CH 1 : Révisions d'analyse suites et fonctions

Les suites particulières

D1. Suite arithmétique

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmétique de raison r si :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} = u_n + r$$

T2. Terme général d'une suite arithmétique et somme des premiers termes

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$$

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_k = (n - n_0 + 1)\frac{u_{n_0} + u_n}{2}$$

D3. Suite géométrique

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est géométrique de raison q si :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} = qu_n$$

T4. Terme général d'une suite géométrique et somme des premiers termes

- Terme général :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$$

- Somme des premiers termes :

Si $q = 1$, $\forall n \geq n_0,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = (n - n_0 + 1)u_{n_0}$

Si $q \neq 1$, $\forall n \geq n_0,\ S_n = \displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = u_{n_0}\frac{1 - q^{n-n_0+1}}{1 - q}$.

D5. Suite arithmético-géométrique

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, $a \neq 1$, $b \neq 0$. On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est arithmético-géométrique si :

$$\forall n \geq n_0, u_{n+1} = au_n + b$$

T6. Terme général d'une suite arithmético-géométrique

Si la suite (u_n) est arithmético-géométrique, on doit appliquer la démarche suivante :

- On résout l'équation « $x = ax + b, x \in \mathbb{R}$ », on note ℓ la solution
- On montre que la suite $(u_n - \ell)_{n \geq n_0}$ est une suite géométrique de raison a et de premier terme $u_{n_0} - \ell$
- On utilise l'expression explicite d'une suite géométrique : $\forall n \geq n_0, u_n - \ell = (u_{n_0} - \ell)a^{n-n_0}$
- Puis on conclut en donnant l'expression générale de u_n : $\forall n \geq n_0, u_n = a^{n-n_0}(u_{n_0} - \ell) + \ell$.

D7. Suite vérifiant une récurrence linéaire d'ordre 2

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

On dit que la suite (u_n) vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 (à coefficients constants) .

T8. Terme général d'une telle suite

Considérons **l'équation caractéristique** (E) : « $z \in \mathbb{C},\ z^2 - az - b = 0$ ».

- Si (E) possède 2 solutions réelles r_1 et r_2. Il existe alors un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n.$$

- Si (E) possède une unique solution r. Il existe alors un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (\alpha + \beta n)r^n.$$

- Si (E) possède deux solutions complexes conjuguées, $z = re^{i\theta}$ et $\overline{z} = re^{-i\theta}$. Il existe alors un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \alpha \mathrm{Re}(z^n) + \beta \mathrm{Im}(z^n) = r^n(\alpha\cos(n\theta) + \beta\sin(n\theta)).$$

La détermination de α et β se fait au cas par cas à partir de deux termes de la suite, en général les deux premiers.

Convergence des suites réelles

Sauf mention du contraire, les suites réelles qui interviennent dans les énoncés qui suivent sont définies à partir d'un rang noté n_0.

D9. Suites majorées, minorées, bornées

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que :

- (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que $\forall n \geq n_0, u_n \leq M$.
- (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que $\forall n \geq n_0, u_n \geq m$.
- (u_n) est bornée si elle est à la fois majorée et minorée, cela peut se traduire par :
  il existe une réel positif K tel que $\forall n \geq n_0, |u_n| \leq K$.

D10. Suites monotones

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que :

- constante si $\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} = u_n$,
- croissante si $\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} \geq u_n$,
- décroissante si $\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} \leq u_n$,
- strictement croissante si $\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} > u_n$,
- strictement décroissante si $\forall n \geq n_0,\ u_{n+1} < u_n$,
- monotone si elle est croissante ou décroissante.

Remarque : une suite croissante (resp. décroissante) est minorée (resp. majorée) par son premier terme.

D11. Limite finie d'une suite réelle

Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit que le nombre réel ℓ est une limite de la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ et on écrit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ si **tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les u_n à partir d'un certain rang**. Ceci est équivalent à :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_1 \geq n_0 \quad / \quad \forall n \geq n_1, \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

- On dit alors que la suite (u_n) est convergente ou encore qu'elle converge vers ℓ.

D12. Limite infinie d'une suite réelle

Soit (u_n) une suite réelle.

