcule : $\dbinom{6}{2} = \dfrac{6!}{2! \times 4!} = \dfrac{6 \times 5 \times 4!}{2 \times 4!} = \dfrac{6 \times 5}{2} = 15.$

20.1 e) On calcule : $\dbinom{8}{3} = \dfrac{8!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6 \times 5!}{3! \times 5!} = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{2 \times 3} = 8 \times 7 = 56.$

20.1 f) On calcule : $4 \times \dbinom{7}{4} = 4 \times \dfrac{7!}{4! \times 3!} = \dfrac{4 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3!}{4 \times 3! \times 3!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4}{2 \times 3} = 140.$

20.2 a) Par définition, $9! = (2 \times 3 \times 4 \times 5) \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 = 5! \times 6 \times 7 \times 8 \times 9$. Donc, $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$.

20.2 b) Comme pour le calcul précédent, on a $6 \times 7 \times 8 \times 9 = \dfrac{9!}{5!}$. Or, $2 \times 3 \times 4 = 4!$. Ainsi,

$$\frac{6 \times 7 \times 8 \times 9}{2 \times 3 \times 4} = \frac{9!}{5!} \times \frac{1}{4!} = \binom{9}{4} = \binom{9}{5}.$$

20.2 c) On peut mettre 2 en facteur de chaque nombre du produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$, produit qui contient n facteurs. Ainsi,

$$2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n) = 2^n \times (1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n) = 2^n \times n!.$$

20.2 d) On multiplie le produit $3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1)$ par le produit $2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)$ de la question précédente.

On obtient ainsi le produit de tous les entiers compris entre 2 et $(2n+1)$. Il s'agit donc de $(2n+1)!$.

Donc, on a

$$3 \times 5 \times 7 \times \cdots \times (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2 \times 4 \times 6 \times \cdots \times (2n)} = \frac{(2n+1)!}{2^n \times n!}.$$

20.3 a) Par définition, $\displaystyle\binom{n}{2} = \frac{n!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2)!}{2! \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}.$

20.3 b) Par définition, $\displaystyle\binom{n}{3} = \frac{n!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-3)!}{3! \times (n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$

20.3 c) On calcule

$$\begin{aligned}\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k+1}} &= \frac{\frac{n!}{k! \times (n-k)!}}{\frac{n!}{(k+1)! \times (n-(k+1))!}} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} \times \frac{(k+1)! \times (n-(k+1))!}{n!} \\ &= \frac{(k+1) \times k! \times (n-k-1)!}{k! \times (n-k) \times (n-k-1)!} = \frac{k+1}{n-k}.\end{aligned}$$

20.3 d) On calcule $\displaystyle\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2) \times (n+1) \times n!}{n!} = (n+2)(n+1).$

20.3 e) On réduit au même dénominateur $\displaystyle\frac{1}{n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{n+1}{(n+1) \times n!} - \frac{n}{(n+1)!} = \frac{(n+1)-n}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)!}.$

20.3 f) On réduit au même dénominateur

$$\frac{(n+1)!}{2^{2(n+1)}} - \frac{n!}{2^{2n}} = \frac{(n+1)!}{2^{2n+2}} - \frac{2^2 \times n!}{2^2 \times 2^{2n}} = \frac{(n+1)! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{(n+1) \times n! - 4 \times n!}{2^{2n+2}} = \frac{n! \times (n-3)}{2^{2n+2}}.$$

20.5 a) On constate que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 1^{n-k} = (2+1)^n = 3^n.$

20.5 b) On constate que

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} (-1) \times \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = -1 \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \times 1^{n-k} = (-1) \times (-1+1)^n = 0.$$

20.5 c) On calcule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^{2n-k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} 2^n \times 2^{n-k} \binom{n}{k} = 2^n \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \times 1^k = 2^n \times (1+2)^n = 2^n \times 3^n = 6^n.$

20.5 d) On calcule

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^{k+2} \binom{n}{k} \times 3^{2n-k+1} &= \sum_{k=0}^{n} 2^2 \times 2^k \times \binom{n}{k} \times 3^{n+1} \times 3^{n-k} \\ &= 4 \times 3^{n+1} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k \times 3^{n-k} \\ &= 4 \times 3^{n+1} \times (2+3)^n = 4 \times 3^{n+1} \times 5^n = 4 \times 3 \times 3^n \times 5^n = 12 \times 15^n.\end{aligned}$$

20.6 a) $(10+1)^5 = 10^5 + 5.10^4 + 10.10^3 + 10.10^2 + 5.10 + 1 = 10^5 + 6.10^4 + 10.10^2 + 5.10 + 1 = 161\,051.$

20.6 b) $(1+0{,}01)^3 = 1 + 3.0{,}01 + 3.0{,}0001 + 0{,}000001 = 1{,}030301$.

20.7 a) On développe $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On évalue en $x = 1$ pour obtenir $(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

20.7 b) On dérive par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(1+x)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k \times x^{k-1}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(1+1)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times k = n2^{n-1}$.

20.7 c) On dérive deux fois par rapport à x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$.

On obtient $n(n-1)(1+x)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) \times x^{k-2}$.

On évalue en $x = 1$ pour obtenir $n(n-1)(1+1)^{n-2} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1)$. Ainsi, $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = n(n-1)2^{n-2}$.

Or, par linéarité, on a $\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k$. Donc,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \times k \times (k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}.$$

20.7 d) On intègre entre 0 et x la relation $(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$. On obtient

$$\frac{1}{n+1}(1+x)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} x^{k+1}.$$

On évalue en $x = 1$ pour obtenir

$$\frac{1}{n+1}(1+1)^{n+1} - \frac{1}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

20.8 a) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \times n = n2^{n-1}$

20.8 b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k(k-1) = \sum_{k=2}^{n} \binom{n-2}{k-2} \times n(n-1) = n(n-1)2^{n-2}$

20.8 c) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k(k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times k = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = n(n+1)2^{n-2}$

20.8 d) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \frac{1}{k+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \times \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$

Fiche n° 21. Manipulation des fonctions usuelles

Réponses

21.1 a) .... $\boxed{\{-5,1\}}$

21.1 b) .... $\boxed{\{\frac{1}{2}\}}$

21.2 a) .... $\boxed{\{3\}}$

21.2 b) .... $\boxed{\{\frac{9}{16}\}}$

21.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

21.3 b) .... $\boxed{1}$

21.3 c) .... $\boxed{-\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}}$

21.3 d)............... $\boxed{\dfrac{\ln(4)}{\ln(20/3)}}$

21.4 a) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}}$

21.4 b) .... $\boxed{\left\{0;\frac{1}{2}\right\}}$

21.4 c) .... $\boxed{1-\dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}}$

21.4 d) .... $\boxed{\dfrac{\ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{\ln(3)}}$

21.5 a) .... $\boxed{]2,4[}$

21.5 b) .... $\boxed{\{\frac{1}{2}\}}$

21.6 a) ... $\boxed{x \mapsto \ln(2)\times 2^x + 2x}$

21.6 b). $\boxed{x \mapsto \dfrac{15^x\ln(3/5)+3^x\ln(3)}{(5^x+1)^2}}$

21.6 c)...... $\boxed{x \mapsto (\ln(x)+1)x^x}$

21.6 d).......... $\boxed{x \mapsto -\dfrac{1}{1+x^2}}$

21.6 e)................. $\boxed{x \mapsto 0}$

21.6 f).......... $\boxed{x \mapsto \arctan(x)}$

Corrigés

21.1 a) $|x+2| = 3 \iff x+2 = 3$ ou $x+2=-3 \iff x=1$ ou $x=-5$

....

21.1 b) Géométriquement la seule solution est l'abscisse du milieu des points d'abscisse -2 et 3.

$|x+2| = |x-3| \iff (x+2)^2 = (x-3)^2 \iff 4x+4 = -6x+9 \iff 10x = 5 \iff x = \dfrac{1}{2}$

....

21.2 a) Si $x \geqslant -1$ est solution alors $x+1=4$ ou encore $x=3$ et 3 est bien une solution.

....

21.2 b) L'étude de $x \longmapsto \sqrt{x}+\sqrt{x+1}$ montre qu'il y a une et une seule solution.

de plus $\sqrt{x}+\sqrt{x+1} = 2 \Longrightarrow \left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)^2 = 4 \Longrightarrow 2x+1+2\sqrt{x(x+1)} = 4 \Longrightarrow 2\sqrt{x(x+1)} = -2x+3 \Longrightarrow$ $4x(x+1) = 4x^2-12x+9 \Longrightarrow x = \dfrac{9}{16}$

....

21.3 a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $3^x = \dfrac{9^x}{2} \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln\left(\dfrac{9^x}{2}\right) \Leftrightarrow x\ln(3) = 2x\ln(3)-\ln(2) \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

....

21.3 b) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors on a les équivalences $4^x = 2\times 2^x \Leftrightarrow 2x\ln(2) = (x+1)\ln(2) \Leftrightarrow 2x = x+1 \Leftrightarrow x = 1$.

....

21.3 c) Soit $x\in\mathbb{R}$.

Alors on a l'équivalence $2^x = 3.4^x \Leftrightarrow x\ln(2) = \ln(3)+2x\ln(2) \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln(3)}{\ln(2)}$.

....

21.3 d) Soit $x\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}10^{2x} = 4\times 5^x\times 9^{\frac{x}{2}} &\Leftrightarrow \ln(10^{2x}) = \ln(4\times 5^x\times 9^{\frac{x}{2}}) \Leftrightarrow 2x\ln(10) = \ln(4)+x\ln(5)+\frac{x}{2}\ln(9)\\ &\Leftrightarrow x\left(2\ln(5)+2\ln(2)-\ln(5)-\frac{2\ln(3)}{2}\right) = \ln(4) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(4)}{2\ln(2)+\ln(5)-\ln(3)} = \frac{\ln(4)}{\ln(20/3)}.\end{aligned}$$

....

21.4 a) Soit $x\in\mathbb{R}$. Posons $X = 2^x$. Alors $2^x+4^x = 4 \Leftrightarrow X+X^2-4 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1+16 = 17$, d'où deux racines, $\dfrac{-1\pm\sqrt{17}}{2}$. Seule la racine $\dfrac{\sqrt{17}-1}{2}$ est positive, donc $2^x+4^x = 4 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{\sqrt{17}-1}{2} \Leftrightarrow$

$x\ln(2) = \ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{\sqrt{17}-1}{2}\right)}{\ln(2)}$.

21.4 b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons $X = 4^x$. Alors $16^x - 3 \times 4^x + 2 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 3X + 2 = 0 \Leftrightarrow (X-1)(X-2) = 0 \Leftrightarrow 4^x = 1$ ou $4^x = 2 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \frac{1}{2}$.

21.4 c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.
Alors on a l'équivalence $2 \times 9^x - 3^x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 3 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 \times 2 \times 3 = 25$, donc les deux solutions de l'équation sont $\frac{1 \pm 5}{4}$, i.e. $\frac{3}{2}$ et -1. La seule solution positive est $\frac{3}{2}$, donc $2 \times 9^x - 3^x - 3 \Leftrightarrow 3^x = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln(3) - \ln(2) \Leftrightarrow x = 1 - \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$.

21.4 d) Soit $x \in \mathbb{R}$. Posons $X = 3^x$.
Alors on a l'équivalence $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow X^2 + X - 1 = 0$. Cette équation a pour discriminant $1 + 4 = 5$, donc les deux solutions de l'équation sont $\frac{-1 \pm 5}{2}$. La seule solution positive est $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, donc $3^x + 3^{2x} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3^x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \Leftrightarrow x\ln(3) = \ln\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$.

21.5 a) Géométriquement : ce sont les abscisses des points sur le disque ouvert de centre 3 et de rayon 1.

