Problème 1

Marche aléatoire dans un intervalle

1. (a) On remarque que pour tout entier naturel k, (A_k, B_k, C_k, D_k) est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales, on a donc :

$$\begin{aligned} P(A_{k+1}) &= P_{A_k}(A_{k+1})P(A_k) + P_{B_k}(A_{k+1})P(B_k) + P_{C_k}(A_{k+1})P(C_k) \\ &\quad + P_{D_k}(A_{k+1})P(D_k) \\ &= P_{A_k}(A_{k+1})a_k + P_{B_k}(A_{k+1})b_k + P_{C_k}(A_{k+1})c_k + P_{D_k}(A_{k+1})d_k \end{aligned}$$

Si la particule est en 0 à l'instant k, elle y reste, donc $P_{A_k}(A_{k+1}) = 1$. Si elle est en 1 à l'instant k, il y a une probabilité $q = 1/2$ qu'elle se déplace vers la gauche donc $P_{B_k}(A_{k+1}) = 1/2$. Les deux dernières probabilités conditionnelles sont nulles : si la particule est en 2 ou 3 à l'instant k, elle ne peut pas se trouver en 0 à l'instant $k+1$.

On obtient ainsi : $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{2}b_k$.

On applique la même méthode pour b_{k+1} :

$$b_{k+1} = \underbrace{P_{A_k}(B_{k+1})}_{=0} a_k + \underbrace{P_{B_k}(B_{k+1})}_{=0} b_k + \underbrace{P_{C_k}(B_{k+1})}_{=1/2} c_k + \underbrace{P_{D_k}(B_{k+1})}_{=0} d_k$$

Donc $b_{k+1} = \frac{1}{2}c_k$.

Les formules pour c_{k+1} et d_{k+1} s'obtiennent de la même façon, et on conclut : $\boxed{\begin{cases} a_{k+1} &= a_k + \frac{1}{2}b_k \\ b_{k+1} &= \frac{1}{2}c_k \\ c_{k+1} &= \frac{1}{2}b_k \\ d_{k+1} &= d_k + \frac{1}{2}c_k \end{cases}}$

(b) Par la deuxième puis la troisième relation, on a $b_{k+2} = \frac{1}{2}c_{k+1} = \frac{1}{2}\frac{1}{2}b_k$. Donc $b_{k+2} = \frac{1}{4}b_k$ et la suite (b_k) suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique associée est $r^2 = \frac{1}{4}$, qui admet deux solution $r_1 = \dfrac{1}{2}$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$. Ainsi il existe deux constantes α et β telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $b_k = \alpha\left(\frac{1}{2}\right)^k + \beta\left(-\frac{1}{2}\right)^k$.

La particule se trouve en 1 à l'instant 0, donc $b_0 = 1$. À l'instant 1, elle s'est déplacée à gauche ou à droite donc elle n'est plus en 1 : $b_1 = 0$.

On obtient donc $\alpha + \beta = 1$ et $\dfrac{1}{2}\alpha - \dfrac{1}{2}\beta = 0$, donc $\alpha = \beta = 1/2$ et finalement $\boxed{b_k = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{2}\right)^k + \left(-\dfrac{1}{2}\right)^k\right]}$.

(c) A_k est l'événement « la particule est en 0 à l'instant k », ce qui peut se produire dans les deux cas suivants :

- soit elle y est pour la première fois à l'instant k : Z_k est réalisé,
- soit elle était déjà en 0 à l'instant $k-1$ et elle n'a pas bougé, donc A_{k-1} est réalisé.

On a donc $\boxed{A_k = Z_k \cup A_{k-1}}$.

Par incompatibilité des deux événements, on a donc $P(A_k) = P(Z_k) + P(A_{k-1})$ donc $P(Z_k) = a_k - a_{k-1}$. La première relation de la question 1.(a) au rang $k-1$ donne $a_k = a_{k-1} + \frac{1}{2}b_{k-1}$, et ainsi $\boxed{P(Z_k) = \dfrac{1}{2}b_{k-1}}$.