- On dit qu'une limite de (u_n) est $+\infty$ et on écrit, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si **tout intervalle non majoré de $\mathbb{R}$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain rang**. Cela peut se traduire par :

$$\forall A > 0, \exists n_1 \geq n_0 \quad / \quad \forall n \geq n_1 \quad , u_n \geq A$$

- Définition analogue pour $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

T13. Propriété(s)

Soit (u_n) une suite réelle et $\ell \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} (u_n - \ell) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |u_n - \ell| = 0\,.$$

T14. Unicité de la limite

Une suite réelle possède au plus une limite. Par commodité, on notera $\lim u_n$ pour $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

T15. Limite non nulle et signe

Si (u_n) converge un réel non nul, alors à partir d'un certain rang n_1, pour tout $n \geq n_1$, u_n est du signe de ℓ.

T16. Suites des termes pairs et impaires

Soit (u_n) une suite réelle et ℓ un réel.

$$(u_n) \text{ converge vers } \ell \Leftrightarrow (u_{2n}) \text{ et } (u_{2n+1}) \text{ convergent aussi vers } \ell.$$

Remarques :

- Ce résultat s'adapte au cas d'une limite infinie
- Ce résultat peut être utilisé pour justifier une divergence : si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) ne tendent pas vers la même limite, alors (u_n) diverge.

T17. Limites et opérations algébriques sur les suites réelles

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- si $\lim u_n = \ell$, et $\lim v_n = \ell'$, ces limites étant finies, alors :

$$\lim(u_n + v_n) = \ell + \ell', \quad \lim u_n v_n = \ell\ell', \quad \text{et si } \ell' \neq 0,\ \lim \frac{u_n}{v_n} = \frac{\ell}{\ell'} \quad .$$

- si $\lim u_n = +\infty$ (resp $-\infty$) :
  - et si (v_n) minorée (resp majorée) alors $\lim(u_n + v_n) = +\infty$ (resp. $-\infty$).
  - $\lim v_n = \ell$, $\ell \neq 0$ alors $\lim u_n v_n = \text{signe}(\ell)\infty$.

- si $\lim u_n = \ell, \ell \neq 0$, $\lim v_n = 0_+$ alors :

$$\lim \frac{u_n}{v_n} = \text{signe}(\ell)\infty$$

- Résultats analogues avec $-\infty$ et 0_-.

T18. « Passage à la limite » dans des inégalités

- Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que, à partir d'un certain rang $u_n \leq v_n$ et $\lim u_n = \ell$ et $\lim v_n = \ell'$. On a alors $\ell \leq \ell'$.
- S'utilise souvent avec une des deux suites qui est constante.

T19. Théorème de convergence par encadrement

Soient $(u_n), (v_n), (w_n)$ des suites réelles telles que,

- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$;
- (u_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ.

On a alors (v_n) qui converge aussi vers ℓ.

T20. Théorème d'entrainement ou de comparaison

Soient $(u_n), (v_n)$ des suites réelles telles que à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$;

- Si $\lim u_u = +\infty$, alors $\lim v_n = +\infty$.
- Si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim u_n = -\infty$.

T21. Suites adjacentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles vérifiant :

- (u_n) est croissante et (v_n) décroissante à partir d'un certain rang n_0 ;
- $\lim\ (u_n - v_n) = 0$.

Alors (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite finie ℓ qui vérifie :

$$\forall n \geq n_0,\ u_n \leq \ell \leq v_n$$

On dit que ces suites sont adjacentes.

T22. Théorème de limite monotone (Très important)

- Toute suite croissante majorée (respectivement décroissante minorée) converge, la limite étant la borne supérieure (respectivement inférieure) de l'ensemble des valeurs de la suite.
- Une suite croissante non majorée (respectivement décroissante non minorée) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

D23. Suites négligeables, suites équivalentes

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.

- S'il existe une suite (ε_n) telle que :

$$u_n = v_n\, \varepsilon_n \text{ , à partir d'un certain rang} \quad \text{et} \quad \lim\, \varepsilon_n = 0,$$

on dit que u_n est négligeable devant v_n et on a $u_n = o(v_n)$.

- S'il existe une suite (w_n) telle que :

$$u_n = v_n w_n \text{ , à partir d'un certain rang} \quad \text{et} \quad \lim\, w_n = 1,$$

on dit que u_n est équivalente à v_n et on utilise la notation : $u_n \sim v_n$.
Si c'est le cas, on a alors aussi $v_n \sim u_n$.

Remarque Que signifie $u_n = o(1)$? Tout simplement, la suite (u_n) tend vers 0.

T24. Caractérisations pratiques

Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles.
Si (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, on a alors :

$$u_n = o(v_n) \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 0$$

$$u_n \sim v_n \iff \lim \frac{u_n}{v_n} = 1$$

T25. Lien équivalence négligeabilité

On a l'équivalence :

$$u_n \sim v_n \iff u_n - v_n = o(v_n)$$

T26. Rappel des croissances comparées

Soient a et b deux réels strictement positifs, q un réel.

