2BCPST	DEVOIR SURVEILLE N°1	Samedi 21 septembre 2024

Durée 2h

N.B. Les calculatrices ne sont pas autorisées pour cette épreuve.
Au cours de ce problème nous utiliserons la définition suivante :

> Définition : soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels tous non nuls. On lui associe la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$
>
> définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \prod_{k=1}^{n} u_k = u_1 u_2 \dots u_n$.
>
> **Par définition** on dira que le produit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge si et seulement si la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite **finie non nulle**.

1) En considérant, pour $n \geq 2$, le quotient $\dfrac{p_n}{p_{n-1}}$, montrer que pour que le produit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge il est nécessaire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 1.

2) Dans cette question on considère le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \frac{1}{n} .$$

a) Simplifier l'expression de p_n, puis conclure sur la nature du produit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

b) Que dire de la réciproque de la propriété établie en **1)** ?

3) Dans cette question on considère le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 - \frac{1}{n+1} .$$

Simplifier l'expression de p_n, puis conclure sur la nature du produit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

4) Dans cette question on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1 + a^{2^n}$ où a est un réel fixé strictement positif.

a) Que dire de la nature du produit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ lorsque $a \geq 1$?

b) On suppose désormais que $a \in \left]0,1\right[$.

(i) Démontrer par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'égalité $\left(1-a^2\right) p_n = 1 - a^{2^{n+1}}$.

(ii) En déduire la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

5) Dans cette question on considère le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = 1-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

a) Donner une expression simple de $\ln(p_n)$ en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ (on donnera une expression débarrassée de tout symbole Σ ou Π).

b) Conclure sur la nature du produit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

6) Soit (p_n) un produit associé à une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui converge vers 1. On suppose de plus que tous les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement positifs.

Pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}\ln(u_k)$.

Montrer que la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ équivaut à celle du produit (p_n).

Lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un réel l , donner la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ en fonction de l .

7) Dans cette question on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n = 1+v_n$ où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de réels strictement positifs.

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on note $S_n=\ln(p_n)$ et $T_n=\sum_{k=1}^{n} v_k$.

a) Montrer que : $\forall x\in\mathbb{R}^+,\ 0\le \ln(1+x)\le x$.

b) Montrer que les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont croissantes.

c) Démontrer les inégalités : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ S_n\le T_n$.

d) Montrer que si la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et le produit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

8) On prend dans cette question la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = n^{\frac{1}{n}}$.

a) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$?

b) Montrer que la fonction $f: x\mapsto \dfrac{\ln(x)}{x}$ est décroissante sur l'intervalle $[3,+\infty[$.

c) A l'aide de la formule des accroissements finis appliquée à la fonction $g : x \mapsto (\ln(x))^2$ sur un segment bien choisi, démontrer pour tout entier $k \geq 3$ l'inégalité : $(\ln(k+1))^2 - (\ln(k))^2 \leq \dfrac{2\ln(k)}{k}$.

d) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie en **6)** , puis la nature du produit (p_n).

9) Dans cette question on suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est définie par :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \cos\left(\dfrac{a}{2^n}\right)$, où a est un réel fixé de l'intervalle $]0, \pi[$.

a) Pour tout $x \in]0, \pi[$ exprimer $\cos x$ en fonction de $\sin(2x)$ et de $\sin x$.

b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n = \dfrac{\sin a}{2^n \sin\left(\dfrac{a}{2^n}\right)}$.

c) Donner un équivalent simple de $\sin x$ pour x au voisinage de 0 .

d) En déduire que le produit $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et préciser la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$