$|x-3| < 1 \iff -1 < x - 3 < 1 \iff 2 < x < 4$

21.5 b) $|2x+1| \geqslant 2 \iff 2x+1 \leqslant -2 \quad \text{ou} \quad 2x+1 \geqslant 2 \iff x \leqslant -\frac{3}{2} \quad \text{ou} \quad x \geqslant \frac{1}{2}$

21.6 a) On n'oublie pas que $2^x = \mathrm{e}^{x\ln(2)}$. Donc la dérivée de $x \mapsto 2^x$ est $x \mapsto \ln(2).2^x$.

21.6 c) On écrit que $x^x = \mathrm{e}^{x\ln(x)}$. Ainsi la dérivée de la fonction est $x \mapsto (\ln(x)+1)\mathrm{e}^{x\ln(x)}$.

21.6 d) Fonction dérivable sur $]-\infty;.0[$ et sur $]0;+\infty[$.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

21.6 e) La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2}\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0$.

Fiche n° 22. Suites numériques

Réponses

22.1 a)	$\boxed{\dfrac{12}{5}}$
22.1 b)	$\boxed{8}$
22.1 c)	$\boxed{\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}}$
22.1 d)	$\boxed{\dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}}$
22.2 a)	$\boxed{13}$
22.2 b)	$\boxed{29}$
22.3 a)	$\boxed{2}$
22.3 b)	$\boxed{2}$
22.4 a)	$\boxed{21}$
22.4 b)	$\boxed{10\ 000}$
22.4 c)	$\boxed{2\ 001}$
22.4 d)	$\boxed{10\ 201}$
22.5 a)	$\boxed{\dfrac{17}{24}}$
22.5 b)	$\boxed{\dfrac{1}{24}}$
22.6 a)	$\boxed{\dfrac{3}{512}}$
22.6 b)	$\boxed{\dfrac{3069}{512}}$
22.6 c)	$\boxed{\dfrac{3}{1\ 024}}$
22.6 d)	$\boxed{\dfrac{6141}{1024}}$
22.7 a)	$\boxed{\dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}}$
22.7 b)	$\boxed{\dfrac{11\sqrt{5}}{25}}$
22.8 a)	$\boxed{3^n+(-2)^n}$
22.8 b)	$\boxed{211}$
22.9 a)	$\boxed{\dfrac{(1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n}{2}}$
22.9 b)	$\boxed{2\sqrt{2}}$
22.10 a)	$\boxed{257}$
22.10 b)	$\boxed{65\ 537}$
22.10 c)	$\boxed{F_n}$
22.10 d)	$\boxed{F_{n+1}-2}$
22.10 e)	$\boxed{F_{n+1}+2^{2^n+1}}$
22.10 f)	$\boxed{F_{n+2}}$

Corrigés

22.1 a) $u_0 = \dfrac{2\times 0+3}{5}\times 2^{0+2} = \dfrac{12}{5}$.

22.1 b) $u_1 = \dfrac{2\times 1+3}{5}\times 2^{1+2} = \dfrac{5}{5}\times 8 = 8$.

22.1 c) $u_n = \dfrac{2(n+1)+3}{5}\times 2^{(n+1)+2} = \dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$.

22.1 d) $u_{3n} = \dfrac{2\times 3n+3}{5}\times 2^{3n+2} = \dfrac{3(2n+1)\cdot 2^{3n+2}}{5}$

22.2 a) $u_1 = 2\times 1+3 = 5$ et $u_2 = 2\times 5+3 = 13$.

22.2 b) On calcule : $u_3 = 2\times 13+3 = 29$.

22.3 a) $w_1 = \dfrac{1}{2}\times 2^2 = \dfrac{4}{2} = 2$ et, de même, $w_2 = 2$.

22.3 b) Il faudrait formaliser une preuve par récurrence.

22.4 a) $a_{100} = a_0 + 100\times 2 = 201$.

22.4 b) $s_{100} = \dfrac{100\times(1+199)}{2} = \dfrac{100\times 200}{2} = 100^2 = 10\ 000$.

22.4 c) $a_{1\ 000} = 1 + 1\ 000\times 2 = 2\ 001$.

22.4 d) $s_{101} = \dfrac{101\times(1+201)}{2} = \dfrac{101\times 202}{2} = 101^2 = 10\ 201$.

22.5 a) $b_{102} = \dfrac{b_{101} + b_{103}}{2} = \dfrac{\frac{2}{3} + \frac{3}{4}}{2} = \dfrac{\frac{8+9}{12}}{2} = \dfrac{17}{24}$.

22.5 b) $r = u_{102} - u_{101} = \dfrac{17}{24} - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{24}$.

22.6 a) $g_9 = 3 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^9 = \dfrac{3}{2^9} = \dfrac{3}{512}$.

22.6 b) $\sigma_{10} = g_0 \times \dfrac{1 - \frac{1}{2^{10}}}{1 - \frac{1}{2}} = 6\dfrac{2^{10} - 1}{2^{10}} = \dfrac{3 \times 1\,023}{512} = \dfrac{3069}{512}$.

22.6 c) $g_{10} = g_0 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{10} = 3 \times \dfrac{1}{2^{10}} = \dfrac{3}{1\,024}$.

22.6 d) $\sigma_{11} = 6\dfrac{2^{11} - 1}{2^{11}} = \dfrac{3 \times 2\,047}{1\,024} = \dfrac{6141}{1024}$.

22.7 a) $h_{12} = \sqrt{h_{11} \times h_{13}} = \sqrt{\dfrac{5\pi \times 11\pi}{11 \times 25}} = \sqrt{\dfrac{\pi^2}{5}} = \dfrac{\pi\sqrt{5}}{5}$.

22.7 b) $r = \dfrac{h_{12}}{h_{11}} = \dfrac{\frac{\pi\sqrt{5}}{5}}{\frac{5\pi}{11}} = \dfrac{\pi\sqrt{5} \times 11}{5 \times 5\pi} = \dfrac{11\sqrt{5}}{25}$.

22.8 a) L'équation caractéristique est $r^2 - r - 6 = 0$ dont les racines sont 3 et -2. Ainsi $u_n = \alpha 3^n + \beta(-2)^n$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales conduisent au système linéaire $\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 3\alpha - 2\beta = 1 \end{cases}$ dont les solutions sont $\alpha = \beta = 1$.

22.8 b) D'après le a) : $u_5 = 3^5 + (-2)^5 = 3^5 - 2^5 = 211$.

22.9 a) L'équation caractéristique est ici $r^2 - 2r - 1 = 0$. Ses racines sont $1 + \sqrt{2}$ et $1 - \sqrt{2}$ et $v_n = \lambda 3^n + \mu(-2)^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Les conditions initiales donnent ici $\lambda = \dfrac{1}{2}$ et $\mu = -\dfrac{1}{2}$.

22.9 b) Le plus simple (pour un si petit indice) est d'utiliser la relation de récurrence de la suite : $v_2 = 2v_1 + v_0 = 2\sqrt{2}$. Pour travailler les identités remarquables, d'après le a) : $v_2 = \dfrac{(1+\sqrt{2})^2 - (1-\sqrt{2})^2}{2} = \dfrac{3 + 2\sqrt{2} - (3 - 2\sqrt{2})}{2} = 2\sqrt{2}$.

22.10 a) $F_3 = 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1 = 257$.

22.10 b) $F_5 = 2^{2^4} + 1 = 2^{16} + 1 = 65\,537$.

22.10 c) $(F_{n-1} - 1)^2 + 1 = \left(2^{2^{n-1}}\right)^2 + 1 = 2^{2^{n-1} \times 2} + 1 = 2^{2^n} + 1 = F_n$.

22.10 d) $F_n \times (F_n - 2) = \left(2^{2^n} + 1\right)\left(2^{2^n} - 1\right) = \left(2^{2^{n+1}} - 1\right) = F_{n+1} - 2$.

22.10 e) $F_n^2 = \left(2^{2^n} + 1\right)^2 = \left(2^{2^n}\right)^2 + 2 \cdot 2^{2^n} + 1 = 2^{2^{n+1}} + 1 + 2^{2^n + 1} = F_{n+1} + 2^{2^n + 1}$.

22.10 f) $F_{n+1}^2 - 2(F_n - 1)^2 = F_{n+2} + 2 \cdot 2^{2^{n+1}} - 2(F_{n+1} - 1) = F_{n+2} + 2 \cdot 2^{2^{n+1}} - 2 \cdot 2^{2^{n+1}} = F_{n+2}$.

Fiche n° 23. Inégalités

Réponses

23.1 a) ..... Vrai	**23.4** d) ..... Faux
23.1 b) ..... Faux	**23.4** e) ..... Vrai
23.1 c) ..... Vrai	**23.4** f) ..... Vrai
23.1 d) ..... Faux	**23.4** g) ..... Vrai
23.1 e) ..... Vrai	**23.5** a) ..... Faux
23.1 f) ..... Vrai	**23.5** b) ..... Faux
23.1 g) ..... Faux	**23.5** c) ..... Faux
23.1 h) ..... Faux	**23.5** d) ..... Faux
23.2 a) ..... Vrai	**23.5** e) ..... Vrai
23.2 b) ..... Faux	**23.6** a) ..... Vrai
23.2 c) ..... Vrai	**23.6** b) ..... Vrai
23.2 d) ..... Vrai	**23.6** c) ..... Faux
23.3 a) ..... Faux	**23.6** d) ..... Vrai
23.3 b) ..... Faux	**23.6** e) ..... Vrai
23.3 c) ..... Vrai	**23.7** a) ..... Vrai
23.3 d) ..... Vrai	**23.7** b) ..... Faux
23.4 a) ..... Vrai	**23.7** c) ..... Vrai
23.4 b) ..... Faux	**23.7** d) ..... Vrai
23.4 c) ..... Vrai	

Corrigés

23.1 a) $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$ donc *(somme membre à membre de deux encadrement)* $1 - 5 < a + b < 2 - 3$

.....

23.1 b) On n'a jamais $6 < a - b < 5$ car $6 > 5$. En effet, on ne peut soustraire des inégalités, éventuellement multiplier par -1 (avec précaution) puis sommer, ce qui donne $4 < a - b < 7$

.....

23.1 c) $1 < a < 2$ et $-5 < b < -3$ donc $-4 < -2a < -2$ et $-15 < 3b < -9$

donc *(somme membre à membre de deux encadrements)* $-4 - 15 < 3b - 2a < -2 - 9$

.....

23.1 d) On n'a jamais $-5 < ab < -6$ car $-5 > -6$

.....

23.1 e) $-5 < b < -3$ donc ($x \to -\dfrac{1}{x}$ *croissante sur* $\mathbb{R}_-^*$) $\dfrac{1}{5} < -\dfrac{1}{b} < \dfrac{2}{3}$

de plus $1 < a < 2$, donc *(produit membre à membre de deux encadrements avec des nombres positifs)* $\dfrac{1}{5} < -\dfrac{a}{b} < \dfrac{2}{3}$

.....

23.1 f) D'une part $1 < a < 2$ donc $0 < \sqrt{a-1} < 1$, d'autre part $-5 < b < -3$ donc $0 < \dfrac{1}{b^2} < \dfrac{1}{25}$

donc *(produit membre à membre de deux encadrements avec des nombres positifs)* $\dfrac{\sqrt{a-1}}{b^2} < \dfrac{1}{25}$

23.1 g) $1 < a < 2$ donc $a > 1$ et $a - 1 > 0$ ce qui donne $a^2 - a > 0$ par produit d'inégalités à termes positifs.