Version "négligeabilité"	Version "limite"
$(\ln(n))^b = o(n^a)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0$
$n^a = o(n!)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a}{n!} = 0$
$q^n = o(n!)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{q^n}{n!} = 0$
Si $\lvert q\rvert < 1$, $q^n = o\left(\frac{1}{n^a}\right)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} n^a q^n = 0$
si $q > 1$, $n^a = o(q^n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^a}{q^n} = 0$

T27. Relations de comparaison, limites et signe

Soient u_n et v_n deux suites réelles.

- Si $u_n \sim v_n$ et $\lim v_n = \ell$ alors $\lim u_n = \ell$.
- Si $\ell \in \mathbb{R}^*$ et $\lim u_n = \ell$ alors $u_n \sim \ell$.
- Si $u_n \sim v_n$ et (u_n) de signe constant à partir d'un certain rang alors (v_n) est de même signe à partir d'un certain rang.
- Si $u_n \sim v_n$ et $\lim v_n = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$), alors $\lim u_n = \ell$.

T28. Opérations sur les relations de comparaison

- Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim t_n$ alors, $u_n w_n \sim v_n t_n$ et $\frac{u_n}{w_n} \sim \frac{v_n}{t_n}$.
- r est un réel. (cas particuliers : $r = -1$, $r \in \mathbb{Z}$, $r = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Si } \ u_n \sim v_n, \text{ alors } u_n^r \sim v_n^r.$$

- Si $u_n \sim v_n$, alors $|u_n| \sim |v_n|$.

T29. Changement de variable et équivalents

Si $\lim u_n = \mathbf{b}$ et $f \underset{\mathbf{b}}{\sim} g$, alors $f(u_n) \sim g(u_n)$

Interdictions : Qu'est ce que l'on n'a pas le droit de faire avec des équivalents ?

- d'écrire un équivalent à 0.
- d'additionner des équivalents, ou de les soustraire.
- de composer par une fonction des équivalents (hormis pour une fonction puissance, avec un exposant constant, comme mentionné ci-dessus).

Fonctions réelles d'une variable réelle

Limite d'une fonction d'une variable en un point

D30. Limite en un point fini

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point et x_0 un nombre réel appartenant à I ou étant une extrémité de I.

- On dit que le nombre réel ℓ est une limite de la fonction f en x_0 et on écrit, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que,

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, |f(x) - \ell| \leq \varepsilon\,.$$

On dit alors que f admet en x_0 une limite finie.

- On dit que $+\infty$ est une limite de la fonction f en x_0 et on écrit, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si pour tout nombre réel $A > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que,

$$\forall x \in I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[, f(x) \geq A\,.$$

- Définition analogue pour $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

T31. Unicité de la limite

La limite d'une fonction en un point lorsqu'elle existe, est unique.

D32. Limite à gauche et à droite

Soit f une fonction, x_0 un réel. Si la restriction de f à $]x_0, +\infty[$ (resp. à $]-\infty, x_0[$) admet une limite ℓ ($\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$) en x_0, on dit que f admet ℓ pour limite à droite en x_0. On écrit alors :

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \ell \text{ (\textit{resp.} } \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \ell)$$

ou

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell \text{ (\textit{resp.} } \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell)$$

T33. Lien entre les différentes notions de limite

Soit f une fonction définie sur I et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$. On suppose que I contient les intervalles $[a, x_0[$ et $]x_0, b]$ où a et b sont des réels tels que, $a < x_0 < b$.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \ell$$

D34. Limites en l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant $[a, +\infty[$.

- On dit que le nombre réel ℓ est la limite de la fonction f en $+\infty$ et on écrit,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$$

si l'on a :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists A > 0 \quad / \quad \forall x \in I, \quad (x \geq A \ \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon) \quad .$$

- On dit que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$ (resp $-\infty$) et on écrit,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{resp.} \ -\infty)$$

si l'on a :

$$\forall A > 0, \exists\alpha > 0 \quad / \quad \forall x \in I, \quad x \geq \alpha \Rightarrow f(x) \geq A \quad (\text{resp.} f(x) \leq -A)$$

Soit f une fonction définie sur I contenant un intervalle $]-\infty, b]$. En remplaçant dans les implications précédentes $x \geq \alpha$ par $x \leq -\alpha$ on définit les notions de limite finie et infinie en $-\infty$.

