Exercices de probabilités

Les événements

1 On considère trois événements A, B et C définis sur le même univers Ω.
Déterminer les expressions des événements suivant :
E_1 : « Parmi les trois événements A, B et C, seul A est réalisé. »
E_2 : « Les trois sont réalisés. »
E_3 : « Aucun n'est réalisé. »
E_4 : « Au moins l'un des trois est réalisé. »
E_5 : « Au moins deux d'entre eux sont réalisé. »
E_6 : « Exactement deux sont réalisés. »

Correction :
$E_1 = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ $\quad E_2 = A \cap B \cap C$ $\quad E_3 = \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$
$E_4 = A \cup B \cup C$ $\quad E_5 = (A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$ $\quad E_6 = (A \cap B \cap \overline{C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B \cap C)$

2 On effectue deux tirages sans remise dans une urne contient 2 boules rouges et 3 boules vertes. En introduisant des événements judicieusement choisis , écrire l'événement : « Obtenir deux boules vertes ».

Correction :
On introduit les événements V_1 (resp. V_2) : « le 1er (resp. 2e) tirage donne une boule verte ».
L'événement cherché est alors $V_1 \cap V_2$.

3 Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Ecrire les événements suivants :
- $(X \geqslant 2)$
- F : « X est paire »
- G :« X est un multiple de 3 »

Correction :
$$(X \geqslant 2) = \bigcup_{k=2}^{+\infty} (X = k) \qquad F = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = 2k) \qquad G = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (X = 3k)$$

4 On effectue indéfiniment des tirages avec remise dans une urne contenant 5 boules rouges et 6 boules blanches. Ecrire les événements suivants :
- B_n : « on n'obtient aucune boule blanche au cours des n premiers tirages »en fonction des événements R_i : « on obtient une boule rouge au i-ième tirage »
- A :« on n'obtient jamais de boules blanches »en fonction des événements B_n.

Correction :
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n = R_1 \cap R_2 \cdots \cap R_n$ $\qquad A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$

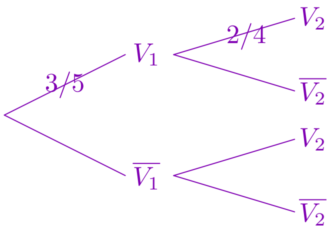
Formules des probabilités composées

5 On effectue deux tirages sans remise dans une urne contient 2 boules rouges et 3 boules vertes. Déterminer la probabilité d'obtenir deux boules vertes.

Correction :
On introduit les événements V_1 (resp. V_2) : « le 1er (resp. 2e) tirage donne une boule verte ».
Alors $P(V_1 \cap V_2) = P(V_1) \times P(V_2/V_1) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{10}$.

car si V_1 est réalisé, alors au moment du 2e tirage, il reste 2 rouges et 2 vertes.
Donc la probabilité de V_2 sachant V_1, $P(V_2/V_1)$, vaut $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Faire le parallèle avec un arbre :



$\boxed{6}$ Une urne contient n boules blanches et n boules noires. On effectue des tirages au hasard d'une boule sans remise de la boule dans l'urne.
Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient blanches ?

Correction :
On pose A : « les n premières boules tirées sont blanches »
et $\forall k \in [\![1, n]\!]$, B_k : « La $k$ème boule tirée est blanche ».
On a alors : $A = B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n$
D'après la formule des probabilités composées,

$$P(A) = P(B_1) \times P(B_2/B_1) \times \cdots \times P\left(B_n/B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}\right).$$

Sachant $B_1 \cap \cdots \cap B_{n-1}$, il reste dans l'urne $n+1$ boules dont une blanche.
$P(A) = \frac{n}{2n} \times \frac{n-1}{2n-1} \times \cdots \times \frac{1}{n+1} = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
La probabilité que les n premières boules tirées soient blanches est $\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Indépendance

$\boxed{7}$ La probabilité de naissance d'un garçon est de 0.51. Un couple a décidé de fonder une famille de 4 enfants. Il désirerait avoir trois filles et un garçon. En supposant les naissances indépendantes et l'absence de possibilité de grossesse multiple, quelles sont les probabilités que le couple réalise son voeu :

1. dans le cas où le garçon est le dernier de la fratrie,
2. dans le cas où le garçon occupe un rang quelconque de la fratrie.

