FICHE MÉTHODE : ETUDE DE $u_{n+1} = f(u_n)$

I Définition de la suite

Pour montrer que la suite est bien définie, il est souvent nécessaire de montrer par récurrence une propriété du type :

$$\mathcal{P}(n) : \text{« } u_n \quad \text{existe et} \quad u_n \in I \text{ »},$$

où I est un intervalle stable par f, c'est-à-dire $f(I) \subset I$.

II Recherche d'une limite éventuelle

On connaît la propriété suivante :

Limite(s) éventuelle(s)

Si f est continue sur un intervalle I et si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge**, alors sa limite ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.
ℓ est un point fixe de f.

Remarque : cette propriété ne permet pas de conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Cependant, cela permet :

- Si l'équation $f(\ell) = \ell$ n'admet pas de solution, alors on peut conclure que la suite ne converge pas.
- Si on a montré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait (par exemple qu'elle est monotone et bornée), alors cela permet de calculer sa limite.

Trouver les points fixes de f

Pour résoudre $f(x) = x$ d'inconnue x dans I, on peut :

- soit calculer les différentes valeurs x en résolvant l'équation,
- soit appliquer le théorème de la bijection à la fonction $g : x \mapsto f(x) - x$ pour résoudre l'équation $f(x) - x = 0$, ie $g(x) = 0$

III Etude de la monotonie de la suite

On a plusieurs possibilités :

✓ Dans le cas où f est **croissante sur** I, on peut montrer par récurrence que la suite (u_n) est monotone. Vous devez le rédiger à chaque fois.
  - Si $u_0 \leqslant u_1$, alors la suite est croissante.
  - Si $u_0 \geqslant u_1$, alors la suite est décroissante.

✓ On peut étudier directement le signe de $u_{n+1} - u_n$.

✓ Si le signe de $f(x) - x$ sur I est constant, alors cela permet aussi d'obtenir la monotonie de la suite puisque $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n$ possède le même signe.

IV Etude des suites de rangs pairs et impairs

Dans le cas où f est décroissante sur I, on peut montrer par récurrence que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones, de sens contraire.
Vous devez aussi le rédiger à chaque fois par récurrence. L'exercice est en général guidé.

- Si $u_0 \leqslant u_2$, alors la suite (u_{2n}) est croissante et la suite (u_{2n+1}) est décroissante.
- Si $u_0 \geqslant u_2$, alors la suite la suite (u_{2n}) est décroissante et la suite (u_{2n+1}) est croissante.

Remarque : Par ailleurs, si on montre que les deux suites sont bornées alors elles convergeront toutes les deux. Si de plus, leurs limites sont égales, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergera aussi vers cette limite.

V Utilisation du théorème des accroissements finis

Soit ℓ un point fixe de f, c'est à dire une solution de l'équation $f(x) = x$.

- Si f est dérivable et $|f'| \leqslant M$, on peut alors exploiter le théorème des accroissements finis pour montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant M\,|u_n - \ell|$.
- Puis par récurrence, on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \ell| \leqslant M^n\,|u_0 - \ell|$.
- Puis si $M < 1$, comme $\lim M^n = 0$, alors par encadrement $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0$, c'est à dire que (u_n) converge vers ℓ.

De plus, on a une majoration de la distance entre u_n et ℓ. Ceci permet d'utiliser u_n pour obtenir une valeur approchée de ℓ et de le programmer en Python.