T35. Opérations algébriques sur les limites - cas finies

Si f et g sont définies I, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et possédent des limites finies en x_0, alors :

- $f + g$ possède une limite en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) + \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.
- fg possède une limite en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x) = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)\left(\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\right)$.
- Si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, $\frac{f}{g}$ possède une limite en x_0 et $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.

T36. Opérations algébriques sur les limites - cas de limites infinies

f et g sont définies sur I, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

- Si f est minorée (resp. majorée) au voisinage de x_0 et si g admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en x_0 alors

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x) = \lim_{x\to x_0} g(x).$$

- Si f admet une limite non nulle et g une limite infinie on a :

$$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \begin{cases} +\infty \text{ si les limites de } f \text{ et } g \text{ sont de même signe.} \\ -\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

- Dans le cas où les deux limites sont infinies, on peut dresser le tableau suivant :

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) + g(x)$	$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	indéterminée	$-\infty$

- Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell, \ell \in \mathbb{R}$, et $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ est infinie alors :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell, \ell \neq 0$, et pour $x \neq x_0, g(x) > 0$, au voisinage de x_0, alors on a :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \begin{cases} +\infty \text{ si } \ell > 0 \\ -\infty \text{ sinon.} \end{cases}$$

Récapitulatif des formes indéterminées : "$+\infty - \infty$", $0 \times \infty$", "$\frac{0}{0}$" , "$\frac{\infty}{\infty}$" , "1^{∞}" et "0^0"

T37. Limite d'une composée

Soient f et g deux fonctions, soit x_0 et y_0 appartenant à $\mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, tels que :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = y_0 \text{ et } \lim_{y \longrightarrow y_0} g(y) = \ell.$$

On a alors :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} (g \circ f)(x) = \ell.$$

T38. Limite de l'image d'une suite par une fonction

Si (u_n) tend vers a et si la limite de f en a vaut b, alors

la suite $(f(u_n))$ tend vers b.

T39. Signe d'une fonction de limite non nulle

Soit $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et f une fonction définie au voisinage de x_0,

- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\ell > 0$, alors $f > 0$ au voisinage de x_0.
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\ell < 0$, alors $f < 0$ au voisinage de x_0.

T40. Compatibilité de la limite avec l'ordre

Soient f et g deux fonctions définies sur I, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, telles que :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,\ \ell \in \mathbb{R},\ ,\ \lim_{x \to x_0} g(x) = \ell',\ \ell' \in \mathbb{R}.$$

On suppose qu'au voisinage de x_0 on a $f(x) \leq g(x)$.

On peut alors en conclure que : $\ell \leq \ell'$.

T41. Convergence par encadrement

Soient f, g, h trois fonctions définies sur I, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, telles que :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \leq g(x) \leq h(x)$$

et

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \longrightarrow x_0} h(x) = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R},$$

On a alors :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) \text{ existe et est égale à } \ell.$$

T42. Limite par absorption

Soit f, g, h trois fonctions définies sur I, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et vérifiant :

- $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)h(x)$
- h est bornée
- $\lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = 0.$

On a alors :

$$\lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) \text{ existe et est égale à } 0.$$

T43. Limite par majoration ou minoration

Soient f et g deux fonctions définies sur I, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$, tels que :

$$\forall x \in I,\ f(x) \leq g(x).$$

Alors on a :

$$\text{si } \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty \text{ alors } \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

$$\text{si } \lim_{x \longrightarrow x_0} g(x) = -\infty \text{ alors } \lim_{x \longrightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

T44. LIMITE MONOTONE

Soit f une fonction monotone sur $]a,b[$, un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors f admet une limite finie ou infinie aux bornes de l'intervalle.
C'est à dire :

- Si f est croissante, f possède au point b une limite à gauche finie ou égale à $+\infty$. Cette limite est finie si et seulement si f est majorée sur $]a,b[$ et si c'est le cas :

$$\lim_{\substack{x \to b \\ <}} f(x) = \sup_{]a,b[}(f)$$

- Propriété analogue pour la limite à droite au point a et pour une fonction décroissante.

Continuité

D45. Continuité en un point

Soit f une fonction définie sur un intervalle I non réduit à un point et x_0 un nombre réel appartenant à I ou étant une extrémité de I.

On dit que f est continue en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

D46. Continuité à droite et à gauche

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 un réel.

- On dit que f est continue à gauche en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$.)
- On dit que f est continue à droite en x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ (resp. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$.)

T47. Lien entre les différentes notions de continuité

Soit f une fonction définie au voisinage de x_0 un réel.