23.1 h) faux en prenant par exemple pour $n = 2$

23.2 a) $-ab \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2) \iff (a+b)^2 \geqslant 0$

23.2 b) Il suffit de prendre comme contre-exemple $(a, b) = (1, 0)$

23.2 c) 1er cas : Si $|a| \leqslant 1$, alors $|a| \leqslant 1 + a^2$, 2ème cas : Si $|a| > 1$ alors $|a|^2 > |a|$ donc $|a| \leqslant 1 + a^2$

23.2 d) $a(1-a) \leqslant \frac{1}{4} \iff a^2 - a + \frac{1}{4} \geqslant 0 \iff \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqslant 0$

23.3 a) Contre-exemple : $x = \frac{\pi}{6}$

23.3 b) Contre-exemple : $x = -\frac{\pi}{6}$

23.3 c) $|\sin(x)| \leqslant 1$ donc on multipliant par $|\sin(x)| \geqslant 0$ il vient $(\sin(x))^2 \leqslant |\sin(x)|$

23.3 d) On sait que $1 - \cos(2x) = 2(\sin(x))^2$ et en utilisant le résultat de la question précédente on obtient : $1 - \cos(2x) \leqslant 2|\sin(x)|$

23.4 a) comme $x \in [1, 2]$, on a $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2)$ donc $0 \leqslant (\ln(x))^n \leqslant (\ln(2))^n$ et $0 \leqslant \frac{1}{x+1} \leqslant 1$.

donc *(produit membre à membre de deux encadrements avec des nombres positifs)* $0 \leqslant \frac{(\ln(x))^n}{x+1} \leqslant (\ln(2))^n$

23.4 b) Contre-exemple : $x = 2$ et $n = 1$ sachant que $0 < \ln(2) < 1$ donc $\ln(2)^2 < \ln(2)$

23.4 c) comme $x \in [1, 2]$, on a $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2) \leqslant 1$ donc $0 \leqslant (\ln(x))^{n+1} \leqslant (\ln(x))^n$ donc $0 \leqslant \frac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x} \leqslant \frac{(\ln(x))^n}{1+x}$

23.4 d) Contre-exemple : $x = 1$ et $n = 1$

23.4 e) On a vu que pour tout $x \in [1, 2]$, $\frac{(\ln(x))^{n+1}}{1+x} \leqslant \frac{(\ln(x))^n}{1+x}$, donc *(croissance de l'intégrale)* $u_{n+1} \leqslant u_n$

23.4 f) On a vu que pour tout $x \in [1, 2], 0 \leqslant \frac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant (\ln(2))^n$, donc *(croissance de l'intégrale)* $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$, comme $0 < \ln(2) < 1$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

23.4 g) On a vu que pour tout $x \in [1, 2], 0 \leqslant \frac{(\ln(x))^n}{1+x} \leqslant (\ln(2))^n$, donc *(croissance de l'intégrale)* $0 \leqslant u_n \leqslant (\ln(2))^n$, comme $-1 < \ln(2) < 1$, en utilisant le théorème des gendarmes on obtient que (u_n) converge vers 0.

23.5 a) Contre-exemple : $x = 1$ et $n = 1$ sachant que $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

23.5 b) Contre-exemple : $x = \frac{1}{2}$ et $n = 1$ sachant que $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

23.5 c) Contre-exemple : $x = \frac{1}{2}$ et $n = 1$ sachant que $\ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$

23.5 d) $u_1 < 0$, $u_2 > 0$ et $u_3 < 0$ donc $u_1 < u_2$ et $u_2 > u_3$.

....

23.5 e) $|u_n| \leqslant \displaystyle\int_{1/2}^{1} \left|\frac{(\ln(x))^n}{1+x}\right| \mathrm{d}x$ or pour tout $x \in [1/2;1]$, $0 \leqslant |\ln(x)| \leqslant \ln(2)$ et $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x} \leqslant 1$.

Donc $|u_n| \leqslant \dfrac{1}{2}(\ln(2))^n$ de plus $-1 < \ln(2) < 1$ donc ()*théorème des gendarmes*) (u_n) converge vers 0.

....

23.6 a) Chacun des n termes de la somme est compris entre 0 et 1.

....

23.6 b) Chacun des n termes de la somme est compris entre $\dfrac{1}{2n}$ et $\dfrac{1}{n+1}$.

....

23.6 c) $T_{n+1} - T_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

....

23.6 d) $T_{n+1} - T_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} = \dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} \geqslant 0$

....

23.6 e) La suite (T_n) est croissante majorée donc elle converge.

....

23.7 a) $u_{n+1} - u_n = -2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

or $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \leqslant 2\sqrt{n+1}$ donc $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$

....

23.7 b) $u_{n+1} - u_n = -2\big(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\big) + \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}} - \dfrac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

or $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} < 2\sqrt{n+1}$ donc $u_{n+1} - u_n < 0$

....

23.7 c) D'une part : $\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \dfrac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$. D'autre part : $\sqrt{k} - \sqrt{k-1} = \dfrac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}} \geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{k}}$

....

23.7 d) En sommant les encadrements précédents et en simplifiant les sommes télescopiques, il vient :

$$\sqrt{n+1} - 1 \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \sqrt{n}$$

donc $-2\sqrt{n} + 2\sqrt{n+1} - 2 \leqslant u_n \leqslant 0$ et comme $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \geqslant 0$ donc $-2 \leqslant u_n \leqslant 0$

....

Fiche n° 24. Polynômes

Réponses

24.1 a) .... $\boxed{-X(X+5)}$

24.1 b) .... $\boxed{2(X-1)(X+1)}$

24.1 c) .... $\boxed{3(X-1)(X+2)}$

24.1 d) .... $\boxed{2(X-1-\sqrt{2})(X-1+\sqrt{2})}$

24.2 a) .... $\boxed{(X-1+i)(X-1-i)}$

24.2 b) .... $\boxed{3(X-1+2i)(X-1-2i)}$

24.2 c) .... $\boxed{i(X+1+i)(X+1-i)}$

24.2 d) .... $\boxed{(X-1)(X+i)}$

24.3 a) .... $\boxed{X(X-5)(X+5)}$

24.3 b) .... $\boxed{(X-1)(X+2)(X-3)}$

24.3 c) .... $\boxed{3(X+1)(X-\sqrt{2})(X+\sqrt{2})}$

24.3 d) .... $\boxed{3(X+1)(X^2+2)}$

24.3 e) .... $\boxed{(X-1)(X+1)(X-2)(X+2)}$

24.3 f) .... $\boxed{(X-1)(X+1)(X^2+1)}$

24.4 a) .... $\boxed{3(X+1)(X+\sqrt{2}i)(X-\sqrt{2}i)}$

24.4 b) .... $\boxed{(X-1)(X-i)(X+2i)}$

24.5 a) .... $\boxed{(X-i)(X+i)(X+5)}$

24.5 b) .... $\boxed{2(X-1-i)(X-1+i)\left(X-\frac{1}{2}\right)}$

24.5 c) .... $\boxed{(X-3)^2(X+4)}$

24.5 d) .... $\boxed{4\left(X+\frac{1}{2}\right)^2(X-4)}$

Corrigés

24.1 a) On factorise successivement par -1 puis X : $P = -(X^2+5X) = -X(X+5)$.

....

24.1 b) On remarque que $P = 2(X^2-1)$ puis, soit en utilisant une identité remarquable, soit en déterminant les racines (c'est-à-dire en résolvant l'équation du second degré $x^2-1=0$), que $P = 2(X-1)(X+1)$.

....

24.1 c) On remarque que $P = 3(X^2+X-2)$ puis, en déterminant les racines, que $P = 3(X-1)(X+2)$.

....

24.1 d) On remarque que $P = 2(X^2-2X-1)$ puis, en déterminant les racines, que $P = 2(X-1-\sqrt{2})(X-1+\sqrt{2})$.

....

24.2 a) En résolvant l'équation du second degré $x^2-2x+2=0$, on trouve que les racines de P sont $1-i$ et $1+i$ et, puisque le coefficient dominant de P est 1, que $P = 2(X-1+i)(X-1-i)$.

....

24.2 b) On remarque que $P = 3(X^2-2X+5)$ puis, en déterminant les racines de P, il vient : $P = 3(X-1+2i)(X-1-2i)$.

....

24.2 c) On remarque que $P = i(X^2+2X+2)$ puis, en déterminant les racines de P, il vient : $P = i(X+1+i)(X+1-i)$.

....

24.2 d) On remarque que 1 est racine évidente de P, on peut donc écrire la factorisation : $P = (X-1)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 1 (car $\deg(P)=2$). On cherche donc des complexes a et b tels que : $P = (X-1)(aX+b)$. En développant et en identifiant, il vient : $P = (X-1)(X+i)$.

....

24.3 a) On remarque que $P = X(X^2-25)$ puis, en utilisant une identité remarquable : $P = X(X-5)(X+5)$.

....

24.3 b) On remarque que 1 est racine évidente de P, on peut donc écrire la factorisation : $P = (X-1)\times Q$ avec Q un polynôme de degré 2 (car $\deg(P)=3$). On cherche donc des réels a, b et c tels que : $P = (X-1)(aX^2+bX+c)$. En développant et en identifiant, il vient : $P = (X-1)(X^2 - X - 6)$ puis, en déterminant les racines de $Q = X^2 - X - 6$: $P = (X-1)(X+2)(X-3)$.

....

24.3 c) On remarque que $P = 3(X^3 + X^2 - 2X - 2)$ et que -1 est racine évidente de P, on peut donc écrire la factorisation : $P = 3(X+1) \times Q$ avec Q un polynôme de degré 2 (car $\deg(P) = 3$). On cherche donc des réels a, b et c tels que : $P = 3(X+1)(aX^2 + bX + c)$. En développant et en identifiant, il vient : $P = 3(X+1)(X^2 - 2)$ puis, en utilisant une identité remarquable : $P = 3(X+1)(X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$.

....

24.3 d) On remarque que $P = 3(X^3 + X^2 + 2X + 2)$ et que -1 est racine évidente de P, on peut donc écrire la factorisation : $P = 3(X+1) \times Q$ avec Q un polynôme de degré 2 (car $\deg(P) = 3$). On cherche donc des réels a, b et c tels que : $P = 3(X+1)(aX^2 + bX + c)$. En développant et en identifiant, il vient : $P = 3(X+1)(X^2 + 2)$. Comme le polynôme $X^2 + 2$ n'a pas de racines réelles, on ne va pas plus loin ici dans la factorisation.

....

24.3 e) On peut raisonner comme précédemment en remarquant que -1 et 1 sont racines évidentes de P, on peut donc écrire la factorisation : $P = (X-1)(X+1) \times Q$ avec Q un polynôme de degré 2 (car $\deg(P) = 3$). On cherche donc des réels a, b et c tels que : $P = (X-1)(X+1)(aX^2 + bX + c)$. En développant et en identifiant, il vient : $P = (X-1)(X+1)(X^2 - 4)$ puis, en utilisant une identité remarquable : $P = (X-1)(X+1)(X-2)(X+2)$.
On peut aussi utiliser la factorisation du polynôme $Q = X^2 - 5X + 4 = (X-1)(X-4)$ puis remarquer que l'on a $P = Q(X^2) = (X^2 - 1)(X^2 - 4)$. On conclut en utilisant des identités remarquables.

....

24.3 f) On utilise les identités remarquables : $P = (X^2 - 1)(X^2 + 1) = (X-1)(X+1)(X^2 + 1)$. Comme le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racines réelles, on ne va pas plus loin ici dans la factorisation.

....

24.4 a) On remarque que $P = 3(X^3 + X^2 + 2X + 2)$ et que -1 est racine évidente de P, on peut donc écrire la factorisation : $P = 3(X+1) \times Q$ avec Q un polynôme de degré 2 (car $\deg(P) = 3$). On cherche donc des complexes a, b et c tels que : $P = 3(X+1)(aX^2 + bX + c)$. En développant et en identifiant, il vient : $P = 3(X+1)(X^2 + 2) = 3(X+1)\big(X^2 - (\sqrt{2}i)^2\big)$ puis en utilisant une identité remarquable : $P = 3(X+1)(X + \sqrt{2}i)(X - \sqrt{2}i)$.

....