(d) L'événement Z est réalisé si et seulement si l'un des Z_k est réalisé pour un $k \geqslant 1$. On a donc $Z = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{+\infty} Z_k$. On a donc par σ-additivité (les Z_k étant incompatibles deux-à-deux) : $P(Z) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k)$. Prenons la somme partielle d'ordre $N \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} P(Z_k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2}b_{k-1} &= \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\left(-\frac{1}{2}\right)^k \end{aligned}$$

On reconnaît des sommes partielles de séries géométriques convergentes ($|1/2| < 1$ et $|-1/2| < 1$) et

$P(Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(Z_k) = \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\frac{-\frac{1}{2}}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)$ donc $\boxed{P(Z) = \frac{2}{3}}$.

2. (a) Si la particule commence à l'abscisse 0, elle ne se déplacera pas, donc R_0 est certain et $\boxed{r_0 = 1}$.

Si la particule commence à l'abscisse N, elle ne bougera pas et n'arrivera jamais à l'abscisse 0. Donc R_N est impossible et $\boxed{r_N = 0}$.

(b) Supposons que le premier déplacement s'effectue vers la droite, alors la particule se trouve à l'abscisse $n+1$ à l'instant 1. La probabilité qu'à partir de cette abscisse elle termine en 0 est $P(R_{n+1}) = r_{n+1}$. On a donc $\boxed{P_D(R_n) = r_{n+1}}$.

De même, si G est réalisé, alors la particule se trouve à l'abscisse $n-1$ à l'instant 1. La probabilité qu'à partir de cette abscisse elle termine en 0 est r_{n-1}. Donc $\boxed{P_G(R_n) = r_{n-1}}$.

(c) On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement (D, G) :
$P(R_n) = P_D(R_n)P(D) + P_G(R_n)P(G)$. Par la question précédente et en remarquant que $P(D) = p$ et $P(G) = q$, on obtient bien $\boxed{r_n = pr_{n+1} + qr_{n-1}}$.

(d) On peut donc écrire en décalant l'indice : $pr_{n+2} - r_{n+1} + qr_n = 0$ pour $n \in [\![0, N-2]\!]$. La suite (r_n) vérifie donc une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

L'équation caractéristique est $pr^2 - r + q = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = 1 - 4pq = 1 - 4p(1-p) = 1 - 4p + 4p^2 = (1-2p)^2$

Il y a deux cas à traiter :

- si $p \neq 1/2$, alors $\Delta > 0$, et l'équation caractéristique admet deux racines distinctes : 1 et q/p.

  Donc il existe deux réels α et $B\alpha$ tels que $r_n = \alpha \times 1^n + \alpha \times \left(\frac{q}{p}\right)^n$

  Déterminons α et β en utilisant r_0 et r_N :

  $r_0 = 1 = \alpha + \beta$ et $r_N = 0 = \alpha + \left(\frac{q}{p}\right)^N$

  En faisant la différence, on a $\beta\left[1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N\right] = 1$,

  donc $\beta = \dfrac{p^N}{p^N - q^N}$.

  En reportant dans la première équation, il vient

  $\alpha = 1 - \beta = -\dfrac{q^N}{p^N - q^N}$. On a ainsi :

  $r_n = -\dfrac{q^N}{p^N - q^N} + \dfrac{p^N}{p^N - q^N}\left(\dfrac{q}{p}\right)^n = \dfrac{q^N - q^n p^{N-n}}{q^N - p^N}$

- Si $p = 1/2$, alors le discriminant est nul, et l'équation caractéristique admet 1 comme racine double.

  Donc r_n est de la forme $r_n = (\alpha + \beta n) \times 1^n = \alpha + \beta n$

  Or $r_0 = 1 = \alpha$, et $r_N = 0 = \alpha + \beta N = 1 + \beta N$ donc $\beta = -1/N$, ainsi $r_N = 1 - \dfrac{n}{N} = \dfrac{N-n}{N}$

On a bien établi : $\boxed{r_n = \begin{cases} \dfrac{q^N - q^n p^{N-n}}{q^N - p^N} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{N-n}{N} & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}}$

3. La probabilité s_n est obtenue en échangeant p et q et en échangeant n et $n - N$. En effet, si on considère une autre particule, dont la position est $N - n$ si la première particule est en position n, alors les déplacements de cette seconde particule sont opposés à ceux de la première (donc on échange les rôles de p et q), et la probabilité que la première particule arrive en N est la probabilité que la deuxième arrive en 0.