$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

T48. Opérations sur les fonctions continues

Si f et g sont continues en x_0 et λ un réel alors

- λf est continue en x_0,
- $f+g$ est continue en x_0,
- fg est continue en x_0
- si $g(x_0) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est continue en x_0,
- si h est continue en x_0, $h \circ f$ est continue en x_0.

T49. Prolongement par continuité

Si f n'est pas définie au point x_0 mais possède en ce point une limite finie ℓ, on dit que f se prolonge par continuité au point x_0. On pose alors $f(x_0) = \ell$ et on considère abusivement que f est définie en x_0. Par construction, elle est forcément continue en x_0 d'où le type du prolongement.

D50. Continuité sur un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue sur I si pour tout x_0 de I, f est continue en x_0.

On désigne par $\mathcal{C}^0(I)$ l'ensemble des fonctions continues sur I.

T51. Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle

Si f et g sont $\mathcal{C}^0(I)$ et λ un réel alors

- λf est continue sur I,
- $f + g$ est continue en I,
- fg est continue en I
- si g ne s'annule pas sur I, $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I,
- si $f(I) \subset J$ et h est continue sur J, $h \circ f$ est continue sur I.

T52. Valeurs intermédiaires (dit TVI)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, continue sur I et $(a, b) \in I^2$.

Alors pour tout $d \in [f(a), f(b)]$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = d$.

T53. Image d'un intervalle

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, continue sur cet intervalle. Alors :

- $f(I)$ est un intervalle.
- En particulier, s'il existe a et b tels que $f(a)f(b) \leq 0$ alors, f s'annule au moins une fois sur $[a, b]$.

T54. Image d'un segment

Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.
Alors il existe x_0 et y_0, éléments de $[a, b]$ tels que :

$$f([a, b]) = [f(x_0), f(y_0)].$$

En particulier f admet en x_0 un minimum, noté $\min\limits_{[a,b]} f$ et en y_0 un maximum noté $\max\limits_{[a,b]} f$. Elle est donc bornée sur $[a, b]$.

En résumé, l'image du segment $[a, b]$ par la fonction continue f est un segment.

T55. Théorème de la bijection

Une fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$. Sa bijection réciproque est elle-même continue et a le même sens de variation sur $f(I)$.

Par exemple si $I = [a, b[$ et f est strictement croissante, alors $f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{x \to b_-} f(x)\right[$. Les autres cas possibles donnent des résultats analogues.

T56. Représentation graphique de la fonction réciproque

Si f est une fonction continue bijective sur l'intervalle I et si l'on se donne un repère orthonormé du plan, la courbe dans ce repère de la fonction réciproque de f sur I est obtenue en appliquant la symétrie orthogonale d'axe la droite d'équation $y = x$ à tous les points de la courbe de f restreinte à I.

Dérivation

D57. Dérivabilité et dérivée en un point, à gauche et à droite

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$. On appelle taux d'accroissement de f en x_0, la fonction, τ_{f,x_0} définit sur $I \backslash \{x_0\}$ par,

$$\tau_{f,x_0} : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On dit que f est dérivable en x_0, de dérivée ℓ en x_0 , si :

$$\lim_{x \to x_0} \tau_{f,x_0}(x) = \ell.$$

On définit de même lorsque cela peut avoir un sens, la dérivée à gauche en x_0 avec la limite à gauche et idem pour la dérivée à droite.

D58. Fonction dérivée d'une fonction dérivable sur un intervalle

Soit f définie et dérivable sur I (i.e. en tout point de I). On définit alors sur I la fonction dérivée de f, notée f' par :

$$\forall x_0 \in I,\ f'(x_0) \overset{\text{def.}}{=} \text{nombre dérivé de } f \text{ en } x_0$$

ou encore,

$$\forall x_0 \in I,\ f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

On définit de manière analogue les fonctions dérivées à gauche et à droite, f_g' et f_d'.

Notation différentielle : On note aussi $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ à la place de f'.

T59. Continuité d'une fonction dérivable en un point

Si f est une fonction dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.

Remarque : La réciproque est fausse. Contre-exemple : $x \mapsto |x|$ est une fonction continue en 0 mais elle n'est pas dérivable en 0.

D60. Tangente et demi-tangente

Soit f une fonction définie sur I. On considère un repère affine du plan et (C) la courbe de f dans ce plan.