24.4 b) On remarque que 1 est racine évidente de P, on peut donc écrire la factorisation : $P = (X-1) \times Q$ avec Q un polynôme de degré 2 (car $\deg(P) = 3$). On cherche donc des complexes a, b et c tels que : $P = (X-1)(aX^2 + bX + c)$. En développant et en identifiant, il vient : $P = (X-1)(X^2 + iX + 2)$. Comme i est racine évidente de $Q = X^2 + iX + 2$, on obtient la factorisation $Q = (X-i)(X+2i)$ puis $P = (X-1)(X-i)(X+2i)$.

....

24.5 a) On remarque que $P(i) = 0$ donc i est racine de P. Comme P est à coefficients réels, $\bar{i} = -i$ est aussi racine de P et on peut donc écrire la factorisation : $P = (X-i)(X+i) \times Q = (X^2 - 1) \times Q$ avec Q un polynôme de degré 1 (car $\deg(P) = 3$). On cherche donc des réels a et b tels que : $P = (X^2 - 1)(aX + b)$. En développant et en identifiant, il vient : $P = (X-i)(X+i)(X+5)$.

....

24.5 b) On remarque que $P(1+i) = 0$ donc $1+i$ est racine de P. Comme P est à coefficients réels, $\overline{1+i} = 1-i$ est aussi racine de P et on peut donc écrire la factorisation : $P = (X-1+i)(X-1+i) \times Q = (X^2 - 2X + 2) \times Q$ avec Q un polynôme de degré 1 (car $\deg(P) = 3$). On cherche donc des réels a et b tels que : $P = (X^2 - 2X + 2)(aX + b)$. En développant et en identifiant, il vient : $P = (X-i)(X+i)(2X-1) = 2(X-1-i)(X-1+i)\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$.

....

24.5 c) On remarque que $P(3) = P'(3) = 0$ donc 3 est racine multiple de P et on peut écrire la factorisation : $P = (X-3)^2 \times Q = (X^2 - 6X + 9) \times Q$ avec Q un polynôme de degré 1 (car $\deg(P) = 3$). On cherche donc des réels a et b tels que : $P = (X^2 - 6X + 9)(aX + b)$. En développant et en identifiant, il vient : $P = (X-3)^2(X+4)$.

....

24.5 d) On remarque que $P\left(-\dfrac{1}{2}\right) = P'\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 0$ donc $-\dfrac{1}{2}$ est racine multiple de P et on peut écrire la factorisation : $P = \left(X + \dfrac{1}{2}\right)^2 \times Q = \left(X^2 + X + \dfrac{1}{4}\right) \times Q$ avec Q un polynôme de degré 1 (car $\deg(P) = 3$). On cherche donc des réels a et b tels que : $P = \left(X^2 + X + \dfrac{1}{4}\right)(aX + b)$. En développant et en identifiant, il vient : $P = \left(X^2 + X + \dfrac{1}{4}\right)(4X - 16) =$

$$4\left(X+\frac{1}{2}\right)^2(X-4).$$

Fiche n° 25. Développements limités

Réponses

25.1 a) .... $3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$

25.1 b) .... $x - \dfrac{3}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$

25.1 c) .... $-\dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

25.1 d) .... $x + x^2 + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

25.2 a) .... $\mathrm{e} - \dfrac{\mathrm{e}x}{2} + \dfrac{11\mathrm{e}x^2}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)$

25.2 b) .... $1 - \dfrac{1}{4}x^2 - \dfrac{1}{96}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$

25.2 c) .... $\mathrm{e}\left(1 + x + x^2 - \dfrac{5}{6}x^3\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$

25.2 d) .... $1 - x + \dfrac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\big((x-1)^2\big)$

25.3 a) .... $-\dfrac{1}{2}$

25.3 b) .... $\dfrac{2}{3}$

25.3 c) 1

25.3 d) .... $-\dfrac{1}{2}$

25.3 e) .... -1

25.3 f) 0

25.4 a) .... $-\dfrac{1}{2x}$

25.4 b) .... $\dfrac{1}{x^2}$

25.4 c) .... $-\ln(x)$

25.4 d) .... $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^x$

Corrigés

25.1 a) Il suffit d'effectuer la somme des parties régulières des dévelopements limités à l'ordre 3 en 0 de $\sin(x)$ et $\ln(1+x)$. On écrit donc $f(x) = 2\left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right) + x - \dfrac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3) = 3x - x^2 + \dfrac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$.

....

25.1 b) Il suffit d'effectuer le produit des parties régulières des développements limités à l'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et $\dfrac{1}{x+1}$ et de ne conserver que les termes de degré au plus 2. Observez que le développement limité à l'ordre 1 de $\dfrac{1}{x+1}$

suffit puisque celui de $\ln(1+x)$ à son terme constant nul. On écrit donc

$$f(x) = \left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\left(1 - x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x)\right) = x - \frac{3}{2}x^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3).$$

....

25.1 c) Il suffit d'écrire : $\sin(x)(\cos(x)-1) = \left(x + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right)\left(-\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right) = -\frac{x^3}{2} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4).$

....

25.1 d) Il suffit d'écrire :

$$\mathrm{e}^x \sin(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)\right)\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\right) = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4).$$

....

25.2 a) En utilisant les développements limités en 0 de $\ln(1+x)$ (à l'ordre 3) et de l'exponentielle (à l'ordre 2), on a : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = \exp\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right) = \mathrm{e}\exp\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right).$

Puis : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}\left(1 + \left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3}\right)^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2)\right).$

D'où : $(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} - \frac{\mathrm{e}x}{2} + \frac{11\mathrm{e}x^2}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^2).$

....

25.2 b) On a

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)$$

$$\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \underset{u\to 1}{\mathrm{o}}(u^2)$$

puis

$$\begin{aligned}\sqrt{\cos(x)} &= 1 + \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) - \frac{1}{8}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4)\\ &= 1 - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{96}x^4 + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^4).\end{aligned}$$

....

25.2 c) On a : $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3)$ et $\mathrm{e}^{1+u} = \mathrm{e}\left(1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \underset{u\to 0}{\mathrm{o}}(u^3)\right).$

D'où : $\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}(1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3) = \mathrm{e}\left(1 + x + x^2 - \frac{5}{6}x^3\right) + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}(x^3).$

....

25.2 d) Etablir l'existence et donner le développement limité de $f(x) = \frac{\ln(2-x)}{x^2}$, en 1 à l'ordre 2, revient à le faire, en 0 à l'ordre 2, pour l'application g définie par $g(t) = f(1+t) = \frac{\ln(1-t)}{(1+t)^2}$.

Or $\ln(1-t) = -t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)$ et $\frac{1}{(1+t)^2} = \left(1 - t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\right)^2 = 1 - 2t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t).$

D'où $g(t) = \left(-t - \frac{t^2}{2} + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)\right)\left(1 - 2t + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t)\right) = -t + \frac{3}{2}t^2 + \underset{t\to 0}{\mathrm{o}}(t^2)$

et $f(x) = g(x-1) = 1 - x + \frac{3}{2}(x-1)^2 + \underset{x\to 1}{\mathrm{o}}\left((x-1)^2\right).$

....

25.3 a) $\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = \frac{\left(x - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right) - x}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{2}$

....

25.3 b) $\frac{\sin(x) - x\cos(x)}{x(1-\cos(x))} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \underset{x\to 0}{o}(x^3)\right) - x\left(1 - \frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)}{x\left(\frac{x^2}{2} + \underset{x\to 0}{o}(x^2)\right)} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\frac{x^3}{3}}{\frac{x^3}{2}}$

....

25.3 c) $\dfrac{e^x+e^{-x}}{2} = 1+\dfrac{x^2}{2}+\underset{x\to 0}{o}(x^2)$ donc $\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x^2}{2}$ et ainsi $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)=0$

or $\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\right)\right)$ donc la limite vaut 1.

25.3 d) $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\ln(x+1)} = \dfrac{\ln(x+1)-x}{x\ln(x+1)}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{-\frac{x^2}{2}}{x\times x}$

25.3 e) En posant $h=x-1$, $\dfrac{1-x+\ln(x)}{1-\sqrt{2x-x^2}} = \dfrac{\ln(1+h)-h}{1-\sqrt{1-h^2}}\underset{h\to 0}{\sim}\dfrac{-\frac{1}{2}h^2}{\frac{1}{2}h^2}$

25.3 f) $\left(\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{\tan(x)}\right)=\dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{\frac{x^2}{2}}{x}\underset{x\to 0}{\sim}\dfrac{x}{2}\underset{x\to 0}{\to}0$

25.4 a) On a :

$$\frac{1}{x(\mathrm{e}^x-1)}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-(\mathrm{e}^x-1)}{x^2(\mathrm{e}^x-1)}\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-x^2/2}{x^3}\underset{x\to 0}{\sim}-\frac{1}{2x}$$

25.4 b) $\dfrac{\sin(1/x)}{x+1}\underset{x\to+\infty}{\sim}\dfrac{1}{x^2}$

25.4 c) On a : $x\ln(x+1)-(x+1)\ln(x) = -\ln(x)+x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)+x\left(\dfrac{1}{x}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}(\dfrac{1}{x})\right)\sim -\ln(x)$.

25.4 d) On a :

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}+1\right)^{x^2} &= \exp\left(x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)\\ &= \exp\left(x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)\right)\\ &= \mathrm{e}^x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\exp\left(\frac{1}{3x}+\underset{x\to+\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x}\right)\right)\\ &\underset{x\to+\infty}{\sim}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Fiche n° 26. Calcul matriciel

Réponses

26.1 a) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 3 & 3 & 4 \\ 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}$

26.1 b) $\begin{pmatrix} -2 & -6 & -5 \\ 15 & -1 & 11 \\ 18 & -26 & -1 \end{pmatrix}$

26.1 c) 17 (matrice 1×1)

26.1 d) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 2 & 14 & -4 \\ -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}$

26.1 e) $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

26.1 f) $\begin{pmatrix} -5 & 15 & 3 \end{pmatrix}$

26.1 g) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

26.1 h) $\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

26.1 i) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 49 & -14 \\ -2 & -14 & 4 \end{pmatrix}$

26.2 a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.2 b) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.2 c) $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

26.2 d) $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

26.2 e) $\begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$

26.2 f) $\begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

26.2 g) $\begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$

26.2 h) $\begin{pmatrix} \cos(3\theta) & -\sin(3\theta) \\ \sin(3\theta) & \cos(3\theta) \end{pmatrix}$

26.2 i) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} \cos(k\theta) & -\sin(k\theta) \\ \sin(k\theta) & \cos(k\theta) \end{pmatrix}$

26.2 j) $\begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix}$

26.2 k) $\begin{pmatrix} n^2 & \cdots & n^2 \\ \vdots & (n^2) & \vdots \\ n^2 & \cdots & n^2 \end{pmatrix}$

26.2 l) $n^{k-1}D$

26.3 a) $2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}$

26.3 b) $2^{i+1}3^{j-i}(2^n - 1)$

26.3 c) $2 \times 3^{i+j}\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$

26.3 d) $2^{i-j}\dbinom{i-1}{j-1}$

26.4 a) $\dfrac{1}{2(\pi - e)}\begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$

26.4 b) $\dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1-2\mathrm{i} \\ 1 & -1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$

26.4 c) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ -6 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

26.4 d) $\dfrac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

26.4 e) $\dfrac{1}{8}\begin{pmatrix} 8 & 4 & -2 \\ -16 & -6 & 7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

26.4 f) $\dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

26.4 g) $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 & 0 \\ 8 & -6 & 4 & 2 \\ -7 & 5 & -3 & -1 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

26.4 h) Non inversible !