On obtient ainsi $\boxed{s_n = \begin{cases} \dfrac{p^N - p^{N-n}q^n}{p^N - q^N} & \text{si } p \neq \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{n}{N} & \text{si } p = \frac{1}{2} \end{cases}}$

4. On note S_n l'événement « la particule s'arrête en N en partant initialement de l'abscisse n », et T_n l'événement « la particule fini par s'arrêter », alors $T_n = R_n \cup S_n$. Par incompatibilité de R_n et S_n, on a donc $P(T_n) = P(R_n) + P(S_n)$. Distinguons les deux cas :

- Si $p \neq 1/2$:

$$P(T_n) = \frac{q^N - q^n p^{N-n}}{q^N - p^N} + \frac{p^N - p^{N-n}q^n}{p^N - q^N} = \frac{q^N - q^n p^{N-n} - p^N + p^{N-n}q^n}{q^N - p^N}$$
$$= 1$$

- Si $p = 1/2$:
$P(T_n) = \frac{N-n}{N} + \frac{n}{N} = 1$

Dans tous les cas, $P(T_n) = 1$: il est quasi-certain que la particule va s'arrêter. Il y a donc une $\boxed{\text{probabilité nulle qu'elle ne s'arrête jamais}}$.

Ruine du joueur

5. On s'intéresse au capital de A : au départ il vaut a, et à chaque lancer de la pièce, il y a une probabilité p qu'il augmente de 1 et q qu'il diminue de 1. Si ce capital est nul, A est ruiné et le jeu s'arrête , s'il vaut $a+b$, c'est B qui est ruiné et le jeu s'arrête. On est donc ramené au modèle de la marche aléatoire dans l'intervalle $[\![0, a+b]\!]$ en partant initialement de l'abscisse a.

6. En notant R_A l'événement « A finit par être ruiné », on obtient donc $P(R_A)$ en prenant $N = a+b$ et $n = a$ dans l'expression obtenue question 3.

- si $p \neq 1/2$,

$$P(R_A) = \frac{q^{a+b} - q^a p^{a+b-a}}{q^{a+b} - p^{a+b}} = \frac{1 - \frac{q^a p^b}{q^{a+b}}}{1 - \frac{p^{a+b}}{q^{a+b}}} = \frac{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^b}{1 - \left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}}.$$

- si $p = 1/2$, $P(R_A) = \frac{a+b-a}{a+b} = \frac{b}{a+b} = \frac{1}{\frac{a}{b}+1}$.

On a bien : $\boxed{P(R_A) = \begin{cases} \frac{1-\left(\frac{p}{q}\right)^b}{1-\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}} & \text{si } p \neq 1/2 \\ \frac{1}{\frac{a}{b}+1} & \text{si } p = 1/2 \end{cases}}$

7. Disons que nous sommes le joueur A et que le casino est le joueur B.

- si $p = 1/2$, la probabilité que l'on finisse ruiné est $P(R_A) = \frac{1}{\frac{a}{b}+1}$ qui est proche de 1 car on peut imaginer que le capital du casino b est très grand devant le notre a.
- si $p < 1/2$ alors $q > 1/2$ donc $p/q < 1$ et $\left(\frac{p}{q}\right)^b$ et $\left(\frac{p}{q}\right)^{a+b}$ sont proches de 0 puisque b est grand. Donc $P(R_A)$ est proche de 1.

Dans les deux cas, il est très probable que R_A se réalise, c'est-à-dire que l'on finisse ruiné.

Problème 2

8. Comme $X(\Omega) \subset [\![1, N]\!]$, on a $E(X) = \sum_{k=1}^{N} kP(X=k)$.

À $k \in [\![1, N]\!]$ fixé, on a par la formule des probabilités totales, utilisée avec le système complet d'événement (abrégé en SCE par la suite) $(A_i)_{i \in [\![1,m]\!]}$:

$$P(X=k) = \sum_{i=1}^{m} P_{A_i}(X=k)P(A_i)$$

On a donc :

$$E(X) = \sum_{k=1}^{N} k\left(\sum_{i=1}^{m} P_{A_i}(X=k)P(A_i)\right) = \sum_{k=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{m} kP_{A_i}(X=k)P(A_i)\right).$$

On intervertit l'ordre des sommations :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{N} kP_{A_i}(X=k)P(A_i)\right) = \sum_{i=1}^{m} P(A_i)\underbrace{\left(\sum_{k=1}^{N} kP_{A_i}(X=k)\right)}_{=E_{A_i}(X)}$$

On a bien établi : $\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{m} E_{A_i}(X)\, P(A_i)}$.