- Si f est dérivable en x_0, on appelle tangente à (C) au point d'abscisse x_0, la droite formée des points de coordonnées (x, y) tels que :
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$
- On définit de même en un point x_0 tel que $f_g'(x_0)$ ou $f_d'(x_0)$ existe, la demi-tangente à gauche ou à droite. Par exemple la demi-tangente à gauche en x_0 est formée des points de coordonnées (x, y) tels que :
$$x \leq x_0 \text{ et } y = f_g'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$
- Si $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ou $-\infty$, on appelle tangente à la courbe de f en x_0, la droite d'équation $x = x_0$. On définit de même la demi tangente à gauche ou à droite lorsque $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ <}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ou $-\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = +\infty$ ou $-\infty$.

T61. Dérivées et opérations algébriques sur les fonctions

Soient f et g deux fonctions définies sur I et dérivables en x_0 et λ un réel. On a alors :

- λf est dérivable en x_0 et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$,
- $f + g$ est dérivable en x_0 et :
$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$
- fg est dérivable en x_0 et :
$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$
- si g ne s'annule pas en x_0, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0 et :
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

T62. Dérivée d'une composée

Soient f et g deux fonctions telles que :

f est dérivable sur l'intervalle I et g dérivable sur l'intervalle J, $f(I) \subset J$.

On a alors, $g \circ f$ est dérivable sur I et
$$\forall x \in I,\ (g \circ f)'(x) = f'(x)g'(f(x)).$$

T63. Dérivée d'une réciproque

Soit f une fonction définie et dérivable sur I qui réalise une bijection de I sur $J = f(I)$. On note f^{-1} la bijection réciproque de f et :

$$J' = \left\{y \in J / f'(f^{-1}(y)) \neq 0\right\}.$$

Alors f^{-1} est dérivable sur J' et :

$$\forall y \in J', (f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

D64. La fonction arctan

La fonction tan est une fonction continue et strictement croissante sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Elle réalise une bijection de $]-\pi/2, \pi/2[$ sur $\mathbb{R}$. Sa bijection réciproque est appelée la fonction arctan.

- Elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et
$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$
- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \forall y \in \mathbb{R},\ y = \tan(x) \iff x = \arctan(y)$
- Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel :
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

D65. Les fonctions racines n-ième

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Si n est un entier pair, $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. On appelle racine n-ième sa bijection réciproque, notée $\sqrt[n]{.}$.
Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x}}{x}.$$
- Si n est un entier pair, $x \mapsto x^n$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On appelle racine n-ième sa bijection réciproque, notée $\sqrt[n]{}$.
Elle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et :
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{x}}{x}.$$

Remarque : Dans les deux cas, la fonction racine n-ième coïncide sur $\mathbb{R}_+^*$ avec la fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(x)}$.

T66. Théorème de Rolle

f est une fonction continue sur $[a, b]$, $(a < b)$ dérivable sur $]a, b[$. On suppose que : $f(a) = f(b)$.

Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que : $f'(c) = 0$.

T67. Formule des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ $(a < b)$ et dérivable sur $]a, b[$. Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$$

T68. Caractérisation des fonctions constantes et monotones par leur dérivée

f est une fonction dérivable sur I.

- f est constante sur I si et seulement si, $\forall x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$.
- f est croissante (resp. décroissante) sur I si et seulement si $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0).
- Si $\forall x \in I$, $f'(x) \geq 0$ (resp. ≤ 0), f' ne s'annulant sur I qu'un nombre fini de fois, alors f est strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur I.

Dérivées successives

D69. Fonction p fois dérivable en x_0

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I et $p \in \mathbb{N}^*$, $x_0 \in I$.

On définit la dérivabilité et dérivée p-ième en x_0, par récurrence sur p :

- pour $p = 1$, c'est la notion de dérivée ;
- pour $p > 1$,
si f' est définie sur $I \cap]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[$ $(\alpha > 0)$, et est $p - 1$ fois dérivable en x_0 de dérivée $(p-1)$-ième en x_0 égale à ℓ,
on dit alors de f est p fois dérivable en x_0, de dérivée p-ième égale à ℓ en x_0.
On pose alors $f^{(p)}(x_0) = \ell$.

L'application, si elle est définie sur un sous-ensemble de I non vide, qui à x_0 associe $f^{(p)}(x_0)$ s'appelle la dérivée p-ième de f sur I.

D70. Fonction de classe C^p

Soit f une fonction définie sur I et $p \in \mathbb{N}$.

- On dit que f est de classe C^p sur I si f est p fois dérivable sur I et si $f^{(p)}$ est continue sur I. On écrit alors : $f \in C^p(I)$.
- On dit que f est de classe C^∞ sur I si $\forall p \in \mathbb{N}$, f est de classe C^p sur I. On écrit alors $f \in C^\infty(I)$.