Correction :
Notons F_i : « le $i^{\text{ème}}$ enfant est une fille. »

1. On cherche alors la probabilité de $F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F_4}$. Par indépendance des événements, il vient que :

$$P\left(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F_4}\right) = (0.49)^3 \times 0.51 = 0.060001.$$

2. Notons E : « le garçon occupe un rang quelconque de la fratrie ». Le garçon peut arriver soit en première, soit en deuxième, soit en troisième soit en dernière position. Donc on a :

$$E = \left(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4\right) \cup \left(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4\right) \cup \left(F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap F_4\right) \cup \left(F_1 \cap F_2 \cap F_3 \cap \overline{F_4}\right).$$

Par incompatibilité des événements et par indépendance, il vient que :

$$P(E) = 4 \times (0.49)^3 \times 0.51 = 0.240004.$$

8 On lance un dé non pipé. On note A : « obtenir un résultat supérieur ou égal à 5 » et B : « obtenir un résultat pair ». Les événements A et B sont-ils indépendants ?

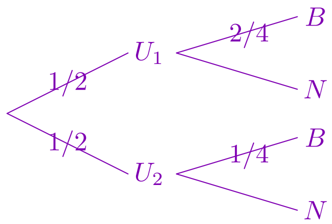
Correction :
D'une part, $P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ et $P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Donc $P(A) \times P(B) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$
D'autre part, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ car $A \cap B$ est l'événement « obtenir 6 ».
Donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, c'est à dire que les événements A et B sont indépendants.

Formule des probabilités totales

9 On considère deux urnes. La première contient 2 boules noires et 2 boules blanches, la deuxième contient 1 boule blanche et 3 noires. On choisit une urne au hasard puis on pioche une boule dans cette urne. Déterminer la probabilité que la boule tirée soit blanche.

Correction :
On note U_1 : « On choisit l'urne 1 », U_2 :« On choisit l'urne 2 », et B : « On obtient une blanche ».
(U_1, U_2) est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P(B/U_1) \times P(U_1) + P(B/U_2) \times P(U_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$



Attention ! Un arbre n'est pas une justification !!!

10 Une compagnie aérienne étudie la réservation sur l'un de ses vols. On considère qu'une place donnée peut être dans deux états réservée ou libre. La place est libre le jour d'ouverture de la réservation et son état évolue chaque jour jusqu'à la fermeture de la réservation de la manière suivante :

– si la place est réservée le jour n, elle le sera encore le jour $n+1$ avec la probabilité $\dfrac{9}{10}$ (pour tenir compte des annulations éventuelles)
– si la place est libre le jour n, elle sera réservée le jour $n+1$ avec la probabilité $\dfrac{4}{10}$.
Pour n entier positif, on note r_n la probabilité que la place soit réservée le jour n.

1. Exprimer r_{n+1} en fonction de r_n.
2. En déduire l'expression de r_n en fonction de n et $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.

Correction :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note R_n l'événement « La place est réservée le jour n. »
D'après l'énoncé, $P(R_1) = 0$ et $P(R_{n+1}/R_n) = \dfrac{9}{10}$ et $P(R_{n+1}/\overline{R_n}) = \dfrac{4}{10}$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(R_n, \overline{R_n})$ est un système complet d'événements.
D'après la formule des probabilités totales, on a :
$$r_{n+1} = P(R_{n+1}) = P(R_n)\, P(R_{n+1}/R_n) + P(\overline{R_n})\, P(R_{n+1}/\overline{R_n}) = r_n \times \frac{9}{10} + (1 - r_n) \times \frac{4}{10}\ \boxed{\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}^*, r_{n+1} = \frac{1}{2} r_n + \frac{2}{5}}$$
2. La suite (r_n) est arithmético-géométrique.
$x = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{5} \iff \dfrac{1}{2}x = \dfrac{2}{5} \iff x = \dfrac{4}{5}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = r_n - \frac{4}{5}$.
On a $v_{n+1} = r_{n+1} - \frac{4}{5} = \frac{1}{2}r_n + \frac{2}{5} - \frac{4}{5} = \frac{1}{2}r_n - \frac{2}{5} = \frac{1}{2}(r_n - \frac{4}{5}) = \frac{1}{2}v_n$.
La suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de terme initial $v_1 = r_1 - \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}$
(comme la place n'est pas réservée le 1er jour, on a $r_1 = 0$).
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = v_1 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
Or $r_n = v_n + \frac{4}{5}$.
Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = \frac{4}{5} - \frac{4}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$

Comme $-1 < \frac{1}{2} < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = \frac{4}{5}}$.

