SOUTIEN INTÉGRATION

1 Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1=\int_0^{\frac12}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \qquad I_2=\int_{\frac12}^{1}\frac{\mathrm{e}^{1/t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \qquad I_3=\int_0^4\sqrt{y}(y-2\sqrt{y})\,\mathrm{d}y$$

$$I_4=\int_{-1}^{1}|x^2-x|\,dx \qquad I_5=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\,\mathrm{d}t \qquad I_6=\int_0^{\pi/4}\sin^3 x\cos x\ \mathrm{d}x$$

2 Soit f la fonction définie sur $]-3,2[$ par $f(x)=\dfrac{3x^2+4x-25}{x^2+x-6}$.
Montrer qu'il existe trois réels a, b et c que l'on déterminera tels que
$\forall x\in]-3,2[\ f(x)=a+\dfrac{b}{x+3}+\dfrac{c}{x-2}$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :

$$I_a=\int_{-\pi}^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}x \qquad I_b=\int_0^x\arctan\,t\,\mathrm{d}t \qquad I_c=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^t\cos(4t)\,\mathrm{d}t \qquad I_d=\int_0^1 y^3e^{y^2}\,\mathrm{d}y$$

4 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'un changement de variable

$I_1=\displaystyle\int_{-1}^{0}\frac{3x-1}{(2x+1)^5}\,\mathrm{d}x$ avec $t=2x+1$ $\qquad I_2=\displaystyle\int_{\sqrt2}^{2}\frac{\mathrm{d}t}{t\sqrt{t^2-1}}$ avec $u=\sqrt{t^2-1}$

$I_3=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^2 x\sin^3 x\,\mathrm{d}x$ avec $t=\cos x$

5 Calculer les intégrales suivantes

$$I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}\ \mathrm{d}x \qquad I_2=\int_0^x\ln(1+t^2)\,dt \qquad I_3=\int_1^2\frac{\ln t}{t}\ \mathrm{d}t \qquad I_4=\int_2^3\frac{1}{1-x^2}\ \mathrm{d}x$$

$$I_5=\int_1^e x^3\ln x\ \mathrm{d}x \qquad I_6=\int_2^3 x\sqrt{3-x}\ \mathrm{d}x \qquad I_7=\int_0^2 x^2e^{3x}\ \mathrm{d}x \qquad I_8=\int_{-1}^{2}e^{-|t|}\ \mathrm{d}t$$

6 Pour n dans $\mathbb{N}$, on pose $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^n\,\mathrm{d}x$. Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

7 On définit pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\ln(1+x^2)dx$.

Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\le I_n\le\dfrac{\ln 2}{n+1}$ puis étudier la convergence de la suite (I_n).

8 Déterminer l'intervalle sur lequel les fonctions suivantes sont dérivables et calculer leur dérivée :

1) $f(x)=\displaystyle\int_0^x\frac{e^{-t}}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$ $\qquad$ 2) $g(x)=\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{e^t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$