T71. Opérations algébriques sur les fonctions de classe C^p

Soit f et g deux fonctions définies et de classe C^p sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a alors :

- λf est de C^p sur I et $(\lambda f)^{(p)} = \lambda f^{(p)}$.
- $f + g$ est de classe C^p sur I et :
$$(f+g)^{(p)} = f^{(p)} + g^{(p)}.$$
- si g ne s'annule pas I, $\frac{f}{g}$ est de classe C^p sur I.

T72. Composée de fonctions de classes C^p

Soient f et g deux fonctions telles que :

f est de classe C^p sur l'intervalle I et g de classe C^p sur l'intervalle J, $f(I) \subset J$.

On a alors, $g \circ f$ est de classe C^p sur I.

T73. Dérivée $(n+1)$-ième d'un polynôme de degré au plus n

La dérivée $(n+1)$-ème d'un polynôme de degré au plus n est nulle.

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point

D74. Négligeabilité, équivalence

Soient f et g deux fonctions ayant, au voisinage de $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, le même ensemble de définition.

1. S'il existe une fonction ε telle que :

- $f = g \times \varepsilon$ au voisinage de x_0,
- $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$,

on dit que f est négligeable devant g au voisinage de x_0 et on utilise la notation :

$$f(x) \underset{x_0}{=} o(g(x)) \text{ ou plus simplement } f \underset{x_0}{=} o(g).$$

2. S'il existe une fonction h telle que :

- $f = g \times h$ au voisinage de x_0,
- $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 1$,

on dit que f est équivalente à g au voisinage de x_0 et on utilise la notation :

$$f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \text{ ou plus simplement } f \underset{x_0}{\sim} g.$$

T75. Lien entre équivalence et négligeabilité

Soient f et g deux fonctions, $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = -\infty$ ou $x_0 = +\infty$. On a :

$$f \underset{x_0}{\sim} g \iff f - g \underset{x_0}{=} o(g) \iff f \underset{x_0}{=} g + o(g)$$

T76. Compatibilité de l'équivalence avec le produit, le quotient et « la puissance », Signe, limite

- Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{\sim} k$ alors $f \times h \underset{x_0}{\sim} g \times k$ et $\dfrac{f}{h} \underset{x_0}{\sim} \dfrac{g}{k}$.
- Si $f \underset{x_0}{\sim} g$ et $h \underset{x_0}{=} o(g)$ alors $f + h \underset{x_0}{\sim} g$.
- r est un réel.

$$\text{si } f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x) \text{ alors } (f(x))^r \underset{x_0}{\sim} (g(x))^r$$

(cas particuliers : $r \in \mathbb{Z}$,$r = \frac{1}{n}$ où $n \in \mathbb{N}^*$).

- Si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors $|f| \underset{x_0}{\sim} |g|$
- Si $f \underset{x_0}{\sim} g$, alors f et g sont de même signe au voisinage de x_0.
- Si $f(x) \underset{x_0}{\sim} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$ ($\ell \in \mathbb{R}$ ou $\pm\infty$), alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

T77. Changement de variable et équivalents

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \mathbf{b}$ et $f \underset{\mathbf{b}}{\sim} g$, alors $f(u(x)) \underset{x \to a}{\sim} g(u(x))$

Interdictions : Qu'est ce que l'on n'a pas le droit de faire avec des équivalents ?

- d'écrire un équivalent à 0.
- d'additionner des équivalents, ou de les soustraire.
- de composer par une fonction dans des équivalents (hormis pour une fonction puissance, avec un exposant constant, comme mentionné ci-dessus).

T78. Comparaison des fonctions puissances, logarithme et exponentielle

- **Comparaison des fonctions « puissances » entre elles :**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2 / a < b, \left\{ \begin{array}{l} x^b \underset{0}{=} o(x^a) \\ x^a \underset{+\infty}{=} o(x^b) \end{array} \right.$$

- **Comparaison des fonctions $\ln$ et puissances :**

$$\forall a > 0, \forall b > 0 \quad \begin{array}{l} (\ln(x))^b \underset{0}{=} o(\frac{1}{x^a}) \\ (\ln(x))^b \underset{+\infty}{=} o(x^a) \end{array}$$

- **Comparaison des fonctions** exp **et puissances en** $+\infty$:

$$\forall a > 0, \forall b > 0, \quad x^a \underset{+\infty}{=} o(e^{x^b})$$

T79. Equivalents usuels

- **Fonctions "puissances" -** $\forall a \in \mathbb{R}$, on a :

$$x^a - 1 \underset{1}{\sim} a(x-1) \; ; \; (1+h)^a - 1 \underset{h \to 0}{\sim} ah$$

(expliciter les cas particuliers importants : $a = -1, a = 1/2$.)