Au bout d'un grand nombre de jours, il y a 80% de chance que la place soit réservée.

Formule de Bayes

---

11 Des études antérieures ont montré que 25% des infections graves sont dues à des infections nosocomiales et que 15% des infections graves non dues à des infections nosocomiales provoque un décès tandis que cette proportion s'élève à 30% quand il s'agit d'une infection nosocomiale.
Dans un service hospitalier, un décès survient suite à une infection grave.
Quelle est la probabilité que le décès soit dû à une infection nosocomiale ?

Correction :
Notons D : « un décès survient suite à une infection grave » et N :« infection grave dûe à une maladie nosocomiale ».
$(N, \overline{N})$ forme un système complet d'événements. D'après la formule de Bayes,

$$\begin{aligned} P(N/D) &= \frac{P(N \cap D)}{P(D)} \\ &= \frac{P(D/N)P(N)}{P(D/N)P(N) + P(D/\overline{N})P(\overline{N})} \\ &= \frac{0.3 \times 0.25}{0.3 \times 0.25 + 0.15 \times 0.75} \\ &= 0.4 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{P(N/D) = 0.4}$

12 Parmi cent dés cubiques, vingt-cinq sont pipés de telle sorte que la probabilité d'obtenir 6 soit $\frac{1}{2}$ et que les autres numéros aient la même probabilité d'apparaître. Les autres dés ne sont pas pipés.
On prend un dé au hasard parmi les cent et on le lance. On obtient 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?

Correction :
Notons A l'événement « Le dé est pipé » et B l'événement « Obtenir un 6 ».
On doit calculer $P_B(A)$.

$(A, \overline{A})$ est un système complet d'événement. D'après la formule de Bayes,

$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(B/A)P(A)}{P(B/A)P(A) + P(B/\overline{A})P(\overline{A})}$

Or $P(A) = \frac{25}{100} = \frac{1}{4}$, $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = \frac{3}{4}$. $P(B/\overline{A}) = \frac{1}{6}$ car il y a équiprobabilité. $P_A(B) = \frac{1}{2}$

Donc $P_B(A) = \dfrac{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}}{\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{3}{4}} = \dfrac{\dfrac{1}{8}}{\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}} = \dfrac{\dfrac{1}{8}}{\dfrac{2}{8}} = \dfrac{1}{2}$.

La probabilité que le dé soit pipé sachant que l'on a obtenu 6 est $\dfrac{1}{2}$.

DES VARIABLES ALÉATOIRES

13 Une urne contient 2 boules blanches et 3 boules noires. On tire les boules une à une au hasard jusqu'à ce qu'il ne reste que des boules d'une seule couleur dans l'urne. Soit X le nombre de tirages nécessaires. Déterminer la loi de X et le nombre moyen de tirages nécessaires.

Correction :
$X(\Omega) = \{2, 3, 4\}$.
On note B_i (resp N_i) : « on obtient une blanche (resp. noire) au $i^{\text{ème}}$ tirage.
On adopte la notation $A \cap B = AB$.

$P(X=2) = P(B_1 \cap B_2) = P(B_1)P(B_2/B_1) = \dfrac{2}{5}\times\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{10}$

$$\begin{aligned}P(X=3) &= P(B_1N_2B_3 \cup N_1B_2B_3 \cup N_1N_2N_3)\\ &= P(B_1N_2B_3) + P(N_1B_2B_3) + P(N_1N_2N_3) \text{ par incompatibilité}\\ &= P(B_1)P_{B_1}(N_2)P_{B_1N_2}(B_3) + P(N_1)P_{N_1}(B_2)P_{N_1B_2}(B_3) + P(N_1)P_{N_1}(N_2)P_{N_1N_2}(N_3)\\ &= \frac{2}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}\times 3 = \frac{3}{10}\end{aligned}$$

$P(X=4) = 1 - P(X=2) - P(X=3) = \dfrac{6}{10}$

Le nombre moyen de tirages nécessaires correspond à $E(X)$.
$E(X) = 2\times\dfrac{1}{10} + 3\times\dfrac{3}{10} + 4\times\dfrac{6}{10} = \dfrac{2+9+24}{10} = \dfrac{35}{10} = \dfrac{7}{2}$

14 Une urne contient 10 boules blanches et 20 boules vertes.
On effectue des tirages successifs avec remise jusqu'au premier changement de couleur. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Déterminer la loi de X.
2. Montrer que X admet une espérance et une variance et déterminer leur valeur.

