CALCULS DE DÉRIVÉE

Dérivée d'une fonction composée

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et f une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$.
Alors $f \circ u$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, (f \circ u)'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$.
Autrement dit $(f \circ u)' = u' \times f' \circ u$

Calculer les dérivées des fonctions suivantes (on ne demande pas sur quel ensemble elles sont dérivables) :

$f_1 : x \mapsto \frac{x^2-3x}{x^3-5}$	$f_2 : x \mapsto x^x$	$f_3 : x \mapsto (1+x)^{\frac{1}{x}}$
$f_4 : x \mapsto (x^3+x)e^{-x}$	$f_5 : x \mapsto \ln(\lvert\tan x\rvert)$	$f_6 : x \mapsto \tan(\ln(\cos(x)))$
$f_7 : x \mapsto e^{\cos(\sin(x))}$	$f_8 : x \mapsto \frac{\frac{1}{1+x^2}+\ln(x)}{\cos^2(x)}$	$f_9 : x \mapsto \ln(\frac{1+x^3}{x-x^2})$
$f_{10} : x \mapsto (\frac{x-1}{x+2})^5$	$f_{11} : x \mapsto \sqrt{\frac{x^2+3}{\cos(x)}}$	$f_{12} : x \mapsto (x+e^{\cos(x)})^7$

Réponse

$f_1'(x) = \frac{-x^4+6x^3-10x+15}{(x^3-5)^2}$;
$f_2'(x) = [\ln(x)+1]e^{x\ln(x)} = [\ln(x)+1]x^x$;
$f_3'(x) = \frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} = \frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}(1+x)^{\frac{1}{x}}$;
$f_4'(x) = (-x^3+3x^2-x+1)e^{-x}$;
$f_5'(x) = \frac{1+\tan^2(x)}{\tan(x)}$;
$f_6'(x) = -\tan(x)\times(1+\tan^2(\ln(\cos(x))))$;
$f_7'(x) = -\cos(x)\sin(\sin(x))e^{\cos(\sin(x))}$;
$f_8'(x) = \frac{(-\frac{2x}{(1+x^2)^2}+\frac{1}{x})\cos(x)+2\sin(x)(\frac{1}{1+x^2}+\ln(x))}{\cos^3(x)}$;
$f_9'(x) = \frac{-x^4+2x^3+2x-1}{(1+x^3)(x-x^2)}$;
$f_{10}'(x) = \frac{15(x-1)^4}{(x+2)^6}$;
$f_{11}'(x) = \frac{2x\cos(x)+(x^2+3)\sin(x)}{2\cos^2(x)\sqrt{\frac{x^2+3}{\cos(x)}}}$
$f_{12}'(x) = 7(1-\sin(x)e^{\cos(x)})(x+e^{\cos(x)})^6$.