- **Fonction** ln **:**

$$\ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1 \; ; \; \ln(1+h) \underset{h \to 0}{\sim} h$$

- **Fonction** exp :

$$e^x - 1 \underset{0}{\sim} x.$$

- **Fonctions circulaires :**

$$\sin(x) \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad 1 - \cos(x) \underset{0}{\sim} \frac{1}{2}x^2$$

$$\tan(x) \underset{0}{\sim} x \quad ; \quad \arctan(x) \underset{0}{\sim} x$$

Développements limités

D80. Développement limité à l'ordre n en x_0

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $x_0 \in \mathbb{R}$ qui appartient à I ou est une extrémité de I.

- On dit que f admet au point x_0 un développement limité à l'ordre n s'il existe un polynôme P_n, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n tel que :

$$\forall x \in D_f \; , \; f(x) \underset{x_0}{=} P_n(x - x_0) + o((x - x_0)^n)$$

- L'égalité précédente s'appelle un développement limité de f à l'ordre n en x_0 et la fonction polynôme $x \mapsto P_n(x - x_0)$ s'appelle la partie régulière du développement, la fonction $o((x - x_0)^n)$ s'appelle le reste du développement.
- Le polynôme P_n et la fonction $o((x - x_0)^n)$, lorsqu'ils existent, sont déterminés de manière unique.

T81. Taylor Young, existence de DL

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^n$ sur un intervalle I, $x_0 \in I$. On a, pour tout $x \in I$:

$$f(x) \underset{x_0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o[(x-x_0)^n]$$

Le cas particulier $x_0 = 0$ est très souvent utilisé :

$$f(x) \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^n).$$

T82. Lien dérivabilité et DL à l'ordre 1

Soit f une fonction définie sur l'intervalle I, $x_0 \in I$.
f est dérivable en x_0 de dérivée ℓ ssi f admet le DL à l'ordre 1 en x_0 suivant :

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + \ell(x-x_0) + o((x-x_0))$$

T83. Somme et produit de DL

Soit f et g deux fonctions définies sur I et admettant en x_0 un développement limité à l'ordre n :

$$\begin{aligned} \forall x \quad \in \quad & I, \\ & f(x) \underset{x_0}{=} P_n(x-x_0) + o\left((x-x_0)^n\right) \\ & g(x) \underset{x_0}{=} Q_n(x-x_0) + o\left((x-x_0)^n\right) \end{aligned}$$

Soit R_n le polynôme obtenu à partir du produit des polynômes P_n et Q_n en ne conservant que les monômes[1] d'exposant inférieur ou égal à n. Soit (α, β) un couple de réels.
Alors $\alpha f + \beta g$ et $f.g$ admettent en x_0 un développement limité à l'ordre n :

$$\begin{aligned} \alpha f(x) + \beta g(x) &\underset{x_0}{=} \alpha P_n(x-x_0) + \beta Q_n(x-x_0) + o\left((x-x_0)^n\right) \ ; \\ f(x)g(x) &\underset{x_0}{=} R_n(x-x_0) + o\left((x-x_0)^n\right). \end{aligned}$$

T84. Primitivation d'un DL

Soit $f \ : \ I \mapsto \mathbb{R}$ dérivable sur I.
On suppose que f' admet un développement limité à l'ordre n en x_0, donné par :

$$f'(x) \underset{x_0}{=} a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \circ\left((x-x_0)^n\right)$$

alors f admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en x_0, donné par :

$$f(x) \underset{x_0}{=} f(x_0) + a_0(x-x_0) + a_1\frac{(x-x_0)^2}{2} + \cdots + a_n\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} + \circ\left((x-x_0)^{n+1}\right).$$

Remarque : Cette propriété permet d'obtenir un DL de la fonction arctan en 0.

1. un monôme est de la forme aX^k, a réel, k entier naturel

T85. Composition de DL

Soient f et g deux fonctions possédant un $DL_n(0)$. **On suppose de plus que $f(0) = 0$ ou que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.**
Alors $g \circ f$ possède un $DL_n(0)$ dont la partie régulière est le polynôme de degré inférieur ou égal à n obtenu extrait du polynôme composé des deux parties régulières.

T86. Les développements limités usuels

Vous devez les connaître par coeur jusqu'à l'ordre 4.

Développements limités au voisinage de 0
$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + o(x^n)$
$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$
$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$