Correction :
1. $X(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.
$\forall k \in \mathbb{N}^*$, On note B_k : « on obtient une blanche au $k$ème tirage » et $V_k = \overline{B_k}$.
Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} = [\![2, +\infty[\![$.

$$\begin{aligned}P(X=n) &= P\big((V_1 \cap \dots \cap V_{n-1} \cap B_n) \cup (B_1 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap V_n)\big)\\ &= P(V_1 \cap \dots \cap V_{n-1} \cap B_n) + P(B_1 \cap \dots \cap B_{n-1} \cap V_n) \quad \text{par incompatibilité}\\ &= P(V_1)\dots P(V_{n-1}) \times P(B_n) + P(B_1)\dots P(B_{n-1}) \times P(V_n) \quad \text{par indépendance.}\\ &= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\times\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\times\frac{2}{3}\end{aligned}$$

2. • $E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} kP(X=k)$ (sous réserve d'absolue convergence qui revient à la convergence car la série est à termes positifs)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}S_n = \sum_{k=2}^{n} kP(X=k) &= \sum_{k=2}^{n} k\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\times\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\times\frac{2}{3}\right)\\ &= \frac{1}{3}.\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}+\frac{2}{3}\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\\ &= \frac{1}{3}.\left(\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}-1\right)+\frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-1\right)\end{aligned}$$

On reconnait deux séries géométriques dérivées qui convergent car $|\frac{1}{3}|<1$ et $|\frac{2}{3}|<1$.
Donc $\sum kP(X=k)$ converge : X a une espérance.
De plus

$$\begin{aligned}E(X)=\sum_{k=2}^{+\infty} kP(X=k) &= \frac{1}{3}.\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}-1\right)+\frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}-1\right)\\ &= \frac{1}{3}.\left(\frac{1}{(1-\frac{2}{3})^2}-1\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}-1\right)\\ &= \frac{1}{3}\times 8+\frac{2}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{16}{6}+\frac{5}{6}=\frac{21}{6}\end{aligned}$$

Donc $\boxed{E(X)=\frac{7}{2}}$.

•Pour la variance, on va utiliser la formule de Koenig-Huygens donc on doit étudier si $E(X^2)$ existe.
D'après le théorème de transfert, on doit donc déterminer si $\sum n^2P(X=n)$ converge absolument.

La série $\sum k^2P(X=k)$ converge absolument ssi elle converge car $k^2P(X=k)\geq 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{n} k^2P(X=k) &= \sum_{k=2}^{n} k^2\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{2}{3}\right)\\ &= \sum_{k=2}^{n}(k(k-1)+k)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}+\sum_{k=1}^{n}(k(k-1)+k)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{2}{3}\\ &= \frac{1}{3}.\frac{2}{3}\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}+\frac{2}{3}.\frac{1}{3}.\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}+\sum_{k=2}^{n} k\left(\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right)\\ &= \frac{2}{9}\left(\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}+\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\right)+S_n\end{aligned}$$

On reconnait des séries géométriques dérivées et dérivées secondes, qui convergent car $|\frac{1}{3}|<1$ et $|\frac{2}{3}|<1$.
Ainsi, $\sum k^2P(X=k)$ converge donc converge absolument donc d'après le théorème de transfert, $E(X^2)$ existe

$$\begin{aligned}\text{et } E(X^2)=\sum_{k=2}^{+\infty} k^2P(X=k) &= \frac{2}{9}\times\frac{2}{(1-\frac{2}{3})^3}+\frac{2}{9}\times\frac{2}{(1-\frac{1}{3})^3}+\frac{7}{2}\\ &= \frac{2}{9}\times 2\times 3^3+\frac{2}{9}\times 2\times\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{7}{2}=12+\frac{3}{2}+\frac{7}{2}=17\end{aligned}$$

D'après la formule de Koenig Huygens, $V(X)$ existe et $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=17-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{68}{4}-\frac{49}{4}=\frac{17}{4}$

Remarque : On aurait pu calculer $E(X(X-1))$ pour calculer $E(X^2)$.

$\boxed{15}$ On lance 2 fois une pièce dont la probabilité d'obtenir Pile est p. Ensuite, on relance autant de fois la pièce que l'on a obtenu de Pile aux deux premiers lancers (si on a eu aucun Pile, on ne relance pas la pièce, si on a obtenu deux Piles, on relance deux fois la pièce).