26.4 i) .... $\boxed{\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}$

26.5 a) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

26.5 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -4 & -1 & 3 \\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1 \\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}}$

26.5 c) .... $\boxed{\lambda \neq 1}$

26.5 d) ..... $\boxed{\dfrac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} -1-\lambda+\lambda^2 & 1-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & 0 & -1 \\ 1-\lambda^2 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{pmatrix}}$

Corrigés

26.2 a) Un calcul direct donne $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26.2 b) Un calcul direct donne $A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

26.2 c) On peut conjecturer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Il resterait à le démontrer par récurrence sur k.

26.2 d) On calcule : $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$.

26.2 e) On calcule : $B^3 = B^2 \times B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 19 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$.

26.2 f)

On peut conjecturer que pour chaque k il existe un réel u_k tel que $B^k = \begin{pmatrix} 2^k & u_k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$

Cela impose successivement $u_{k+1} = 2^k + 3u_k$, $\dfrac{u_{k+1}}{3^{k+1}} = \dfrac{1}{3}\dfrac{2^k}{3^k} + \dfrac{u_k}{3^k}$ et enfin $u_k = 3^k - 2^k$

Finalement on conjecture que $A^k = \begin{pmatrix} 2^k & 3^k - 2^k \\ 0 & 3^k \end{pmatrix}$. Il resterait à le démontrer par récurrence sur k.

26.2 g) On calcule :

$$C^2 = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)^2 - \sin(\theta)^2 & -2\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(\theta)^2 + \cos(\theta)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

26.2 j) Deux possibilités de faire le calcul : « à la main », ou bien avec la formule théorique du produit.
À la main, on remarque que lorsque l'on effectue le produit $D \times D$, chaque coefficient résultera du produit d'une ligne de 1 par une colonne de 1, donc sera égal à n : $D \times D = \begin{pmatrix} n & \cdots & n \\ \vdots & (n) & \vdots \\ n & \cdots & n \end{pmatrix} = nD$.

En utilisant les coefficients, on peut écrire que

$$[D^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [D]_{ik}[D]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$

26.2 k) Comme $D^2 = nD$, $D^3 = D \times nD = nD^2 = n \times nD = n^2 D$.

26.2 l) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $n^{k-1}D$ Il resterait à le démontrer par récurrence sur k.

26.3 a) On calcule :

$$[A \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k}$$

Mais si $k > i$, $\binom{i-1}{k-1} = 0$, donc

$$\begin{aligned}
[A \times B]_{ij} &= \sum_{k=1}^{i} \binom{i-1}{k-1} 2^k 3^{j-k} \\
&= \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} 2^{\ell+1} 3^{j-\ell-1} \text{ en faisant le changement d'indice } \ell = k-1 \\
&= 2 \times 3^{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-1} \binom{i-1}{\ell} \left(\frac{2}{3}\right)^{\ell} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \left(\frac{2}{3} + 1\right)^{i-1} \\
&= 2 \times 3^{j-1} \times \frac{5^{i-1}}{3^{i-1}} = 2 \times 3^{j-i} \times 5^{i-1}
\end{aligned}$$

26.3 b) On calcule :

$$[B^2]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^i 3^{k-i} 2^k 3^{j-k} = 2^i 3^{j-i} \sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{i+1} 3^{j-i} (2^n - 1).$$

26.3 c) On calcule :

$$[B^\top \times B]_{ij} = \sum_{k=1}^{n} [B^\top]_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} b_{ki} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} 2^k 3^{i-k} 2^k 3^{j-k} = 3^{i+j} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 2 \times 3^{i+j} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

26.3 d) Déjà, la matrice A^2 est triangulaire inférieure (produit de deux matrices triangulaires inférieures). Soit $j \leqslant i$. Alors

$$\begin{aligned}
[A^2]_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} [A]_{ik} [A]_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \binom{i-1}{k-1} \binom{k-1}{j-1} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(k-1)!(i-k)!} \frac{(k-1)!}{(j-1)!(k-j)!} \\
&= \sum_{k=j}^{i} \frac{(i-1)!}{(j-1)!(i-j)!} \frac{(i-j)!}{(k-j)!(i-j-(k-j))!} \\
&= \binom{i-1}{j-1} \sum_{k=j}^{i} \binom{i-j}{k-j} \\
&= \binom{i-1}{j-1} \sum_{\ell=0}^{i-j} \binom{i-j}{\ell} \text{ en posant } \ell = k-j \\
&= 2^{i-j} \binom{i-1}{j-1}.
\end{aligned}$$

26.4 a) On remarque que $2\pi - 2e = 2(\pi - e) \neq 0$, donc A est inversible d'inverse $\dfrac{1}{2(\pi - e)} \begin{pmatrix} 2 & -e \\ -2 & \pi \end{pmatrix}$.

26.4 c) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1\end{array}\right) L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 2 & 2 & -3 & 0 & 1\end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2/2$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2\end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 5/2 & 1 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & 3/2 & 1 & -1/2\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -1 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - 1/2L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 1/2L_3 \\ \end{array}$$

Donc B est inversible d'inverse $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}5 & 2 & -1\\ 3 & 2 & -1\\ -6 & -2 & 2\end{pmatrix}$

....

26.4 d) Il ne faut pas avoir peur du π et écrire que $C = \pi\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$. On calcule alors (par pivot de Gauss) que $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$ est inversible d'inverse $\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$, donc C est inversible d'inverse $\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix}0 & 4 & 0\\ 0 & -2 & -2\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

....

26.4 h) $\mathrm{rg}(H) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 2 & 2 & 1 & 4\\ 7 & 2 & 2 & 9\\ 1 & -1 & -1 & -1\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -3 & -2\\ 0 & 2 & -12 & -12\\ 0 & -1 & -3 & -4\end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 2 & -3 & -2\\ 0 & 0 & -9 & -10\\ 0 & 0 & -9 & -10\end{pmatrix} = 3 \neq 4$

....

26.5 a) Effectuons un pivot de Gauss :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}\lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ \lambda & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ \lambda & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) L_2 \leftrightarrow L_1$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ L_2 \leftarrow L_2 + \lambda L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1\end{array}$$

Si $\lambda = 1$, alors la matrice n'est pas inversible. Sinon,

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 1-\lambda & 2+2\lambda & 0 & \lambda & 1\end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 3/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & 0\\ 0 & 1-\lambda & 1+2\lambda & 1 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \dfrac{1}{1-\lambda}L_2 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2\end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}-1 & 0 & 0 & 4/(1-\lambda) & 1/(1-\lambda) & -3/(1-\lambda)\\ 0 & 1-\lambda & 0 & 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 - \dfrac{3}{1-\lambda}L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - (1+2\lambda)L_3 \\ \end{array}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -4/(1-\lambda) & -1/(1-\lambda) & 3/(1-\lambda)\\ 0 & 1 & 0 & (2\lambda+2)/(1-\lambda) & \lambda/(1-\lambda) & (-2\lambda-1)/(1-\lambda)\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow -L_1 \\ L_2 \leftarrow \dfrac{1}{1-\lambda}L_2 \\ \end{array}$$

Dans ce cas, l'inverse de la matrice est $\frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix}-4 & -1 & 3\\ 2\lambda+2 & \lambda & -2\lambda-1\\ \lambda-1 & 0 & 1-\lambda\end{pmatrix}$

....

Fiche n° 27. Équations différentielles

Réponses

27.1 a)	$x \mapsto 56e^{12x}$
27.1 b)	$x \mapsto 6e^{x} - 1$
27.1 c)	$x \mapsto \dfrac{8e^{3x} - 5}{3}$
27.1 d)	$x \mapsto 9e^{2x} - 6$
27.2 a)	$x \mapsto e^{(6-x)/5}$
27.2 b)	$x \mapsto 1 - 2e^{-2x/7+2}$
27.2 c)	$x \mapsto \left(\dfrac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \dfrac{6}{\sqrt{5}}$
27.2 d)	$x \mapsto \left(12 + \dfrac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \dfrac{2e}{\pi}$
27.3 a)	$x \mapsto e^{2x}$
27.3 b)	$x \mapsto e^{x}$
27.3 c)	$x \mapsto 2e^{2x} - e^{x}$
27.4 a)	$x \mapsto e^{x}$
27.4 b)	$x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}$
27.4 c)	$x \mapsto \dfrac{4}{3}e^{x} - \dfrac{1}{3}e^{-2x}$
27.4 d)	$x \mapsto (2-x)e^{x}$
27.4 e)	$x \mapsto \left(4x + \dfrac{3}{2}\right)e^{-2x} + \dfrac{1}{2}$
27.4 f)	$x \mapsto (2-x)e^{2-2x}$
27.5 a)	$x \mapsto \cos(x) + 2\sin(x)$
27.5 b)	$x \mapsto 2\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x) - 1$
27.5 c)	$x \mapsto e^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$
27.5 d)	$x \mapsto e^{-x}\sin(x)$
27.6 a)	$y : t \mapsto y_0 e^{-\frac{t-t_0}{\tau}}$
27.6 b)	$y : t \mapsto y_0\cos(\omega(t-t_0))$

Corrigés

27.1 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 12y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{12x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{12x}$.

Alors, $y_0(0) = 56 = \lambda$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 56e^{12x}$.

27.1 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \mu + 1$ soit $\mu = -1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} - 1$. Alors, $y_0(0) = 5 = \lambda - 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 6e^{x} - 1$.

27.1 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 3y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{3x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 3\mu + 5$ soit $\mu = -5/3$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{3x} - 5/3$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda - 5/3$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \dfrac{8e^{3x} - 5}{3}$.

27.1 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - 2y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{2x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = 2\mu + 12$ soit $\mu = -6$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{2x} - 6$.

Alors, $y_0(0) = 3 = \lambda - 6$. Finalement, $y_0 : x \mapsto 9e^{2x} - 6$.

27.2 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation est homogène et son ensemble de solutions est $\left\{x \mapsto \lambda e^{-x/5},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x/5}$.

Alors, $y_0(1) = e = \lambda e^{-1/5}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto e^{(6-x)/5}$.

27.2 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' + \frac{2}{7}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{-2x/7},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 + 2\mu = 2$ soit $\mu = 1$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-2x/7} + 1$. Alors, $y_0(7) = -1 = \lambda e^{-2} + 1$. Finalement, $y_0 : x \mapsto -2e^{-2x/7+2} + 1$.

27.2 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \sqrt{5}y = 0$ est $\left\{x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x},\ \lambda \in \mathbb{R}\right\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 - \sqrt{5}\mu = 6$ soit $\mu = -\frac{6}{\sqrt{5}}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}}$.

Alors, $y_0(0) = \pi = \lambda - \frac{6}{\sqrt{5}}$. Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \pi\right)e^{\sqrt{5}x} - \frac{6}{\sqrt{5}}$.

27.2 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' - \pi y = 0$ est $\{x \mapsto \lambda e^{\pi x},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$. De plus, si μ est une solution particulière constante, alors $0 = \pi\mu + 2e$ soit $\mu = -\frac{2e}{\pi}$. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{\pi x} - \frac{2e}{\pi}$. Alors, $y_0(\pi) = 12 = \lambda e^{\pi^2} - \frac{2e}{\pi}$.

Finalement, $y_0 : x \mapsto \left(12 + \frac{2e}{\pi}\right)e^{\pi x - \pi^2} - \frac{2e}{\pi}$.

27.3 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 2$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{2x}$.

27.3 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ donc on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 1$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

27.3 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont 2 et 1 (car $2 + 1 = 3$ et $2 \cdot 1 = 2$ et on reconnaît $r^2 - (2+1)r + 2 \cdot 1$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda + 2\mu = 3$. Ce système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $\mu = 2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 2e^{2x} - e^{x}$.

27.4 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 1 = 0$ dont les solutions sont -1 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - \mu = 1$. En additionnant et soustrayant ces relations, on obtient $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto e^{x}$.

