CH1 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

Développement limité à l'ordre n en x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $x_0 \in \mathbb{R}$ qui appartient à I ou est une extrémité de I.

- On dit que f admet au point x_0 un développement limité à l'ordre n s'il existe un polynôme P_n, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall x \in D_f \ , \ f(x) \underset{x_0}{=} P_n(x-x_0) + o((x-x_0)^n)$$

- L'égalité précédente s'appelle un développement limité de f à l'ordre n en x_0 et la fonction polynôme $x \mapsto P_n(x-x_0)$ s'appelle la partie régulière du développement, la fonction $o((x-x_0)^n)$ s'appelle le reste du développement.

Unicité du développement limité

Si f possède un développement limité à l'ordre n en x_0, alors celui-ci est unique.

La Formule de Taylor Young, Existence de DL

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ au voisinage de x_0.
Alors f admet un développement limité à l'ordre n en x_0, donné par :

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \circ((x-x_0)^n).$$

Les développements limité usuels au voisinage de 0, à connaître par coeur à l'ordre 3.

$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$

Comment effectuer la somme de deux développements limités ?

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle I contenant 0, admettant en 0 un $DL_n(0)$, alors $f+g$ possède un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est la somme des parties régulières.

Comment effectuer le produit de deux développements limités ?

Si f possède un $DL_n(0)$, g possède un $DL_n(0)$, alors $f \times g$ possède un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est le polynôme de degré inférieur ou égal à n extrait du produit des parties régulières de f et de g.

Comment effectuer la composition de deux développements limités ?

Soient f et g deux fonctions possédant un $DL_n(0)$. **On suppose de plus que** $f(0) = 0$ **ou que** $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$**.**

Alors $g \circ f$ possède un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est le polynôme de degré inférieur ou égal à n obtenu extrait du polynôme composé des deux parties régulières.

Comment primitiver un développement limité ?

On suppose que f' admet un développement limité à l'ordre n en x_0, donné par :

$$f'(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x - x_0) + \cdots + a_n(x - x_0)^n + \circ\left((x - x_0)^n\right)$$

alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en x_0, donné par :

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + a_0(x - x_0) + a_1\frac{(x - x_0)^2}{2} + \cdots + a_n\frac{(x - x_0)^{n+1}}{n+1} + \circ\left((x - x_0)^{n+1}\right).$$

Bilan : A quoi servent les équivalents et les DL ?

- à lever une forme indéterminée dans un calcul de limite. Par conséquent, de démontrer que :
  - ✓ Une fonction est continue en x_0.
  - ✓ Une fonction est prolongeable par continuité en x_0.
  - ✓ Une fonction est dérivable ou $\mathcal{C}^1$ en x_0.
- Trouver la tangente d'une fonction en un point (c'est la partie régulière du DL à l'ordre 1 en ce point) et la position de la courbe par rapport à son asymptote.
- à étudier le comportement asymptotique d'une suite ou d'une fonction , recherche de branche infinie, position relative courbe/asymptote.
- Trouver le DL de la fonction réciproque d'une fonction bijective