1. Soit X_1 la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus lors des 2 premiers lancers. Déterminer la loi de X_1.
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de piles obtenus au total. Déterminer la loi de X et l'espérance de X.

<u>**Correction :**</u>
1. $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(2,p)$ donc $X_1(\Omega)=\{0,1,2\}$, $P(X_1=0)=q^2$, $P(X_1=1)=2pq$ et $P(X_1=2)=p^2$.
2. $X(\Omega)=[\![0,4]\!]$

Soit on décrit les événements :
Notons X_2 le nombre de piles obtenus au 2ème lancer.
$P(X=0)=P(X_1=0)=q^2$
$P(X=1)=P(X_1=1\cap X_2=0)=P(X_1=1)\times P_{X_1=1}(X_2=0)=2pq^2$ (on relance 1 fois)
$P(X=2)=P([X_1=2\cap X_2=0]\cup[X_1=1\cap X_2=1])=2p^2q+p^2q^2$
$P(X=3)=P(X_1=2\cap X_2=1)=2p^3q$
$P(X=4)=P(X_1=2\cap X_2=2)=p^4$.

OU

On utilise la formule des probas totales avec comme SCE $(X_1=k)_{k\in\{0,1,2\}}$,
$P(X=k)=P(X_1=0)P_{X_1=0}(X=k)+P(X_1=1)P_{X_1=1}(X=k)+P(X_1=2)P_{X_1=2}(X=k)$

Puis : $E(X)=2pq^2+4p^2q+2p^2q^2+6p^3q+4p^4$

$\boxed{16}$ Une urne contient deux boules blanches et $n-2$ boules rouges. On tire des boules successivement et sans remise. On appelle X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y le nombre de boules rouges restant dans l'urne à ce moment.

1. Déterminer la loi de X et calculer $E(X)$.
2. Exprimer Y en fonction de X et calculer $E(Y)$.

Correction :
1. $X(\Omega)=[\![1,n-1]\!]$ On note B_i (resp. R_i) : « on obtient une blanche (resp. rouge) au $i^{\text{ème}}$ tirage ».
$P(X=1)=P(B_1)=\dfrac{2}{n}$.
$P(X=2)=P(R_1\cap B_2)=P(R_1)P(B_2/R_1)=\dfrac{n-2}{n}\dfrac{2}{n-1}=\dfrac{2(n-2)}{n(n-1)}$

$$\begin{aligned}P(X=k)&=P(R_1\cap R_2\cap ...\cap R_{k-1}\cap B_k)\\&=P(R_1)P(R_2/R_1)P(R_3/R_1\cap R_2)\times\cdots\times P(B_k/R_1\cap\cdots\cap R_{k-1})\\&=\frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\cdots\times\frac{n-2-(k-2)}{n-(k-2)}\times\frac{2}{n-(k-1)}\\&=\frac{n-2}{n}\times\frac{n-3}{n-1}\times\frac{n-4}{n-2}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n-k+3}\times\frac{n-k}{n-k+2}\times\frac{2}{n-k+1}=\frac{2(n-k)}{n(n-1)}\end{aligned}$$

Remarque : cette formule marche encore pour $k=1$!

$$\begin{aligned}E(X)&=\sum_{k=1}^{n-1}kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n-1}k\frac{2(n-k)}{n(n-1)}=\frac{2}{n(n-1)}\left(\sum_{k=1}^{n-1}kn-k^2\right)\\&=\frac{2}{n(n-1)}\left(n\frac{n(n-1)}{2}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\right)=n-\frac{2n-1}{3}\\&=(3n-(2n-1))\,3=\frac{n+1}{3}\end{aligned}$$

2. Si $X=k$, alors on a tiré $k-1$ rouges donc il en reste $(n-2)-(k-1)=n-k-1$ donc $Y=n-k-1$.
On a donc $Y=n-X-1$.
Par linéarité de l'espérance, $E(Y)=n-E(X)-1=n-\dfrac{n+1}{3}-1=\dfrac{2n-4}{3}$

$\boxed{17}$ Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![0,4]\!]$.
On suppose que $P(X<3)=\dfrac{1}{4}$, $P(X>3)=\dfrac{1}{3}$ et que les événements $[X=0]$, $[X=1]$ et $[X=2]$ sont équiprobables.