27.4 b) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 3r + 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et -2 (car $-1 - 2 = -3$ et $(-2) \cdot (-1) = 2$ et on reconnaît $r^2 - (-2-1)r + (-2) \cdot (-1)$). L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 2$ et $y'(0) = -\lambda - 2\mu = 3$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 2$ et $-\mu = 5$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto 7e^{-x} - 5e^{-2x}$.

27.4 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r - 2 = 0$. Le discriminant du trinôme vaut 9 et ses racines sont -2 et 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\left\{x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda e^{x} + \mu e^{-2x}$.

Alors, $y(0) = \lambda + \mu = 1$ et $y'(0) = \lambda - 2\mu = 2$. Le système se réduit en $\lambda + \mu = 1$ et $-3\mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{x} - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{-2x}$.

27.4 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 - 2r + 1 = 0$ dont la racine double est 1. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda + \mu x)\mathrm{e}^{x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda + \mu x)\mathrm{e}^{x}$.

Alors, $\lambda = 2$ et $\lambda + \mu = 1$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - x)\mathrm{e}^{x}$.

27.4 e) On note y_0 l'unique solution.

L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$ dont l'unique solution est -2. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-2x}\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

de plus $x \longmapsto \dfrac{1}{2}$ est une solution de l'équation différentielle, il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda x + \mu)\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2}$.

les conditions initiales donnent $\mu + \dfrac{1}{2} = 2$ et $\lambda - 2\mu = 1$, et ainsi, $y_0 : x \mapsto \left(4x + \dfrac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-2x} + \dfrac{1}{2}$.

27.4 f) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 4r + 4 = 0$ dont la racine double est -2. L'ensemble des solutions de l'équation est donc $\left\{x \mapsto (\lambda + \mu x)\mathrm{e}^{-2x},\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Ainsi, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto (\lambda + \mu x)\mathrm{e}^{-2x}$.

Alors, $y(1) = (\lambda + \mu)\mathrm{e}^{-2} = 1$ et $y'(1) = (-2\lambda + \mu - 2\mu)\mathrm{e}^{-2} = -3$. Le système s'écrit $\lambda + \mu = \mathrm{e}^2$ et $2\lambda + \mu = 3\mathrm{e}^2$. Il se réduit en $\lambda + \mu = \mathrm{e}^2$ et $\lambda = 2\mathrm{e}^2$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto (2 - x)\mathrm{e}^{2-2x}$.

27.5 a) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + 1 = 0$ dont les solutions sont i et $-$i. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \cos(x) + \mu \sin(x)$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y_0'(0) = 2 = \mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \cos(x) + 2\sin(x)$.

27.5 b) On note y_0 l'unique solution.

L'équation caractéristique de l'équation homogène associée est $r^2 + 4 = 0$ dont les solutions sont 2i et $-$2i. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

de plus $x \longmapsto -1$ est une solution de l'équation différentielle,

il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x) - 1$.

les conditions initiales donnent $\lambda - 1 = 1$ et $2\mu = 1$, et ainsi, $y_0 : x \mapsto 2\cos(2x) + \dfrac{1}{2}\sin(2x) - 1$.

27.5 c) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2 + r + 1 = 0$. Les résultats sur les racines de l'unité assurent que les solutions de cette équation sont $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{\mathrm{j}}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\left\{x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(\lambda \cos\frac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin\frac{\sqrt{3}x}{2}\right),\ (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(\lambda \cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} + \mu \sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

Alors, $y_0(0) = 1 = \lambda$ et $y_0'(0) = -1 = -\dfrac{\lambda}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\mu$. Ainsi, $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x/2}\left(\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)$.

27.5 d) Notons y_0 l'unique solution de ce problème différentiel. L'équation caractéristique associée est $r^2+2r+2=0$. Le discriminant réduit du trinôme vaut -1 et ses racines sont $-1-\mathrm{i}$ et $-1+\mathrm{i}$. Ainsi, l'ensemble des solutions à valeurs réelles de l'équation homogène est $\left\{x \mapsto \mathrm{e}^{-x}(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x)),\ (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\right\}$. Il existe donc $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $y_0 : x \mapsto \mathrm{e}^{-x}(\lambda\cos(x)+\mu\sin(x))$.

Alors, $y_0(0)=0=\lambda$ et $y_0'(0)=1=-\lambda+\mu$. Ainsi, $y_0 : x\mapsto \mathrm{e}^{-x}\sin(x)$.

....

27.6 b) L'équation caractéristique : $x^2+\omega^2=0$ a pour solutions $\mathrm{i}\omega$ et $-\mathrm{i}\omega$. Donc il existe λ et μ tels que : $y(t) = \lambda\cos(\omega t)+\mu\sin(\omega t)$

On cherche l'unique fonction de cette forme qui vérifie $y(t_0)=y_0 \quad$ et $\quad y'(t_0)=0$.

La fonction $t\mapsto y_0\cos(\omega(t-t_0))$ possède ces trois propriétés caractéristiques, elle est donc la solution.

....

Fiche nº 28. Equations différentielles

Réponses

28.1 a) $\boxed{t \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}$

28.1 b) $\boxed{t \longmapsto 1}$

28.1 c) $\boxed{t \longmapsto t^2 - 2 + 3\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}}$

28.2 a) $\boxed{t \longmapsto \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right)}$

28.2 b) $\boxed{t \longmapsto (t+1)\mathrm{e}^t}$

28.2 c) $\boxed{t \longmapsto \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t + \cos(t) + \sin(t)\right)}$

28.2 d) $\boxed{t \longmapsto \frac{1}{4}(2t+3)\mathrm{e}^t + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}}$

28.3 a) $\boxed{x \longmapsto \frac{3}{2}\mathrm{e}^{x^2} - \frac{1}{2}}$

28.3 b) $\boxed{t \longmapsto t - 2 + \mathrm{e}^{1-t}}$

28.3 c) $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{3}x - \frac{1}{3x^2}}$

28.3 d) $\boxed{x \longmapsto \ln(x) \cdot \ln\left(-\frac{\ln(x)}{\ln(2)}\right)}$

28.4 a) $\boxed{x \longmapsto -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}$

28.4 b) $\boxed{x \longmapsto 3x^2 - 10x + 21}$

28.4 c) $\boxed{x \longmapsto -\frac{1}{3}x^2 + x - \frac{17}{9}}$

28.4 d) $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}}$

28.4 e) $\boxed{x \longmapsto \frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{9}}$

28.4 f) $\boxed{x \longmapsto \frac{5}{12}x^4 - \frac{5}{9}x^3 + \frac{1}{18}x^2 + \frac{44}{27}x}$

Corrigés

28.1 a) On note f la solution. f vérifie $y' + t\,y = 0$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$

de plus $f(0) = 1$ donc f est la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$

28.1 b) On note f la solution.

$t \mapsto 1$ est une solution de $y'(t) + t\,y(t) = t$ et les solutions de $y'(t) + t\,y(t) = 0$ vérifient $\exists k \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} + 1$

de plus $f(0) = 1$ donc f est la fonction $t \longmapsto 1$

28.1 c)

Les solutions de $y'(t) + t\,y(t) = 0$ vérifient $\exists k \in \mathbb{R} : \forall t \in \mathbb{R},\ y(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.

Pour trouver une solution particulière on utilise la méthode de variation de la constante en cherchant une solution sous la forme $t \longmapsto k(t)\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$, ce qui nous amène à trouver une primitive de $t \longmapsto t^3\mathrm{e}^{\frac{t^2}{2}}$.

On trouve ainsi que $t \longmapsto t^2 - 2$ est une solution de $y'(t) + t\,y(t) = t^3$

En notant f la solution on sait qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t^2 - 2 + k\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$

de plus $f(0) = 1$ ce qui donne $k = 3$. En conclusion f est la fonction $t \longmapsto t^2 - 2 + 3\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$

28.2 a) On note f la solution.

On remarque que $t \mapsto \frac{1}{2}\mathrm{e}^t$ est une solution de $y'(t) + y(t) = \mathrm{e}^t$ donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^t + k\mathrm{e}^{-t}$

de plus $f(0) = 1$ donc f est la fonction $t \longmapsto \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\right)$

28.2 b) En cherchant une solution sous la forme $t \mapsto ate^t$ on trouve que $t \mapsto te^t$ est une solution de $y'(t) - y(t) = e^t$.

La solution f vérifie : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t\mathrm{e}^t + k\mathrm{e}^t$

de plus $f(0) = 1$ donc f est la fonction $t \longmapsto (t+1)\mathrm{e}^t$

28.2 c) On note f la solution.

On remarque que $t \mapsto \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t$ est une solution de $y''(t) + y(t) = \mathrm{e}^t$

donc il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^t + a\cos(t) + b\sin(t)$

de plus $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$ nous donne $a = b = \dfrac{1}{2}$ donc f est la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{2}\big(\mathrm{e}^t + \cos(t) + \sin(t)\big)$

28.2 d) En cherchant une solution sous la forme $t \mapsto at\mathrm{e}^t$ on trouve que $t \mapsto \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^t$ est une solution de $y''(t) - y(t) = e^t$.

La solution f vérifie : il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^t + a\mathrm{e}^t + b\mathrm{e}^{-t}$

de plus $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$ nous donne $a = \dfrac{3}{4}$ et $b = \dfrac{1}{4}$ donc f est la fonction $\longmapsto \dfrac{1}{2}t\mathrm{e}^t + \dfrac{3}{4}\mathrm{e}^t + \dfrac{1}{4}\mathrm{e}^{-t}$

28.3 a) On remarque que $x \longmapsto -\dfrac{1}{2}$ est une solution particulière.

Sur $I = \mathbb{R}$, $\quad y'(x) = x + 2xy(x) \iff y'(x) - 2xy(x) = x \iff \exists k \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = -\dfrac{1}{2} + k\mathrm{e}^{x^2}$

de plus $y(0) = 1$ donne $k = \dfrac{3}{2}$. La solution est la fonction $\longmapsto \dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{x^2} - \dfrac{1}{2}$

28.3 b) On cherche une solution particulière sous la forme d'un polynôme du premier degré et on trouve que $t \longmapsto t-2$ est une solution de $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = t$.

Les solutions de $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = 0$ vérifient : il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = (at+b)\mathrm{e}^{-t}$

La solution f vérifie : il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t - 2 + (at+b)\mathrm{e}^{-t}$

et enfin $f(1) = 0$ et $f'(1) = 0$ permet de conclure : La solution est la fonction $t \longmapsto t - 2 + \mathrm{e}^{1-t}$

28.3 c) Sur $I =]0;+\infty[$, $\quad x^3y'(x) - x^2y(x) = 1 \iff y'(x) - \dfrac{1}{x}y(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Les solutions de $y'(x) - \dfrac{1}{x}y(x) = 0$ vérifient : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = kx$.

La méthode de variation de la constante permet de trouver la solution particulière : $x \longmapsto -\dfrac{1}{2x^2}$

Les solutions de $y'(x) - \dfrac{1}{x}y(x) = \dfrac{1}{x^3}$ vérifient : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = kx - \dfrac{1}{2x^2}$.

et enfin $y(1) = 0$ permet de conclure : La solution est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{3}x - \dfrac{1}{3x^2}$

28.3 d) Sur $I =]0;1[$, $\quad x\ln(x)y'(x) - y(x) = \ln(x) \iff y'(x) - \dfrac{1}{x\ln(x)}y(x) = \dfrac{1}{x}$.

On remarque que ln est une solution non nulle de $y'(x) - \dfrac{1}{x\ln(x)}y(x) = 0$ donc l'ensemble des solutions de cette équation homogène est $\big\{x \longmapsto k\ln(x) \mid k \in \mathbb{R}\ \big\}$

La méthode de variation de la constante permet de trouver la solution particulière : $x \longmapsto \ln(x) \times \ln(-\ln(x))$

Les solutions de $y'(x) - \dfrac{1}{x\ln(x)}y(x) = \dfrac{1}{x}$ vérifient : il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]0,1[, \quad y(x) = k\ln(x) + \ln(x) \times \ln(-\ln(x))$.

et enfin $y(1/2) = 0$ permet de conclure :

La solution est la fonction $x \longmapsto -\ln(x) \times \ln(\ln(2)) + \ln(x) \times \ln(-\ln(x))$

28.4 a) L'étude du degré d'une solution polynomiale P permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 1$.