9. Cas particuliers

(a) S'il n'y a qu'un siège ou deux sièges sur la rangée, seul un spectateur peut s'installer, donc X_1 et X_2 suivent la loi certaine égale à 1. En particulier $\boxed{x_1 = x_2 = 1}$.

(b) Dans le cas $n = 3$, la rangée contient trois sièges.

- Si le premier spectateur choisit le siège n°2 (ce qui a une probabilité $1/3$ d'arriver), personne d'autre ne pourra s'asseoir donc $X_3 = 1$.
- Si le premier spectateur choisit le siège n°1 ou n°3 (ce qui a une probabilité $2/3$ d'arriver), alors le spectateur suivant va nécessairement s'asseoir à l'autre extrémité de la rangée, et plus personne ne pourra s'asseoir ensuite. Donc $X_3 = 2$.

Ainsi la loi de X_3 est donnée par $\boxed{P(X_3=1)=\frac{1}{3} \text{ et } P(X_3=2)=\frac{2}{3}}$.

On calcule ensuite l'espérance : $E(X_3)=1\times\frac{1}{3}+2\frac{2}{3}$ et donc $\boxed{x_3=\frac{5}{3}}$.

(c) On regarde de même où se place le premier spectateur :

- S'il choisit le siège 1 ou 4, il laisse deux places libres consécutives. Le deuxième spectateur va choisir entre ces deux places, et plus personne ne pourra s'installer ensuite.
- Si le premier spectateur choisit le siège 2 ou 3, il laisse exactement une place libre. Le deuxième spectateur va l'occuper et ce sera le dernier à s'asseoir.

Ainsi X_4 suit la loi certaine égale à 2, en particulier $\boxed{x_2=2}$.

10. (a) Supposons que le premier spectateur choisit la place n°i, avec $i\in[\![3,n-2]\!]$. Alors il condamne les places numérotées $i-1, i, i+1$.

Pour les spectateurs suivants :

- les places de 1 à $i-2$ sont disponibles, on est donc ramené au cas d'une rangée de longueur $i-2$: le nombre de spectateurs qui vont s'installer sur ces places suit la même loi que X_{i-2}.
- les places de $i+2$ à n sont disponibles, on est donc ramené à une rangée de longueur $n-(i+2)+1=n-i-1$. Le nombre de spectateurs qui vont s'installer sur ces places suit la même loi que X_{n-i-1}.

Si on fait le bilan : le nombre de spectateur assis au total suit la même loi que $1+X_{i-2}+X_{n-i-1}$ (on compte 1 pour le premier spectateur). Donc, par linéarité de l'espérance : $\boxed{E_{A_i}(X_n)=1+x_{i-2}+x_{n-i-1}}$.

(b) Dans le cas où $i=1$ ou $i=2$, une fois le premier spectateur assis plus personne ne peut s'installer à sa gauche, donc le raisonnement précédent donne seulement $E_{A_i}(X_n)=1+x_{n-i-1}$, mais comme dans ces deux cas $x_{i-2}=0$, la formule obtenue est valable. On raisonne de même si $i=n-1$ ou $i=n$.

(c) En utilisant le SCE $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ et la formule de l'espérance totale, on obtient :

$$E(X_n)=\sum_{i=1}^{n}E_{A_i}(X_n)\underbrace{P(A_i)}_{=1/n}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E_{A_i}(X_n)$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[1+x_{i-2}+x_{n-i-1}]=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}1+\sum_{i=1}^{n}x_{i-2}+\sum_{i=1}^{n}x_{n-i-1}\right]$$

- Pour la première somme : $\sum_{i=1}^{n}1=n$.
- Pour la deuxième somme, les deux premiers termes x_{-1} et x_0 sont nuls : $\sum_{i=1}^{n}x_{i-2}=\sum_{i=3}^{n}x_{i-2}$.