1. Déterminer la loi de X, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.
2. On pose $Y=X+1$. Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Correction :
1.$P(X=3)=1-P(X<3)-P(X>3)=1-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{12}$.
$P(X=0)=P(X=1)=P(X=2)=\dfrac{1}{12}$ et $P(X=4)=\dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned}E(X) &= 0P(X=0)+1P(X=1)+2P(X=2)+3P(X=3)+4P(X=4)\\ &= \frac{1}{12}+\frac{2}{12}+\frac{15}{12}+\frac{4}{3}\\ &= \frac{34}{12}=\frac{17}{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E(X^2) &= 0^2P(X=0)+1^2P(X=1)+2^2P(X=2)+3^2P(X=3)+4^2P(X=4)\\ &= \frac{1}{12}+\frac{4}{12}+\frac{45}{12}+\frac{16}{3}=\frac{1+4+45+64}{12}=\frac{114}{12}=\frac{57}{6}=\frac{19}{2}\end{aligned}$$

Donc $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\dfrac{57}{6}-\left(\dfrac{17}{6}\right)^2=\dfrac{342-289}{36}=\dfrac{53}{36}$

2. $E(Y)=E(X+1)=E(X)+1=\dfrac{23}{6}$ et $V(Y)=V(X)=\dfrac{53}{36}$

$\boxed{18}$ Soit p un réel de $]0,1[$. On considère une variable aléatoire X dont la loi est donnée par $P(X=1)=p$ et $P(X=-1)=1-p$.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. On pose $Y=\frac{1+X}{2}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
3. On pose $Z=\frac{1-X}{2}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire Z ?

Correction :

1. $E(X)=1\times p+(-1)\times(1-p)=2p-1$
   $E(X^2)=1^2\times p+(-1)^2\times(1-p)=1$ donc
   $V(X)=E(X^2)-E(X)^2=1-(2p-1)^2=1-4p^2+4p-1=4p(1-p)$.

2. On pose $Y=\dfrac{1+X}{2}$.
   $X(\Omega)=\{-1,1\}$ et $\dfrac{1+1}{2}=1$ et $\dfrac{1-1}{2}=0$ donc $Y(\Omega)=\{0,1\}$.
   $P(Y=0)=P\left(\dfrac{1+X}{2}=0\right)=P(X=-1)=1-p$
   $P(Y=1)=1-P(Y=0)=p$
   Ainsi, $Y\hookrightarrow\mathcal{B}(1-p)$.

3. On pose $Z=\dfrac{1-X}{2}$.
   $X(\Omega)=\{-1,1\}$ et $\dfrac{1-1}{2}=0$ et $\dfrac{1+1}{2}=-1$ donc $Z(\Omega)=\{0,1\}$.
   $P(Z=0)=P\left(\dfrac{1-X}{2}=0\right)=P(X=1)=p$ et $P(Z=1)=1-p$: $Z\hookrightarrow\mathcal{B}(p)$.

LES LOIS USUELLES

$\boxed{19}$ 20 paires de chaussures sont mélangées dans une armoire, les paires étant séparées. On prend au hasard 10 chaussures. Loi de X, où X est le nombre de pieds gauches.

Correction :
X suit une loi hypergéométrique $\mathcal{H}(40,10,\dfrac{1}{2})$

$\boxed{20}$ Un parking souterrain contient 20 scooters à trois roues, 20 motos et 20 voitures. On choisit un véhicule au hasard, et on note X le nombre de roues de ce véhicule. Déterminer la loi de X, son espérance, et sa variance.

Correction :
$X(\Omega)=\{2,3,4\}$ et $P(X=2)=P(X=3)=P(X=4)=\dfrac{20}{60}=\dfrac{1}{3}$, c'est à dire que $X\hookrightarrow\mathcal{U}([\![2,4]\!])$.

21 Une étude statistique a permis de déterminer que 10% de la population est gauchère. Dans une classe de 20 élèves on note X le nombre de gaucher. Déterminer la loi de X, $E(X)$ et $V(X)$. Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul gaucher ? Au moins deux gauchers ?