Soit $P \in \mathbb{R}_1[X]$, on note $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $P(x) = ax + b$,

P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R}, \quad a - 2(ax+b) = x \iff -2a = 1$ et $a - 2b = 0$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto -\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}$

28.4 b) L'étude du degré d'une solution polynomiale P permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$,

P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad 2(2ax + b) + ax^2 + bx + c = 3x^2 + 2x + 1 \iff a = 3 \ ,\ 4a + b = 2 \ \text{ et } \ 2b + c = 1$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto 3x^2 - 10x + 21$

28.4 c) L'étude du degré d'une solution polynomiale P permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$,

P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad 2a - 3(ax^2 + bx + c) = x^2 - 3x + 5 \iff -3a = 1 \ ,\ -3b = -3 \ \text{ et } \ 2a - 3c = 5$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto -\dfrac{1}{3}x^2 + x - \dfrac{17}{9}$

28.4 d) L'étude du degré d'une solution polynomiale P permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$,

P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad 8a + 3(2ax + b) + 2(ax^2 + bx + c) = x^2 + 2x \iff 2a = 1 \ ,\ 6a + 2b = 2 \ \text{ et } \ 8a + 3b + 2c = 0$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x - \dfrac{5}{4}$

28.4 e) L'étude du degré d'une solution polynomiale P permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 2$.

Soit $P \in \mathbb{R}_2[X]$, on note $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P(x) = ax^2 + bx + c$,

P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad 2a + 3(ax^2 + bx + c) = x^2 \iff 3a = 1 \ ,\ 3b = 0 \ \text{ et } \ 2a + 3c = 0$

On en déduit que la seule solution polynomiale est $P : x \longmapsto \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{9}$

28.4 f) L'étude du degré d'une solution polynomiale P permet d'affirmer que nécessairement $\deg(P) = 4$.

Soit $P \in \mathbb{R}_4[X]$, on note $(a, b, c, e) \in \mathbb{R}^5$ tel que $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$,

P solution $\iff \forall x \in \mathbb{R},\quad (12ax^2 + 6bx + 2c) + 3(4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d) = 5x^3 - 3x + 5$

$\iff 12a = 5 \ ,\ 12a + 9b = 0 \ ,\ 6b + 6c = -3 \ \text{ et } \ 2c + 3d = 5$

On en déduit qu'une des solutions polynomiales est $P : x \longmapsto \dfrac{5}{12}x^4 - \dfrac{5}{9}x^3 + \dfrac{1}{18}x^2 + \dfrac{44}{27}x$

Fiche n° 29. Fonctions de deux variables

Réponses

29.1 a) .... $\boxed{]0,+\infty[\times[0,+\infty[}$

29.1 b) .... $\boxed{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\geqslant 0\}\backslash\{(0,0)\}}$

29.1 c) .... $\boxed{\varnothing}$

29.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=5y^4+x}$

29.2 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2y\cos(2xy-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2x-1)\cos(2xy-y)}$

29.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2}{1+(2x+y)^2} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{1+(2x+y)^2}}$

29.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\sin(x-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin(x-y)}$

29.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(\mathrm{e}^{xy})-xy\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x^2\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}}$

29.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\,x^{y-1} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^y\ln x}$

29.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$

29.4 a) .... $\boxed{\sin(2t)}$

29.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^{4t}+\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}^{-2t}}}}$

29.4 c) .... $\boxed{-72\cos(4t)-46\sin(4t)}$

29.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)-\dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)}$

29.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial v}(u,v)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)+\dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)}$

29.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

29.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial \theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

29.6 a) .... $\boxed{(0,0)}$

29.6 b) .... $\boxed{(0,3)}$

29.6 c) .... $\boxed{(0,0) \text{ et } (-1,-1).}$

29.6 d) .... $\boxed{(0,1) \text{ et } (0,\mathrm{e}^{-2}).}$

29.6 e) .... $\boxed{(0,0),(1,1) \text{ et } (-1,-1).}$

Corrigés

29.2 b) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Soit $y \in \mathbb{R}$. La première application partielle $f_y : t \mapsto \sin(2ty - y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_y' : t \mapsto 2y\cos(2ty - y)$. On obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_y'(x) = 2y\cos(2xy - y)$ en évaluant en $t = x$.

29.3 d) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. On fixe $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $a \neq (0,0)$ alors la première application partielle en a est $t \mapsto \dfrac{ty^2}{t^2+y^2}$. Sa dérivée est $t \mapsto \dfrac{y^2 \cdot (t^2+y^2) - ty^2 \cdot 2t}{(t^2+y^2)^2}$, d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ en évaluent en $t = x$. Reste à traiter le cas où $a = (0,0)$. On calcule à la main le taux d'accroissement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x-0} = \frac{\frac{x \cdot 0^2}{x^2+0^2} - 0}{x} = \frac{0}{x^3} = 0.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = \lim\limits_{x \to 0} 0 = 0$.

29.4 a) On pourrait simplement dériver $w : t \mapsto 4(\sin t)^2 + 3(\cos t)^2$, mais ce n'est pas l'idée du chapitre. La règle de la chaîne donne : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))\dfrac{\partial u}{\partial t}(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))\dfrac{\partial v}{\partial t}(t) = 8\sin t\cos t + 6\cos t(-\sin t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t)$.

29.5 a) La règle de la chaîne donne $\dfrac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)$, avec les notations $\varphi_1(u,v) = \dfrac{u+v}{2}$ et $\varphi_2(u,v) = \dfrac{v-u}{2c}$. Remarque : c'est le changement de variables utilisé pour résoudre l'équation des ondes. En physique, on note abusivement $x = \varphi_1$ et $y = \varphi_2$.

29.6 a) Calculons les dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + 2y$. La résolution est immédiate.

29.6 b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y - 6$. On résout et on obtient $x = 0, y = 3$.

29.6 c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 6y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x - 6y$.
On résout et on obtient $(0,0)$ et $(-1,-1)$

29.6 d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y$.
On résout et on obtient $x = 0$ et $(\ln y)^2 + 2\ln y = 0$ d'où $y = 1$ ou $y = \mathrm{e}^{-2}$

29.6 e) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x$.
On résout et on obtient $x^3 = y$ et $y^3 = x$ d'où $x = 0$ ou $x^8 = 1$ donc $(0,0), (1,1) et (-1,-1)$.

Fiche n° 30. Séries numériques

Réponses

30.1 a) .... $\boxed{\text{divergente}}$

30.1 b) .... $\boxed{2}$

30.1 c) .... $\boxed{\dfrac{2}{2-\sqrt{2}}}$

30.1 d) .... $\boxed{\dfrac{1}{2\times 3^9}}$

30.2 a) .... $\boxed{\mathrm{e}}$

30.2 b) .... $\boxed{\mathrm{e}^2-3}$

30.2 c) .... $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}}}$

30.2 d) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}}$

30.3 a) .... $\boxed{1}$

30.3 b) .... $\boxed{\dfrac{1}{4}}$

30.3 c) .... $\boxed{\ln(2)}$

30.3 d) .... $\boxed{1}$

30.4 a) .... $\boxed{\dfrac{1}{12}}$

30.4 b) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}}$

30.4 c) .... $\boxed{\text{divergente}}$

30.4 d) .... $\boxed{4}$

30.5 a) .... $\boxed{2}$

30.5 b) .... $\boxed{\dfrac{11}{4}}$

30.5 c) .... $\boxed{16}$

30.5 d) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^3}{(\mathrm{e}-1)^3}}$

30.6 a) .... $\boxed{-\dfrac{2}{9}}$

30.6 b) .... $\boxed{\dfrac{3}{2}}$

30.6 c) .... $\boxed{\dfrac{\mathrm{e}^2(2\mathrm{e}^2-1)}{(\mathrm{e}^2-1)^2}}$

30.6 d) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}-1)^3}}$

Corrigés

30.1 a) La série est géométrique de raison $2 \notin\,]-1,1[$, donc elle diverge.

30.1 b) La série est géométrique de raison $\frac{1}{2} \in\,]-1,1[$, donc elle converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

30.1 c) La série est géométrique de raison $\frac{1}{\sqrt{2}} \in\,]-1,1[$, donc elle converge. De plus, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2}{2-\sqrt{2}}. \qquad (=2+\sqrt{2})$$

30.1 d) La série est géométrique de raison $\frac{1}{3} \in\,]-1,1[$, donc elle converge. De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$. Donc,

$$\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k} - \sum_{k=0}^{9}\frac{1}{3^k} = \frac{3}{2} - \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{10}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{10}}.$$

Autre solution : avec le changement d'indice $j=k-10$, on a

$$\sum_{k=10}^{+\infty}\frac{1}{3^k} = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{j+10}} = \frac{1}{3^{10}}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{3^j} = \frac{1}{3^{10}}\times\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3^{10}}.$$

30.2 a) On reconnaît la série exponentielle $\displaystyle\sum_k \frac{1^k}{k!}$.

30.2 b) On reconnaît la série exponentielle $\displaystyle\sum_k \frac{2^k}{k!}$, et on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2$, donc $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{2^k}{k!} = \mathrm{e}^2 - \frac{2^0}{0!} - \frac{2^1}{1!} = \mathrm{e}^2-3$.

30.2 c) On a $\dfrac{1}{2^k\times k!} = \dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}$ et on reconnaît donc une série exponentielle.

30.2 d) $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}$ est de même nature que la série exponentielle $\displaystyle\sum \frac{(-1)^k}{k!}$, elle est donc convergente.

de plus $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)!} = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = -\left(e^{-1}-1\right)$

30.3 a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+k} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

30.3 b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. On remarque que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3+3k^2+2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} + 1 - \frac{1}{2}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.$$

30.3 c) Soit $n \geqslant 2$ fixé. On remarque que

$$\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{k^2-1}\right) = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2}{(k-1)(k+1)}\right) = \sum_{k=2}^{n}(2\ln(k) - \ln(k+1) - \ln(k-1)) = \ln(2) - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2).$$

30.3 d) Soit $n \geqslant 0$ fixé. On remarque que pour tout k, $\displaystyle\frac{k}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!} = 1 - \frac{1}{(n+1)!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$

30.4 a) On a $\displaystyle\frac{1}{2^{2k}} = \frac{1}{4^k}$, donc la série est géométrique de raison $\displaystyle\frac{1}{4} \in\,]-1,1[$: elle converge. De plus,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

Donc, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{4^k} - \frac{1}{4^0} - \frac{1}{4^1} = \frac{1}{12}.$

30.4 b) On a $\mathrm{e}^{-(k-1)} = \mathrm{e}^{-k}\mathrm{e}^1 = \mathrm{e} \times \dfrac{1}{\mathrm{e}^k}$. Or la série géométrique de raison $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \in\,]-1,1[$ converge.

De plus, $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{\mathrm{e}}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}$, donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k-1)} = \mathrm{e}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^k} - \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}^0} = \mathrm{e}\left(\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1} - 1\right) = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$

Autre solution : le changement d'indice $j = k-1$ donne $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(k-1)} = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-j} = \sum_{j=0}^{+\infty} (\mathrm{e}^{-1})^j = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-1}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}.$

30.4 c) La série diverge grossièrement.