  On pose ensuite $k=i-2$: $\sum_{i=1}^{n}x_{i-2}=\sum_{k=1}^{n-2}x_k$.
- Pour la troisième somme, les deux derniers termes sont nuls : $\sum_{i=1}^{n}x_{n-i-1}=\sum_{i=1}^{n-2}x_{n-i-1}$. On « renverse » ensuite l'indice en posant $k=n-1-i$: $\sum_{i=1}^{n}x_{n-i-1}=\sum_{x=1}^{n-2}x_k$

En revenant à la formule plus haut : $E(X_n)=\frac{1}{n}\left[n+2\sum_{k=1}^{n-2}x_k\right]$ d'où

$$\boxed{x_n=1+\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n-2}x_k}$$

(d) Cette dernière question donne $nx_n=n+2\sum_{k=1}^{n-2}x_k$.

On écrit alors cette relation aux rangs $n+2$ et $n+1$:

$$(n+2)x_{n+2}=n+2+2\sum_{k=1}^{n}x_k$$
$$(n+1)x_{n+1}=n+1+2\sum_{k=1}^{n-1}x_k$$

et on fait la différence : $\boxed{(n+2)x_{n+2}-(n+1)x_{n+1}=2x_n+1}$.

(e) On écrit cette dernière relation aux rangs $n+1$ et n :

$$(n+3)x_{n+3}-(n+2)x_{n+2}=2x_{n+1}+1$$

$$(n+2)x_{n+2}-(n+1)x_{n+1}=2x_n+1$$

et on fait la différence :
$(n+3)x_{n+3}-(n+2)x_{n+2}-(n+2)x_{n+2}+(n+1)x_{n+1}=2(x_{n+1}-x_n)$
donc :
$(n+3)x_{n+3}-(n+3)x_{n+2}+x_{n+2}-(n+2)x_{n+2}+(n+1)x_{n+1}=2(x_{n+1}-x_n)$
ou encore :
$(n+3)x_{n+3}-(n+3)x_{n+2}-(n+1)x_{n+2}+(n+1)x_{n+1}=2(x_{n+1}-x_n)$
ainsi : $(n+3)(x_{n+3}-x_{n+2})-(n+1)(x_{n+2}-x_{n+1})=2(x_{n+1}-x_n)$ qui donne bien $\boxed{(n+3)\alpha_{n+2}-(n+1)\alpha_{n+1}=2\alpha_n}$.
Puis $(n+3)(\beta_{n+1}+\alpha_{n+1})-(n+1)\alpha_{n+1}=2\alpha_n$
donc $(n+3)\beta_{n+1}=-2\alpha_{n+1}+2\alpha_n=-2\beta_n$, et $\boxed{\beta_{n+1}=-\dfrac{2}{n+3}\beta_n}$.

(f) On a donc : $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}\frac{\beta_{k+1}}{\beta_k}=\prod_{k=0}^{n-1}\frac{-2}{k+3}$ d'où par télescopage du produit :

$$\frac{\beta_n}{\beta_0}=\frac{\prod_{k=0}^{n-1}(-2)}{\prod_{k=0}^{n-1}(n+3)}=\frac{(-2)^n}{\frac{(n+2)!}{2}}=2\frac{(-2)^n}{(n+2)!}.$$

Or $\alpha_0=x_1-x_0=1$ et $\alpha_1=x_2-x_1=0$ donc $\beta_0=\alpha_1-\alpha_0=-1$.

On conclut : $\beta_n=-2\dfrac{(-2)^n}{(n+2)!}$ donc $\boxed{\beta_n=\dfrac{(-2)^{n+1}}{(n+2)!}}$.

Ensuite : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k=\sum_{k=0}^{n-1}[\alpha_{k+1}-\alpha_k]=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2)^{k+1}}{(k+2)!}$.
Par télescopage, on a alors :

$$\alpha_n-\alpha_0=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2)^{k+1}}{(k+2)!}=\frac{-2}{2!}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-2)^{k+1}}{(k+2)!}=-1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-2)^{k+1}}{(k+2)!}$$

Et comme $\alpha_0=1$, on arrive à $\boxed{\alpha_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-2)^{k+1}}{(k+2)!}}$.