Correction :
$X \hookrightarrow \mathcal{B}(20, 0.1)$ $\quad E(X) = 20 \times 0.1 = 2$ et $V(X) = 20 \times 0.1 \times 0.9 = 1.8$
P(« un seul gaucher »)$= P(X=1) = \binom{20}{1} \times 0.1 \times (0.9)^{19} \approx 0.27$
P(« au moins deux gauchers ») $= 1 - P(X=0) - P(X=1)$

$$= 1 - \binom{20}{0} \times (0.9)^{20} - \binom{20}{1} \times 0.1 \times (0.9)^{19}$$
$$\approx 0.61$$

22 Un joueur de casino jour à la roulette. A chaque partie il a la probabilité p de gagner. Les résultats des parties sont indépendants. Il décide de jouer une série illimitée de parties jusqu'à ce qu'il gagne une première partie. Quelle est la loi de X où X est le nombre de parties jouées ?

Correction :
$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$

23 Les chasseurs tuent en moyenne cinq vaches par an. Le nombre de ces vaches prises pour des lapins suit une loi de Poisson.
Calculer la probabilité pour qu'il y ait au plus deux vaches tuées par an. Quelle est la probabilité d'avoir une année sans victime collatérale ?

Correction :
X la variable aléatoire égale au nombre de vaches tuées par an. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(5)$, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-5}.\dfrac{5^k}{k!}$.

$P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = e^{-5}(1 + 5 + \frac{25}{2}) = \frac{37}{2}e^{-5}$
$P(X=0) = e^{-5}$

24 On lance une pièce donnant pile avec la probabilité p (avec $0 < p < 1$). Les lancers sont supposés indépendants. On considère la variable aléatoire X égale au nombre de faces précédant le premier pile.

1. Déterminer la loi de X.
2. On pose $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de Y, donner son espérance et sa variance.
3. En déduire $E(X)$ et $V(X)$.

Correction :

1. $X(\Omega) = \mathbb{N}$.
   $\forall k \in \mathbb{N}$, on note P_k : « on obtient pile au $k$ème lancer » et $F_k = \overline{P_k}$.
   $P(X=0) = P(P_1) = p$.
   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $P(X=n) = P(F_1 \cap \cdots \cap F_n \cap P_{n+1})$
   $$= P(F_1) \times \ldots P(F_n) \times P(P_{n+1}) \quad \text{par indépendance}$$
   $$= p(1-p)^n$$
   On remarque que cette formule marche aussi pour $n = 0$:
   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ P(X=n) = p(1-p)^n.}$
2. $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y=n) = P(X+1=n) = P(X=n-1) = p(1-p)^{n-1}$.
   On observe que $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ donc $E(Y) = \dfrac{1}{p}$ et $V(Y) = \dfrac{1-p}{p^2}$.
3. On a $X = Y - 1$
   Donc par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(Y) - 1 = \dfrac{1}{p} - 1 = \dfrac{1-p}{p}$.

De plus, $V(X) = V(Y) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

$\boxed{25}$ Soit p un réel de $]0,1[$ et n un entier naturel non nul.

a) On suppose que X suit la loi $\mathcal{B}(p)$. Montrer que X^2 suit aussi la loi $\mathcal{B}(p)$.

b) On suppose que X suit la loi binomiale de paramètres n et p. Déterminer la loi de $Y = n - X$.

Correction :

a) $X(\Omega) = \{0,1\}$ donc $Y(\Omega) = \{0,1\}$.
$P(Y=0) = P(X^2=0) = P(X=0) = 1-p$ et $P(Y=1) = P(X^2=1) = P(X=1) = p$. Donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$

b) $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ donc $Y(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$,
$P(Y=k) = P(n-X=k) = P(X=n-k) = \binom{n}{n-k}p^{n-k}(1-p)^k = \binom{n}{k}p^{n-k}(1-p)^k$
donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1-p)$.

Le théorème de transfert

$\boxed{26}$ Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p (avec $0 < p < 1$). Calculer l'espérance des variables aléatoires $Y = e^{tX}$ ($t \in \mathbb{R}$) et de $Z = \dfrac{1}{1+X}$.

Correction :

X est une variable aléatoire finie. D'après le théorème de transfert :

- $$E(Y) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{tk}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\mathrm{e}^{t}p)^k(1-p)^{n-k}$$
$$= (p\,\mathrm{e}^{t}+1-p)^n$$
- $$E(Z) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n+1}\binom{n+1}{k+1}p^k(1-p)^{n-k}$$
$$= \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n+1}{i}p^{i-1}(1-p)^{n-i+1} \quad \text{(i=k+1)}$$
$$= \frac{1}{p(n+1)}\left(\left(\sum_{i=0}^{n+1}\binom{n+1}{i}p^i(1-p)^{n+1-i}\right) - (1-p)^{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{p(n+1)}\left(1-(1-p)^{n+1}\right) = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$$

$\boxed{27}$ Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que la variable aléatoire $Y = X(1-X)$ admet une espérance et la déterminer.