30.4 d) On reconnaît une série géométrique dérivée, de raison $\dfrac{1}{2} \in\,]-1,1[$, donc convergente, dont la somme vaut

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$$

30.5 a) On a $k2^{-k} = \dfrac{1}{2}k\dfrac{1}{2^{k-1}}$; la série $\displaystyle\sum_k k\frac{1}{2^{k-1}}$ est une série géométrique dérivée, de raison $\dfrac{1}{2} \in\,]-1,1[$, et est donc convergente. Sa somme est $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 4.$

30.5 b) La série converge comme somme d'une série géométrique de raison $\dfrac{1}{3} \in\,]-1,1[$ et d'une série géométrique dérivée de même raison, et

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(3k+1)\frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{3^{k-1}} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{3^k} - \frac{1}{3^0} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2} + \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \frac{9}{4} + \frac{3}{2} - 1 = \frac{11}{4}.$$

30.5 c) On reconnaît une série géométrique dérivée deux fois, de raison $\dfrac{1}{2}$, convergente, de somme $\dfrac{2}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3} = 16$.

30.5 d) On a affaire à une série géométrique dérivée deux fois.

30.6 a) $$\sum_{k=0}^{n} k(-2)^{-k} = -\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} k\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} = -\frac{2}{9}$$

30.6 b) $$\sum_{k=0}^{n} k^2 3^{-k} = \frac{1}{9}\sum_{k=2}^{n}(k^2-k)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2} + \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{9}\,\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^3} + \frac{1}{3}\,\frac{1}{\left(1-\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}+\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$$

30.6 c) $$\sum_{k=0}^{n}(k+2)\mathrm{e}^{-2k} = \mathrm{e}^2\sum_{k=2}^{n+2} k\mathrm{e}^{-2(k-1)} = \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{e}^2\left(\frac{1}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}^2}\right)^2} - 1\right) = \mathrm{e}^2\left(\frac{e^4}{(\mathrm{e}^2-1)^2} - 1\right) = \frac{\mathrm{e}^2(2\mathrm{e}^2-1)}{(\mathrm{e}^2-1)^2}$$

30.6 d) $$\sum_{k=0}^{n} k(k+1)\mathrm{e}^{-k} = \sum_{k=1}^{n+1}(k-1)k\mathrm{e}^{-(k-1)} = \frac{1}{\mathrm{e}}\sum_{k=2}^{n+1}(k-1)k\mathrm{e}^{-(k-2)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\mathrm{e}}\,\frac{2}{\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^3} = \frac{2\mathrm{e}^2}{(\mathrm{e}-1)^3}$$

Fiche n° 31. Algèbre linéaire

Réponses

31.1 a) .... $\boxed{(3,-1)}$

31.1 b) .... $\boxed{(-1,3)}$

31.1 c) .... $\boxed{(9/11, 2/11)}$

31.1 d) .... $\boxed{(-2, 4/5, 11/5)}$

31.1 e) .... $\boxed{(-1, 1/2, 1/2)}$

31.2 a) .... $\boxed{2}$

31.2 b) .... $\boxed{1}$

31.2 c) .... $\boxed{1}$

31.2 d) .... $\boxed{2}$

31.2 e) .... $\boxed{2}$

31.2 f) .... $\boxed{1}$

31.3 a) .... $\boxed{2}$

31.3 b) .... $\boxed{2}$

31.3 c) .... $\boxed{3}$

31.3 d) .... $\boxed{4}$

31.4 a) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}}$

31.4 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$

31.4 c) .... $\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}}$

31.4 d) .... $\boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

31.5 a) .... $\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}}$

31.5 b) .... $\boxed{\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}}$

Corrigés

31.1 a) Notons $u = \lambda(0,1) + \mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = 3(0,1) - (-1,2)$.

....

31.1 b) Notons $u = \lambda(0,1) + \mu(-1,2)$. Alors, $\begin{cases} -\mu & = 1 \\ \lambda + 2\mu & = 1 \end{cases}$. Ainsi, $u = -(-1,2) + 3(0,1)$.

....

31.1 c) Notons $u = \lambda(1,2) + \mu(12,13)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ 2\lambda + 13\mu & = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 12\mu & = 3 \\ -11\mu & = -2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = \dfrac{9}{11}(1,2) + \dfrac{2}{11}(12,13)$.

....

31.1 d) On note $u = \lambda(0,1,3) + \mu(4,5,6) + \nu(-1,0,1)$. Alors,

$$\begin{cases} 4\mu - \nu & = 1 \\ \lambda + 5\mu & = 2 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ 4\mu - \nu & = 1 \\ -9\mu + \nu & = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 5\mu & = 2 \\ -\nu + 4\mu & = 1 \\ -5\mu & = -4 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -2(0,1,3) + \dfrac{4}{5}(4,5,6) + \dfrac{11}{5}(-1,0,1)$.

....

31.1 e) Notons $u = \lambda(1,0,1) + \mu(1,1,1) + \nu(-1,-1,3)$. Alors,

$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ \lambda + \mu + 3\nu & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu - \nu & = -1 \\ \mu - \nu & = 0 \\ 4\nu & = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $u = -(1,0,1) + \dfrac{1}{2}(1,1,1) + \dfrac{1}{2}(-1,-1,3)$.

....

31.2 a) Les colonnes de la matrice ne sont pas colinéaires.

....

31.2 b) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

31.2 c) Toutes les lignes sont proportionnelles à la première qui est non nulle.

31.2 d) Les deux premiers vecteurs colonnes sont non colinéaires, le troisième est la somme des deux premiers.

31.2 e) Les deux vecteurs colonnes ne sont pas colinéaires.

31.2 f) Toutes les colonnes sont égales à la première qui est non nulle.

31.3 a) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

En effecutant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $\mathrm{Rg}(A) = 2$.

31.3 b) Si $\sin\theta = 0$, i.e. il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = n\pi$, alors la matrice est égale à $\begin{pmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ et elle est de rang 2.

Sinon, on effectue l'opération élémentaire $L_1 \leftarrow \sin(\theta)L_1 - \cos(\theta)L_2$ pour obtenir la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 car $\sin(\theta) \neq 0$.

31.3 c) En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Ainsi, le rang de la matrice vaut 3.

31.3 d) En effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & -4 \\ 0 & 6 & -7 & -13 \\ 0 & 5 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $C_2 \leftrightarrow C_3$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & -7 & 6 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

En effectuant l'opération élémentaire $L_3 \leftarrow 5L_3 - 7L_2$, on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 9 & -37 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$.

Comme les deux dernières lignes sont linéairement indépendantes, le rang de la matrice vaut 4.

31.4 a) D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 1 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)$. D'autre part, $f(0,1) = (1,-5) = 1 \cdot (1,0) - 5 \cdot (0,1)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

31.4 b) D'une part, $f(0,1) = (1,-5) = -5 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. D'une part, $f(1,0) = (1,3) = 3 \cdot (0,1) + 1 \cdot (1,0)$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

31.4 c) $f(1,2) = (4,-1)$ et $f(3,4) = (10,-1)$. De plus, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base canonique vaut

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $P\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19/2 \\ 9/2 \end{pmatrix}$ et $P\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -43/2 \\ 21/2 \end{pmatrix}$. Donc $f(1,2) = -\dfrac{19}{2}(1,2)+\dfrac{9}{2}(3,4)$ et $f(3,4) = -\dfrac{43}{2}(1,2)+\dfrac{21}{2}(3,4)$.
Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -19 & -43 \\ 9 & 21 \end{pmatrix}$.

31.4 d) Comme $f(1,0,0) = (1,3,0) = (1,0,0)+3(0,1,0)+0(1,1,1)$, $f(0,1,0) = (1,0,1) = 0\cdot(1,0,0)-(0,1,0)+(1,1,1)$ et $f(1,1,1) = (2,2,1) = (1,0,0)+(0,1,0)+(1,1,1)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

31.5 a) Comme $f((1,1)) = (2,-1) = (2,0)-(0,1)$ et $f((1,0)) = (1,1) = \dfrac{1}{2}(2,0)+(0,1)$,
donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

31.5 b) Comme $f(0,1,3) = (4,-1) = -1(0,1)+4(1,0)$, $f(4,5,6) = (15,-1) = -1(0,1)+15(1,0)$ et $f(-1,0,1) = (0,-1) = -(0,1)+0(1,0)$, alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 4 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

Fiche n° 32. Réduction

Réponses

32.1 a) .... $\boxed{\text{oui} \quad 3}$

32.1 b) .... $\boxed{\text{non}}$

32.1 c) .... $\boxed{\text{oui} \quad \sqrt{2}}$

32.1 d) .... $\boxed{\text{non}}$

32.1 e) .... $\boxed{\text{oui} \quad 0}$

32.2 a) .... $\boxed{\text{oui} \quad \text{et } \dim(E_\lambda(A)) = 2}$

32.2 b) .... $\boxed{\text{oui} \quad \text{et } \dim(E_\lambda(A)) = 1}$

32.2 c) .... $\boxed{\text{oui} \quad \text{et } \dim(E_\lambda(A)) = 1}$

32.2 d) .... $\boxed{\text{non}}$

32.3 a) .... $\boxed{1, -1, 3 \quad \text{oui}}$

32.3 b) .... $\boxed{1, 3 \text{ oui}}$

32.3 c) .... $\boxed{1, 2, 3 \text{ non}}$

32.3 d) .... $\boxed{-1, 5 \text{ oui}}$

32.3 e) .... $\boxed{1 \text{ non}}$

32.4 a) .... $\boxed{2, 4, 6 \text{ oui}}$

32.4 b) .... $\boxed{1, 3, 2 \text{ oui}}$

32.4 c) .... $\boxed{7, 5}$

32.4 d) .... $\boxed{1, 2 \text{ non}}$

Corrigés

32.1 a) $AU = 3U$

32.1 b) $AU = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

32.1 c) $AU = \sqrt{2}U$

32.1 d) $AU = \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

32.1 e) $AU = 0$

32.2 a) $\text{rg}(A - 2I_3) = 1$ donc (*Théorème du rang*) $\dim(\ker(A - 2I_3)) = 2$

32.2 b) $\text{rg}(A - 2I_3) = 2$ donc (*Théorème du rang*) $\dim(\ker(A - 2I_3)) = 1$

32.2 c) $\text{rg}(A) = 2$ donc (*Théorème du rang*) $\dim(\ker(A)) = 1$

32.2 d) $\text{rg}(A) = 3$ donc A est inversible.

32.3 a) La matrice est diagonale : les valeurs propres se lisent sur la diagonale.
La matrice est diagonale.

32.3 b) La matrice est diagonale : les valeurs propres se lisent sur la diagonale. La matrice est diagonale.

32.3 c) La matrice est triangulaire : les valeurs propres se lisent sur la diagonale.
$\dim\ker(A - I_4) = 1$, $\dim\ker(A - 3I_4) = 1$ et $\dim\ker(A - 2I_4) = 1$ donc non diagonalisable.

32.3 d) On calcule $\det(A - \lambda I_2) = (1 - \lambda)(3 - \lambda) - 8 = (\lambda - 5)(\lambda + 1)$. Donc $Sp(A) = \{-1, 5\}$
Il y a deux valeurs propres distinctes et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ donc diagonalisable.

32.3 e) On calcule $\det(A - \lambda I_2) = (3 - \lambda)(-1 - \lambda) + 4 = (\lambda - 1)^2$. Donc $Sp(A) = \{1\}$
Une seule valeur propre, si A est diagonalisable, elle est semblable à I donc égale à I absurde

32.4 a) On échelonne $A - \lambda I_3$, on trouve 3 valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable.

32.4 b) On échelonne $A - \lambda I_3$, on trouve 3 valeurs propres distinctes donc diagonalisable.

32.4 c) On échelonne $A - \lambda I_3$, on trouve 5 et 7 comme valeurs propres. $\dim(\ker(A - 7I)) + \dim(\ker(A - 5I)) = 3$ donc A est diagonalisable.

32.4 d) On échelonne $A - \lambda I_3$, on trouve 5 et 7 comme valeurs propres. $\dim(\ker(A - I)) + \dim(\ker(A - 2I)) = 2$ donc A est non diagonalisable.