(g) Notons $H(n)$: « $x_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)(-2)^k}{(k+1)!}$ ».

- Initialisation : $\displaystyle\sum_{k=0}^{1-1}\frac{(1-k)(-2)^k}{(k+1)!}=1=x_1$ donc $H(1)$ est vérifiée.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$, on suppose $H(n)$ vraie, alors $x_{n+1}=\alpha_n+x_n$. En utilisant la question précédente et l'hypothèse de récurrence, on a donc : $x_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-2)^{k+1}}{(k+2)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)(-2)^k}{(k+1)!}$.
  Dans la première somme, on décale l'indice en remplaçant $k+1$ par k : $x_{n+1}=\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{(-2)^k}{(k+1)!}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)(-2)^k}{(k+1)!}$
  puis on décroche les indices qui ne sont pas entre 2 et $n-1$:

$$x_{n+1}=\frac{(-2)^n}{(n+1)!}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(-2)^k}{(k+1)!}+\sum_{k=2}^{n-1}\frac{(n-k)(-2)^k}{(k+1)!}+\underbrace{n+(n-1)\frac{(-2)}{2!}}_{=1}$$

$$=1+\frac{(-2)^n}{(n+1)!}+\sum_{k=2}^{n-1}(n+1-k)\frac{(-2)^k}{(k+1)!}$$

On remet les termes pour $k=0$ et $k=1$:

$$x_{n+1}=1+\frac{(-2)^n}{(n+1)!}+\sum_{k=0}^{n-1}(n+1-k)\frac{(-2)^k}{(k+1)!}-[\underbrace{(n+1)\frac{1}{1!}-n\frac{-2}{2!}}_{=1}]$$

$$=\underbrace{\frac{(-2)^n}{(n+1)!}}_{k=n}+\sum_{k=0}^{n-1}(n+1-k)\frac{(-2)^k}{(k+1)!}=\sum_{k=0}^{n}(n+1-k)\frac{(-2)^k}{(k+1)!}$$

ce qui établit l'hérédité.

On a bien prouvé par récurrence : $\boxed{x_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)(-2)^k}{(k+1)!}}$

11. On a par linéarité de l'espérance :

$$t_n = \frac{1}{n}E(X_n) = \frac{x_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k)(-2)^k}{(k+1)!}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2)^k}{(k+1)!} - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(-2)^k}{(k+1)!}$$

- Pour la première somme :
$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2)^k}{(k+1)!} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(-2)^{i-1}}{i!} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\frac{(-2)^i}{i!} = -\frac{1}{2}\left[\sum_{i=0}^{n}\frac{(-2)^i}{i!} - 1\right]$$
(on « raccroche » le premier terme)
On reconnait la somme partielle de la série exponentielle, donc
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-2)^k}{(k+1)!} = -\frac{1}{2}\left[\mathrm{e}^{-2} - 1\right] = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2}.$$
- Pour la seconde somme : on peut par exemple écrire
$\left|\frac{k(-2)^k}{(k+1)!}\right| = \frac{k2^k}{(k+1)!} \leqslant \frac{(k+1)2^k}{(k+1)!}$. Donc $0 \leqslant \left|\frac{k(-2)^k}{(k+1)!}\right| \leqslant \frac{2^k}{k!}$
De plus, la série $\sum \frac{2^k}{k!}$ est convergente (exponentielle), donc par le théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum\left|\frac{k(-2)^k}{(k+1)!}\right|$ converge. Donc la série $\sum\frac{k(-2)^k}{(k+1)!}$ converge (car elle converge absolument).
On en déduit que $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k(-2)^k}{(k+1)!} = 0$.

On conclut : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} t_n = \frac{1-\mathrm{e}^{-2}}{2}}$.

12. On pouvait prévoir que le taux moyen d'occupation se trouve entre $1/3$ et $1/2$:

- Le mieux que l'on puisse faire en terme d'occupation est de placer en alternance un spectateur et un siège vide, ce qui donnerait un taux d'occupation proche de $1/2$.
- D'autre part, il ne peut y avoir trois sièges consécutifs vides lorsque la rangée est pleine (car on pourrait y placer un spectateur dans le cas contraire). Donc au moins un siège sur trois est occupé à la fin des placements des spectateurs.