Correction :

$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ donc $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

Pour étudier $E(Y)$, on utilise le théorème de transfert
Etudions si la série $\sum k(1-k)P(X=k)$ converge absolument.

La série n'est pas à terme positifs!!! car $k(1-k) \leq 0$

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $k(1-k)P(X=k) \leq 0$ donc $|k(1-k)P(X=k)| = k(k-1)P(X=k)$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} |k(1-k)P(X=k)| \\ &= \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \times pq^{k-1} \\ &= pq \times \sum_{k=2}^{n} k(k-1)q^{k-2}. \end{aligned}$$

On reconnaît le terme général d'une série géométrique dérivée seconde qui converge car $q \in]0,1[$.
Donc la série $\sum k(1-k)P(X=k)$ converge absolument.
D'après le théorème de transfert, $X(1-X)$ a une espérance et

$$\begin{aligned} E(Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} k(1-k)P(X=k) &= -pq\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} \\ &= -pq \times \frac{2}{(1-q)^3} = -pq \times \frac{2}{p^3} = \frac{-2q}{p^2} \end{aligned}$$

AUTRE METHODE :
$X(1-X) = X - X^2$
Or $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ donc $E(X)$ et $E(X^2)$ existent et d'après la formule de Koenig Huygens, $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$
Donc $E(X^2) = V(X) + E(X)^2 = \dfrac{1-p}{p^2} + \left(\dfrac{1}{p}\right)^2 = \dfrac{2-p}{p^2}$

Donc par linéarité de l'espérance, $X(1-X)$ a une espérance et
$E\Big(X(1-X)\Big) = E(X) - E(X^2) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2-p}{p^2} = \dfrac{p-(2-p)}{p^2} = \dfrac{-2+2p}{p^2} = -2\dfrac{q}{p^2}$

$\boxed{28}$ Soit X une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $\theta \in \mathbb{R}_+^*$.

1. On pose $Y = \dfrac{1}{X+1}$. Montrer que Y admet une espérance et la calculer.
2. On pose $g(t) = E(t^X)$.
   Montrer que la fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ et déterminer $g(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Correction :

1. $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\theta)$, $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\theta}.\dfrac{\theta^k}{k!}$.

Pour étudier $E(Y)$, on utilise le théorème de transfert
La série $\sum \frac{1}{k+1}P(X=k)$ converge absolument ssi $\sum \frac{1}{k+1}P(X=k)$ converge car $\forall k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{k+1}P(X=k) \geq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!} \\ &= e^{-\theta}\sum_{k=0}^{n} \frac{\theta^k}{(k+1)!} \\ &= e^{-\theta}\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\theta^{i-1}}{i!} \\ &= \frac{e^{-\theta}}{\theta}\left(\sum_{i=0}^{n+1} \frac{\theta^i}{i!} - 1\right) \end{aligned}$$

On reconnait une série exponentielle donc la série $\sum \frac{1}{k+1}P(X=k)$ converge donc elle converge absolument.
D'après le théorème de transfert, Y admet une espérance.
$E(Y) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{1}{k+1}P(X=k) = \frac{e^{-\theta}}{\theta}\left(e^{\theta}-1\right) = \dfrac{1-e^{-\theta}}{\theta}$.

2. Pour montrer que la fonction $g(t) = E(t^X)$ est définie sur $\mathbb{R}$, il faut montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, t^X a une espérance

Pour cela, on utilise le théorème de transfert.

Soit $t \in \mathbb{R}$. t^k n'est pas ≥ 0 ! On doit donc étudier la convergence absolue !!

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} |t^k| P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} |t|^k e^{-\theta} \frac{\theta^k}{k!}$$
$$= e^{-\theta} \sum_{k=0}^{n} \frac{(|t|\theta)^k}{k!}$$

On reconnaît le terme général d'une série exponentielle qui converge donc la série $\sum t^k P(X=k)$ converge absolument. D'après le théorème de transfert, $E(t^X)$ existe donc $g(t)$ aussi et

$$E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k P(X=k)$$
$$= e^{-\theta} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t\theta)^k}{k!} = e^{-\theta} \times e^{t\theta} = e^{(t-1)\theta}$$